ZEITSCHRIFT

FÜR

PHYSIK

UND

MATHEMATIK.

Herausgeber:

A. Baumgartner und A. v. Ettingshausen,

ordentliche Professoren an der k. k. Universität zu Wien.

Neunter Band.

Mit vier Kupfertafeln.

WIEN.

Gedruckt und im Verlage bei *Carl Gerold.*

1831.

104013-B

Inhalt.

I. Heft.

Seite

I. Analytische Optik. Von *L. Schleiermacher*, Grofsherzogl. Hessisch. Oberfinanzrath in Darmstadt . 1

II. Über die Integration der Differenzialgleichungen mehrerer Variablen der ersten Ordnung und des zweiten Grades. Von *Joseph L. Raabe*. (Beschlufs.) 36

III. Analyse des Kropfwassers zu Hall in Österreich ob der Enns. Vom Med. Dr. Ritter von *Holger* . . 75

IV. Beschreibung einer neuen und einfachen Extractions- und Filtrirmaschine. Von *Joseph Knezaurek*, Chemiker 88

V. Über die Härte der Krystalle. Vom Prof. *M. L. Frankenheim* in Breslau 94

VI. Fortschritte der Physik in der neuesten Zeit . . 106

A. Electricität.

1. Magnetisiren durch Electricität. Von *G. Moll* . . . . . —

2. Über die physiologischen Wirkungen eines electrischen Stromes auf einen Frosch. Von *L. Nobili*. (Fortsetzung.) 110

Seite

B. Akustik.

Über die Empfindlichkeit des Gehörorgans. Von *F. Savart* 116

Meteorologische Beobachtungen. September 1830. . . 126

Meteorologische Beobachtungen. October 1830. . . . 127

Meteorologische Beobachtungen. November 1830. . . 128

II. Heft.

I. Notiz über den rhomboëdrischen Wismuthglanz. Von *W. Haidinger* 129

II. Naturhistorische und chemische Untersuchung des prismatoidischen Wismuthglanzes. Vom Bergrath und Prof. *Wehrle* in Schemnitz 133

III. Über Sonnenuhren. Von *J. J. Littrow* 148

IV. Analytische Optik. Von *L. Schleiermacher*, Grofsherzogl. Hessisch, Oberfinanzrath in Darmstadt. (Fortsetzung.) 161

V. Über die ebenen Curven, welche ihren Evoluten ähnlich sind. Von *A. v. Ettingshausen* 178

VI. Über die Härte der Krystalle. Vom Prof. *M. L. Frankenheim* in Breslau. (Fortsetzung.) . . . 194

VII. Übersicht der meteorologischen Beobachtungen in Wien im Jahre 1830. 209

VIII. Ein Nordlicht, gesehen in Wien 212

IX. Neue und verbesserte physikalische Apparate . . 214

1. Eine sehr empfindliche Wage. Von *Ritchie* . —

Seite

2. Photometer. Von *Potter* 217

X. Fortschritte der Physik in der neuesten Zeit . . 218

A. Optik.

1. Neue Polarisations-Phänomene. Von *L. Nobili* . . . . . —

2. Über die Wirkung der Hinterfläche durchsichtiger Körper auf das Licht. Von *Brewster* 221

B. Wärme.

1. Selbstentzündung des Kohlenpulvers. Von *Aubert* 228

2. Versuche über Kerzendochte. Von *Reid* 230

C. Electricität.

1. Einfluſs der Electricität auf die Phosphorescenz von Mineralien. Von *T. J. Pearsoll* 234

2. Über Zersetzung der Metallsalze durch die *Volta*'sche Säule. Von *Matteucci* . 238

3. Über den Grund der *Volta*'schen Electricität. Von *Matteucci* 239

4. Über einige, die electromotorische Kraft der Metalle modificirende Umstände. Von *St. Marianini* 241

5. Versuche mit einem Torsions-Multiplicator. Von *Ritchie* 251

D. Mitchell's Methode, Cautschouc zu bearbeiten 253

Meteorologische Beobachtungen. December 1830. . . 256

III. Heft.

Seite

I. Über Lebensversicherungen. Von *J. J. Littrow* . 257

II. Beurtheilung der Fehler, welche man bei Messung der Krystallwinkel mittelst der Reflexionsgoniometer von *Wollaston* und *Malus* begeht. Von *Julius Weisbach* 269

III. Theorie der mittleren Werthe. Von Dr. *C. Fr. Hauber.* (Fortsetzung.) 302

IV. Analyse des Meteoreisens von Bohumiliz. Vom Med. Dr. Ritter von *Holger* 323

V. Ein Beitrag zu der Seite 88 beschriebenen Filtrir- und Extractionsmaschine. Von *Joseph Knezaurek* 329

VI. Über die Härte der Krystalle. Vom Prof. *M. L. Frankenheim* in Breslau. (Beschluſs.) 332

VII. Über die chemische Theorie der einfachen und zusammengesetzten Electromotoren. Von *St. Marianini* 358

VIII. Vanadium, ein neues Metall 391

IV. Heft.

I. Beschreibung der Amalgamation der Silbererze zu Arany-Idka. Von Dr. *Wehrle,* k. k. Bergrath und Prof. in Schemnitz 393

a) Das Beschicken der Erze 403

b) Das Rösten 405

c) Das Absieben oder Abreutern der Graupen . 415

Seite

d) Das Mahlen des abgesiebten Rostes 416

e) Das Anquicken 418

f) Probenahme 420

g) Das Verdünnen des Breies 421

h) Das Ablassen des Amalgams 422

i) Das Durchseihen des Amalgams und dessen Auspressen 423

k) Das Ausglühen des Amalgams 424

l) Das Einschmelzen des Glühsilbers . . . . —

m) Das Weifssieden des geschmolzenen Silbers 425

II. Notiz über das Vorkommen des rhomboëdrischen Wismuthglanzes (Tetradymits, nach *Haidinger*) und des prismatischen Wismuthglanzes zu Retzbanyen. Von Dr. *Wehrle*, k. k. Bergrath und Professor in Schemnitz 430

III. Bemerkungen zum practischen Gebrauche der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Von *J. J. Littrow* . . . 433

IV. Über die perspectivischen Projectionen der Erd- und Himmelskarten. Von *J. J. Littrow* 499

V. Analytische Optik. Von *L. Schleiermacher*, Grofsherzogl. Hessisch. Oberfinanzrath in Darmstadt. (Fortsetzung.) 454

VI. Über das beim Anlegen Artesischer Brunnen in und um Wien übliche Verfahren. Von *Camilla* . . . 475

VII. Fortschritte der Physik in der neuesten Zeit . . 480

A. Meteorologie.

1. Über den Winter von 1829 — 1830. Von *D'Hombres Firmas* . . . . . —

Seite

2. Resultate der zu Genf und im Hospiz auf dem grofsen Bernard im Jahre 1830 angestellten meteorologischen Beobachtungen 481

B. Electricität.

1. Über die Contraction der in der electrischen Kette befindlichen Thiere beim Öffnen der Kette. Von *Matteuci* 486

2. Gesetze der Fortpflanzung der Electricität. Von *Bigeon* 490

C. Optik.

Elliptische Polarisation des Lichtes. Von *Brewster* 495

Meteorologische Beobachtungen. Jänner 1831 510

Meteorologische Beobachtungen. Februar 1831 . . . 511

Meteorologische Beobachtungen. März 1831 512

ZEITSCHRIFT
FÜR
PHYSIK UND MATHEMATIK.

I.
Analytische Optik;

von

L. Schleiermacher,
Grofsherzogl. Hessisch. Oberfinanzrath in Darmstadt.

Die nachfolgenden Abhandlungen enthalten eine Entwickelung der analytischen Optik, unter der Voraussetzung, dafs die Tangente des halben Gesichtsfeldes, deren Potenzen man gewöhnlich vernachlässigt, eben so wie der Halbmesser der wegen der Helligkeit erforderlichen Öffnung berücksichtigt, und diejenigen Gröfsen der höheren Ordnungen beibehalten werden, welche nicht als unbedeutend zu betrachten sind; sodann eine Anwendung der hierdurch erhaltenen Formeln auf die Construction der optischen Werkzeuge vermittelst der Methode der kleinsten Quadrate. Den Plan, welcher bei dieser Arbeit zu Grunde liegt, und die Motive, welche mich bewogen haben, sie zu unternehmen, habe ich bereits ausführlich in einer Abhandlung angegeben, welche in *Poggendorff's* Annalen der Physik und Chemie, J. 1828, St. 9 abgedruckt ist, ich glaube daher jetzt nur einige Worte hierüber sagen zu müssen.

Die Formeln sind auf diejenigen gegründet, welche *Malus* in seiner Optik für die Brechung des Lichtes in Flächen von beliebiger Gestalt gegeben hat; da es jedoch zur leichteren Entwickelung dieser Formeln noth-

wendig ist, ihnen eine etwas veränderte Gestalt zu geben, so fange ich hiermit an, und gehe dann sogleich zu dem für die Ausübung wichtigen Falle über, in welchem die brechenden Flächen Kugelflächen sind, deren Mittelpuncte sich in einer und derselben geraden Linie befinden.

Dieser Fall begreift die gewöhnlichen dioptrischen und katadioptrischen Werkzeuge in sich, da sich bekanntlich die Brechung in Reflexion verwandelt, wenn das Brechungsverhältnifs $= -1$ gesetzt wird. Damit die Ausdrücke die in der Optik gebräuchliche Gestalt erhalten, wornach sie Functionen von den Vereinigungsweiten der unendlich nahe bei der Axe einfallenden Strahlen sind, betrachte ich die Durchschnittspuncte des gebrochenen Strahles mit einer der coordinirten Ebenen, in welcher sich die Axe des Instrumentes befindet; ferner nehme ich für jede brechende Fläche ein besonderes Coordinatensystem an, indem ich den Ursprung in denjenigen Punct lege, wo die Axe von der brechenden Fläche durchschnitten wird. Bei dieser Voraussetzung sind die Abscissen jener Durchschnittspuncte von den Vereinigungsweiten nur um kleine Gröfsen von der Ordnung der Abweichungen verschieden, daher es leicht wird, die letzteren statt der ersteren in den Formeln einzuführen. Sodann entwickele ich die Ausdrücke in Reihen, indem ich die Gröfsen in verschiedene Ordnungen abtheile, von welchen die erste die genäherten Werthe mit Vernachlässigung der Abweichungen, die folgenden dagegen die Abweichungen wegen der Gestalt und Farbenzerstreuung in- und aufserhalb der Axe enthalten. Fängt man mit den Gröfsen der ersten Ordnung an, geht dann nach und nach zu den folgenden über, und behält in der dritten Ordnung nur diejenigen Glieder bei, welche merkliche Werthe erhalten können, so

wird die Entwickelung sehr einfach und führt zu endlichen Differenzengleichungen von der ersten Ordnung, deren Integrale leicht erhalten werden.

Nachdem auf diese Art die Gleichungen der Strahlen nach den verschiedenen Brechungen auf eine für die Ausübung bequeme Art ausgedrückt worden sind, kann man davon bei den einzelnen Untersuchungen Gebrauch machen, welche sich in der Optik darbieten und eine allgemeine Behandlung zulassen. Die wichtigste hierher gehörige Aufgabe betrifft die Angabe derjenigen Einrichtung der Instrumente, bei welcher die Undeutlichkeit und die Verzerrung so klein als möglich werden. Da bei allen Instrumenten entweder auf einer Ebene oder auf der Netzhaut des hinter denselben befindlichen Auges ein Bild entsteht, auf dessen mögliche Vollkommenheit es hierbei ankommt, so kann man diese durch die Methode der kleinsten Quadrate zu erhalten suchen, wenn man die Seitenabweichungen aller Strahlen, welche das Bild hervorbringen, als die Fehler ansieht, welche durch jene Methode so klein als möglich gemacht werden sollen. Nur mufs man den verschiedenen farbigen Strahlen, aus denen ein auffallender Strahl besteht, und welche bekanntlich nicht einerlei Wirkung im Auge hervorbringen, verschiedene Gewichte beilegen. Diese Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate unterscheidet sich übrigens von der gewöhnlichen dadurch, dafs die Summe der Quadrate der Fehler, welche bei letzterer eine endliche Summe ist, hier wegen der unzähligen Menge der Strahlen durch die Integralrechnung gesucht werden mufs. Eine besondere Rücksicht erfordert bei diesen Untersuchungen die Stellung derjenigen Blendungen, welche die Lage der durch das Instrument gehenden Strahlen bestimmen, mithin einen wesentlichen Einflufs auf die Abweichungen äus-

sern. Bei der den Formeln gegebenen Gestalt veranlafst dieser Umstand keine Schwierigkeiten, und es folgt daraus eine Bestimmung der vortheilhaftesten Stellung jener Blendungen, wenn sie nicht wegen anderer Bedingungen als gegeben betrachtet werden mufs. Nach Beendigung der allgemeinen Untersuchungen bleibt nur noch übrig, sie auf die gebräuchlichen Instrumente anzuwenden und die Dimensionen derselben mit Berücksichtigung der durch die Erfahrung gefundenen Resultate zu bestimmen, welches die zweite Abtheilung dieser Untersuchungen ausmacht.

Brechung des Lichtes in Flächen von beliebiger Gestalt.

1) Ich setze voraus, dafs ein Lichtstrahl nach und nach durch mehrere Mittel von verschiedenem Brechungsvermögen geht, welche von einander durch beliebige, krumme oder ebene Flächen getrennt sind. An jeder dieser Flächen erleidet alsdann der Strahl eine Brechung, welche sich nach den bekannten Gesetzen richtet, dafs nämlich der einfallende und der gebrochene Strahl in einer Ebene liegen, welche durch die Normale am Einfallspuncte geht, und dafs sie mit dieser Normale Winkel bilden, deren Sinus ein beständiges Verhältnifs zu einander haben.

Es seyen nun in Bezug auf eine der brechenden Flächen, welche nach Willkür gewählt werden kann,

a, b, c die rechtwinkeligen Coordinaten eines bestimmten, in dem einfallenden Strahle liegenden Punctes,

$\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$ die Coordinaten des Einfallspunctes,

$F(\mathfrak{X}\,\mathfrak{Y}\,\mathfrak{Z}) = 0$; $p\,d\mathfrak{X} + q\,d\mathfrak{Y} + r\,d\mathfrak{Z} = 0$. (a)
die Gleichung der brechenden Fläche,

$$\frac{x-a}{A} = \frac{y-b}{B} = \frac{z-c}{C} \quad \ldots\ldots\ldots \text{(b)}$$

$$\frac{x-\mathfrak{x}}{E} = \frac{y-\mathfrak{y}}{F} = \frac{z-\mathfrak{z}}{G} \quad \ldots\ldots\ldots \text{(c)}$$

die Gleichungen des einfallenden und des gebrochenen Strahles,

n das Brechungsverhältnifs,

η und θ der Einfalls- und Brechungswinkel,

so kommt es zuerst darauf an, die Coefficienten der Gleichungen (b) und (c) zu bestimmen.

Für die erstere erhält man sogleich, weil der einfallende Strahl durch die beiden Puncte a b c und $\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}\,\mathfrak{z}$ geht,

$$\left.\begin{aligned} A &= \mathfrak{x} - a \\ B &= \mathfrak{y} - b \\ C &= \mathfrak{z} - c \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \text{(d)}$$

Sodann bilden die geraden Linien (b) und (c) mit der Normale der brechenden Fläche (a) im Puncte $\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}\,\mathfrak{z}$ die beiden Winkel η und θ, deren Sinus in dem beständigen Verhältnisse n sind, welches durch die Gleichung

$$\frac{\sin.^2\eta}{n^2} = \sin.^2\theta$$

ausgedrückt wird. Substituirt man hierin die bekannten analytischen Ausdrücke von $\sin.^2\eta$ und $\sin.^2\theta$, so erhält man die Gleichung

$$\frac{(Cq - Br)^2 + (Ar - Cp)^2 + (Bp - Aq)^2}{n^2(A^2 + B^2 + C^2)} = \frac{(Gq - Fr)^2 + (Er - Gp)^2 + (Fp - Eq)^2}{E^2 + F^2 + G^2} \quad \ldots \text{(e)}$$

Endlich gibt die Bedingung, dafs der einfallende Strahl, der gebrochene Strahl und die Normale der brechenden Fläche in einer Ebene liegen, die Gleichung

$$E(Cq - Br) + F(Ar - Cp) + G(Bp - Aq) = 0 \quad \ldots \text{(f)}$$

Die beiden Gleichungen (e) und (f) enthalten die Bedingungen, durch welche $\frac{E}{G}$ und $\frac{F}{G}$ bestimmt werden müssen. Setzt man zur Abkürzung

$$\left.\begin{aligned} D^2 &= A^2 + B^2 + C^2, \\ s^2 &= p^2 + q^2 + r^2, \\ \alpha &= \frac{Cq - Br}{n}, \\ \beta &= \frac{Ar - Cp}{n}, \\ \gamma &= \frac{Bp - Aq}{n}, \\ \delta^2 &= \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2, \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (g)$$

und bemerkt, dafs vermöge dieser Werthe von α, β und γ

$$p\alpha + q\beta + r\gamma = 0$$

ist, so geben jene Gleichungen

$$\frac{E}{G} = \frac{D^2 pr + \alpha\gamma \pm \beta\sqrt{D^2 s^2 - \delta^2}}{D^2 r^2 - \alpha^2 - \beta^2},$$

$$\frac{F}{G} = \frac{D^2 qr + \beta\gamma \mp \alpha\sqrt{D^2 s^2 - \delta^2}}{D^2 r^2 - \alpha^2 - \beta^2}.$$

Das obere Zeichen gehört dem gebrochenen Strahle, das untere dagegen einer Linie an, welche einen gleichen Winkel mit der Normale macht, aber auf der entgegengesetzten Seite liegt; und da einer der Coefficienten E, F, G unbestimmt bleibt, mithin nach Willkür angenommen werden darf, so kann man jenen Coefficienten die folgenden Werthe beilegen:

$$\left.\begin{aligned} E &= D^2 pr + \alpha\gamma + \beta\sqrt{D^2 s^2 - \delta^2}, \\ F &= D^2 qr + \beta\gamma - \alpha\sqrt{D^2 s^2 - \delta^2}, \\ G &= D^2 r^2 - \alpha^2 - \beta^2. \end{aligned}\right\} \quad . \quad (h)$$

Diese Formeln geben die Coefficienten E, F, G in Functionen von $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ und von $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$, welche

nicht unmittelbar gegeben sind; es bleibt daher noch übrig, sie durch bekannte Gröfsen auszudrücken.

Zu diesem Ende seyen

$\mathfrak{e}, \mathfrak{f}, \mathfrak{g}$ die Coordinaten eines bestimmten, nach Willkür angenommenen Punctes im gebrochenen Strahle,

so geben die Gleichungen (c) und (f), wenn man darin die Werthe (g) substituirt,

$$\left.\begin{aligned} \frac{\mathfrak{e}-\mathfrak{X}}{E} = \frac{\mathfrak{f}-\mathfrak{Y}}{F} &= \frac{\mathfrak{g}-\mathfrak{Z}}{G}, \\ E\alpha + F\beta + G\gamma &= 0, \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad \text{(i)}$$

und durch Elimination von E, F, G

$$\alpha(\mathfrak{e}-\mathfrak{X}) + \beta(\mathfrak{f}-\mathfrak{Y}) + \gamma(\mathfrak{g}-\mathfrak{Z}) = 0 \quad . \quad \text{(k)}$$

Da ferner der gebrochene Strahl durch die Puncte $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}\mathfrak{Z}$ und $\mathfrak{e}\mathfrak{f}\mathfrak{g}$ geht, so ist seine Gleichung durch die Coordinaten dieser Puncte ausgedrückt:

$$\frac{x-\mathfrak{e}}{\mathfrak{X}-\mathfrak{e}} = \frac{y-\mathfrak{f}}{\mathfrak{Y}-\mathfrak{f}} = \frac{z-\mathfrak{g}}{\mathfrak{Z}-\mathfrak{g}}, \quad \ldots \quad \text{(l)}$$

welche die Gleichung (c) ersetzen kann, wenn zwei der Coordinaten $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{g}$, von denen eine willkürlich ist, durch die Gleichungen (i) oder (i) und (k) berechnet worden sind.

Ich gehe nun zu der folgenden brechenden Fläche über, und bezeichne alle Gröfsen, welche sich darauf beziehen, indem ich die bisher gebrauchten Buchstaben unten mit einem Striche versehe. In diesem Falle ist der gebrochene Strahl (l) als einfallender Strahl zu betrachten; man kann daher setzen:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{a}_{,} &= \mathfrak{e}, \\ \mathfrak{b}_{,} &= \mathfrak{f}, \\ \mathfrak{c}_{,} &= \mathfrak{g}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad \text{(m)}$$

Sodann liegt der Punct $\mathfrak{X}_{,}\mathfrak{Y}_{,}\mathfrak{Z}_{,}$ zugleich in dem Strahle (l) und in der folgenden brechenden Fläche, man hat

folglich

$$\left.\begin{array}{c} \frac{\mathfrak{x}_{,}-e}{\mathfrak{x}-e}=\frac{\mathfrak{y}_{,}-f}{\mathfrak{y}-f}=\frac{\mathfrak{z}_{,}-g}{\mathfrak{z}-g}, \\ F_{,}(\mathfrak{x}_{,},\mathfrak{y}_{,},\mathfrak{z}_{,})=0. \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (n)$$

Da die Gröfsen e, f, g in Functionen von a, b, c und $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ gegeben sind, so können die Gleichungen (m) und (n) als endliche Differenzengleichungen zwischen a, b, c und $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ oder zwischen e, f, g und $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ betrachtet werden. Durch die Integration derselben erhält man daher diese Gröfsen für alle brechende Flächen, wenn man sie für eine derselben als bekannt annimmt.

Ist die Menge der Lichtstrahlen durch eine Blendung beschränkt, welche an einer beliebigen Stelle angebracht seyn kann, so ist es von Wichtigkeit, denjenigen Strahl zu kennen, welcher durch einen gegebenen Punct derselben geht. Da dieser Punct zugleich dem Lichtstrahle angehört, so ist hierzu weiter nichts erforderlich, als dafs man in der Gleichung des letzteren xyz in die Coordinaten des gegebenen Punctes verwandelt, denn es entsteht dadurch eine Relation zwischen diesen Coordinaten und denen des Einfallspunctes auf einer der brechenden Flächen, welche hinreicht, die letzteren durch die ersteren zu bestimmen.

Übrigens kann hier bemerkt werden, dafs sich die vorhergehenden Formeln alle in die correspondirenden für die Reflexion des Lichtes verwandeln, wenn man darin $n = -1$ setzt. Die Resultate, welche die weitere Entwickelung derselben gibt, enthalten daher als besonderen Fall die Katoptrik, und aus diesem Grunde ist es unnöthig, die letztere abgesondert zu behandeln.

Brechung in sphärischen Flächen.

2) Die optischen Werkzeuge sind gewöhnlich aus sphärischen Linsen oder Spiegeln zusammengesetzt; betrachten wir daher den Fall, in welchem alle brechende Flächen sphärisch sind.

Ich setze voraus, dafs sich ihre Mittelpuncte sämmtlich in einer und derselben geraden Linie befinden, welche ich die *Axe des Instruments* nenne, und dafs ihre Concavitäten dem leuchtenden Puncte zugekehrt sind, von welchem der Lichtstrahl ausgeht.

Da die Endresultate von der Lage der Coordinatenaxen unabhängig sind, so nehme ich die Axe des Instruments als Axe der z an, und lasse die Ebene der yz durch den leuchtenden Punct gehen, welchen ich zu demjenigen wähle, dessen Coordinaten durch $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ bezeichnet worden sind. Diese Voraussetzung gibt für die erste brechende Fläche

$$\mathfrak{a} = 0,$$

und wenn man für den willkürlichen Punct $\mathfrak{efg}$ denjenigen nimmt, in welchem der gebrochene Strahl die Ebene der yz dnrchschneidet, so hat man für alle brechende Flächen

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{e} = 0.$$

Endlich wähle ich für jede brechende Fläche einen besonderen Ursprung der Coordinaten, indem ich ihn mit dem Puncte zusammenfallen lasse, in welchem die Axe der z durch die Fläche durchschnitten wird.

Bezeichnet man ferner durch

a den Halbmesser von einer der brechenden Flächen,

so ist ihre Gleichung

$$F(\mathfrak{X}\,\mathfrak{Y}\,\mathfrak{Z}) = \mathfrak{X}^2 + \mathfrak{Y}^2 + (a - \mathfrak{Z})^2 - a^2 = 0. \quad \text{(a)}$$

Man hat folglich

$$
\begin{aligned}
A &= \mathfrak{X}, \\
B &= \mathfrak{Y} - \mathfrak{b}, \\
C &= \mathfrak{Z} - \mathfrak{c}, \\
D^2 &= \mathfrak{X}^2 + (\mathfrak{Y}-\mathfrak{b})^2 + (\mathfrak{Z}-\mathfrak{c})^2, \\
p &= \mathfrak{X}, \\
q &= \mathfrak{Y}, \\
r &= -(a-\mathfrak{Z}), \\
s^2 &= a^2, \\
\alpha &= -\frac{1}{n}[(\mathfrak{c}-a)\,\mathfrak{Y} + \mathfrak{b}\,(a-\mathfrak{Z})], \\
\beta &= \frac{(\mathfrak{c}-a)\,\mathfrak{X}}{n}, \\
\gamma &= -\frac{\mathfrak{b}\,\mathfrak{X}}{n}, \\
\delta^2 &= \frac{1}{n^2}\Big\{[(\mathfrak{c}-a)\,\mathfrak{Y} + \mathfrak{b}\,(a-\mathfrak{Z})]^2 + \mathfrak{X}^2[(\mathfrak{c}-a)^2 + \mathfrak{b}^2]\Big\}
\end{aligned}
$$

Eliminirt man nun aus diesen Ausdrücken $\mathfrak{X}^2$ vermittelst seines Werthes

$$\mathfrak{X}^2 = 2a\mathfrak{Z} - \mathfrak{Z}^2 - \mathfrak{Y}^2,$$

welcher aus der Gleichung (a) folgt, und setzt zur Abkürzung

$$
\left.
\begin{aligned}
\mathfrak{h} &= \frac{1}{\mathfrak{c}}, \\
\mathfrak{k} &= \frac{1}{a} - \frac{1}{\mathfrak{c}}, \\
\mathfrak{l} &= \frac{\delta^2}{a^2\mathfrak{c}} = \frac{1}{n^2}\Big\{\begin{matrix}\mathfrak{k}^2 \cdot 2a\mathfrak{Z} + 2\mathfrak{k}\mathfrak{Y}\mathfrak{h}\mathfrak{b} + \mathfrak{h}^2\mathfrak{b}^2 \\ -[\mathfrak{k}\mathfrak{Z} + (\mathfrak{k}+\mathfrak{h})\,\mathfrak{Y}\mathfrak{h}\mathfrak{b}]^2,\end{matrix}\Big\} \\
\mathfrak{m} &= -\mathfrak{k}\mathfrak{h} \cdot 2a\mathfrak{Z} - 2\mathfrak{h}\mathfrak{Y}\mathfrak{h}\mathfrak{b} + \mathfrak{h}^2\mathfrak{b}^2, \\
\mathfrak{t} &= \mathfrak{m} - (\mathfrak{k}+\mathfrak{h})(1+\mathfrak{m})\,\mathfrak{Z} - \frac{\mathfrak{k}\mathfrak{Y}\mathfrak{h}\mathfrak{b}}{n^2} \\
&\quad - \frac{[1-(\mathfrak{k}+\mathfrak{h})\,\mathfrak{Z}]}{n^2}\,\mathfrak{h}^2\mathfrak{b}^2, \\
\mathfrak{u} &= \mathfrak{m} - \mathfrak{l}, \\
\mathfrak{w} &= \mathfrak{m} - \mathfrak{l} - \mathfrak{Z}(\mathfrak{k}+\mathfrak{h})(1+\mathfrak{m})[2-(\mathfrak{k}+\mathfrak{h})\mathfrak{Z}] \\
&\quad + \frac{(\mathfrak{k}+\mathfrak{h})^2}{n^2}(2a\mathfrak{Z} - \mathfrak{Z}^2 - \mathfrak{Y}^2)\,\mathfrak{h}^2\mathfrak{b}^2,
\end{aligned}
\right\} \quad (b)
$$

so erhält man

$$\frac{1}{a} = \mathfrak{k} + \mathfrak{h},$$
$$D^2 = c^2 (1 + \mathfrak{m}),$$
$$p = \mathfrak{X},$$
$$q = \mathfrak{Y},$$
$$r = -a[1 - (\mathfrak{k} + \mathfrak{h})\mathfrak{Z}],$$
$$s^2 = a^2,$$
$$\alpha = -\frac{ac}{n}\left\{\mathfrak{k}\mathfrak{Y} + [1 - (\mathfrak{k} + \mathfrak{h})\mathfrak{Z}]\mathfrak{h}\mathfrak{b}\right\},$$
$$\beta = \frac{ac\mathfrak{k}\mathfrak{X}}{n},$$
$$\gamma = -\frac{ac(\mathfrak{k} + \mathfrak{h})\mathfrak{X}\mathfrak{h}\mathfrak{b}}{n},$$
$$\delta^2 = a^2 c^2 \mathfrak{l},$$
$$D^2 p r + \alpha\gamma = -a^2 c^2 \mathfrak{X}(\mathfrak{k} + \mathfrak{h})(1 + \mathfrak{t}),$$
$$\beta\sqrt{D^2 s^2 - \delta^2} = a^2 c^2 \mathfrak{X}^2 \frac{\mathfrak{k}}{n}\sqrt{1 + \mathfrak{u}},$$
$$D^2 r^2 - \alpha^2 - \beta^2 = a^2 c^2 (1 + \mathfrak{w}).$$

Durch diese Werthe geben die Ausdrücke (h) von Nro. 1.

$$E = -a^2 c^2 \mathfrak{X}(\mathfrak{k} + \mathfrak{h})(1 + \mathfrak{t}) - \frac{\mathfrak{k}}{n}\sqrt{1 + \mathfrak{u}},$$
$$G = a^2 c^2 (1 + \mathfrak{w}).$$

Bemerkt man ferner, dafs

$$\mathfrak{e} = 0$$

ist, so erhält man aus der Gleichung (i) von Nro. 1.

$$\frac{1}{\mathfrak{g} - \mathfrak{Z}} = -\frac{E}{G\mathfrak{X}};$$

oder, wenn man die vorhergehenden Werthe substituirt,

$$\frac{1}{\mathfrak{g} - \mathfrak{Z}} = \frac{(\mathfrak{k} + \mathfrak{h})(1 + \mathfrak{t}) - \frac{\mathfrak{k}}{n}\sqrt{1 + \mathfrak{u}}}{1 + \mathfrak{w}}.$$

Dieser Ausdruck, verbunden mit der Gleichung (a),

dient zur Bestimmung von $\mathfrak{g}$ unter der Voraussetzung, dafs die Werthe von $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}$ bekannt sind.

Wenn die Coordinaten $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ und $\mathfrak{b}$ so klein sind, dafs man sich erlauben kann, sie in dem vorhergehenden Ausdrucke zu vernachlässigen, so gibt derselbe

$$\frac{1}{\mathfrak{g}} = (\mathfrak{f} + \mathfrak{h}) - \frac{\mathfrak{k}}{n}.$$

Da nun jene Coordinaten gewöhnlich sehr klein sind, ohne jedoch ganz vernachlässigt werden zu können, so ist es für die Ausübung bequem, den Ausdruck von $\frac{1}{\mathfrak{g}-\mathfrak{Z}}$ so umzuändern, dafs er unmittelbar $\frac{1}{\mathfrak{g}}$ gibt und aus zwei Theilen besteht, von welchen der erste der genäherte Werth ist, der zweite dagegen eine kleine von $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ und $\mathfrak{b}$ abhängige Correction enthält. Nimmt man hiernach für $\frac{1}{\mathfrak{g}}$ den folgenden Ausdruck an:

$$\frac{1}{\mathfrak{g}} = (\mathfrak{f} + \mathfrak{h}) - \frac{\mathfrak{k}}{n} + \mathfrak{G}, \quad \ldots \quad (c)$$

so ist $\mathfrak{G}$ die unbekannte Correction, auf deren Bestimmung es ankommt. Die Differenz der vorhergehenden Ausdrücke von $\frac{1}{\mathfrak{g}-\mathfrak{Z}}$ und $\frac{1}{\mathfrak{g}}$ ist

$$\frac{1}{\mathfrak{g}-\mathfrak{Z}} - \frac{1}{\mathfrak{g}} = \frac{(\mathfrak{f}+\mathfrak{h})(t-w) - \frac{\mathfrak{k}}{n}(\sqrt{1+u}-1-w)}{1+w} - \mathfrak{G}.$$

Substituirt man hierin die identischen Werthe

$$\frac{1}{\mathfrak{g}-\mathfrak{Z}} - \frac{1}{\mathfrak{g}} = \frac{\mathfrak{Z}}{\mathfrak{g}(\mathfrak{g}-\mathfrak{Z})},$$

$$\sqrt{1+u} - 1 = \frac{u}{1+\sqrt{1+u}},$$

so erhält man

$$\mathfrak{G} = \left(\frac{1}{1+w}\right)\left[(\mathfrak{f}+\mathfrak{h})(t-w) - \frac{\mathfrak{k}}{n}\left(\frac{u}{1+\sqrt{1+u}} - w\right)\right] - \frac{\mathfrak{Z}}{\mathfrak{g}(\mathfrak{g}-\mathfrak{Z}} \cdot \quad (d)$$

Dieser Ausdruck von $\mathfrak{G}$ ist sehr bequem, um $\frac{1}{g}$ durch successive Näherungen zu berechnen, wodurch die eine Coordinate des willkürlichen Punctes bestimmt wird. Die andere Coordinate f erhält man aus der Gleichung (k) von Nro. 1., wenn man darin statt α, β, γ die ersten vorhergehenden Werthe substituirt, nämlich

$$\alpha = -\frac{1}{n}[(c-a)\mathfrak{Y} + b(a-\mathfrak{Z})],$$

$$\beta = \frac{(c-a)\mathfrak{X}}{n},$$

$$\gamma = -\frac{b\mathfrak{X}}{n}.$$

Dieses gibt

$$f = \frac{b(g-a)}{(c-a)},$$

und folglich

$$\frac{f}{g} = \frac{b\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{g}\right)}{c\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{c}\right)}.$$

Substituirt man in dieser Formel die oben gegebenen Werthe

$$\frac{1}{a} = \mathfrak{k} + \mathfrak{h},$$

$$\frac{1}{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{h} - \frac{\mathfrak{k}}{n} + \mathfrak{G},$$

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{c} = \mathfrak{k},$$

so wird sie

$$\frac{f}{g} = \frac{b}{nc}\left[1 - \frac{n\mathfrak{G}}{\mathfrak{k}}\right]. \quad \ldots \quad (e)$$

Endlich erhält man aus der Gleichung (l) von Nro. 1. die Gleichungen für die Projectionen des gebrochenen Strahles auf den Ebenen der yz und der zx, nämlich

$$\left.\begin{aligned} y &= \mathfrak{f} - \frac{(\mathfrak{Y}-\mathfrak{f})(z-\mathfrak{g})}{\mathfrak{g}-\mathfrak{Z}}, \\ x &= -\frac{\mathfrak{X}(z-\mathfrak{g})}{\mathfrak{g}-\mathfrak{Z}}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (\mathrm{f})$$

Bei dem Übergange zu der folgenden brechenden Fläche mufs man sich erinnern, dafs sich bei derselben der Ursprung der Coordinaten nach der oben gemachten Voraussetzung abändert, indem er in denjenigen Punct verlegt wurde, wo die folgende Fläche in die Axe der z einschneidet.

Nennt man daher

d den zwischen beiden Flächen liegenden Theil der Axe, so mufs man $\mathfrak{Z}$ und $\mathfrak{g}$ mit $\mathfrak{Z}+d$ und $\mathfrak{g}+d$ verwechseln, wenn man die Formeln (m) und (n) von Nro 1. gebrauchen will, in welchen einerlei Ursprung für beide Flächen vorausgesetzt ist. Hierdurch geben jene Formeln

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{b}_{,} &= \mathfrak{f}, \\ \mathfrak{c}_{,} &= \mathfrak{g} + d, \\ \mathfrak{Y}_{,} &= \mathfrak{f} + \frac{(\mathfrak{Y}-\mathfrak{f})(\mathfrak{g}+d-\mathfrak{Z}_{,})}{\mathfrak{g}-\mathfrak{Z}}, \\ \mathfrak{X}_{,} &= \frac{\mathfrak{X}(\mathfrak{g}+d-\mathfrak{Z}_{,})}{\mathfrak{g}-\mathfrak{Z}}, \\ \mathfrak{X}_{,}^{2} + \mathfrak{Y}_{,}^{2} + (a_{,}-\mathfrak{Z}_{,})^{2} - a_{,}^{2} &= 0. \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (\mathrm{g})$$

Der Ausdruck (e), auf die folgende Fläche bezogen, gibt

$$\frac{\mathfrak{f}_{,}}{\mathfrak{g}_{,}} = \frac{\mathfrak{b}_{,}}{n_{,}\mathfrak{c}_{,}}\left[1 - \frac{n_{,}\mathfrak{G}_{,}}{\mathfrak{k}_{,}}\right].$$

Substituirt man hierin statt $\mathfrak{b}_{,}$ seinen Werth aus der ersten Gleichung (g), so erhält man

$$\frac{\mathfrak{f}_{,}}{\mathfrak{g}_{,}} = \frac{\mathfrak{f}}{\mathfrak{g}} \cdot \frac{\mathfrak{g}}{n_{,}\mathfrak{c}_{,}}\left[1 - \frac{n_{,}\mathfrak{G}_{,}}{\mathfrak{k}_{,}}\right]. \quad \ldots \quad (\mathrm{h})$$

Die vorhergehenden Gleichungen reichen hin, die Werthe von $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ für alle brechende Flächen zu berechnen, wenn für die erste derselben $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ als bekannt angenommen werden.

Nach der schon oben gemachten Bemerkung kann man jene Gleichungen als endliche Differenzengleichungen zwischen den unbekannten Gröfsen betrachten, weil man dadurch die Werthe derselben für eine beliebige Fläche findet, wenn sie für die vorhergehende als bekannt vorausgesetzt werden. Die Integration führt folglich willkürliche Constanten ein, welche durch gegebene Werthe der veränderlichen Gröfsen bestimmt werden müssen, und diese Bestimmung wird in manchen Fällen erleichtert, wenn man voraussetzen darf, dafs die endlichen Differenzengleichungen auch auf die erste brechende Fläche anwendbar sind. Hierzu braucht man nur anzunehmen, dafs die Lichtstrahlen, ehe sie jene treffen, durch eine eingebildete Fläche gegangen seyen, welche mit ihr zusammenfiele und keine brechende Kraft ausübte. Bei dieser Voraussetzung hat man, wenn die Buchstaben, welche sich auf die eingebildete Fläche beziehen, mit dem unteren Index o, diejenigen dagegen, welche der ersten brechenden Fläche angehören, mit dem Index 1 unterschieden werden,

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= a_1, \\ d_0 &= 0, \\ f_0 &= b_1, \\ g_0 &= c_1, \\ \mathfrak{X}_0 &= \mathfrak{X}_1, \\ \mathfrak{Y}_0 &= \mathfrak{Y}_1, \\ \mathfrak{Z}_0 &= \mathfrak{Z}_1, \\ n_0 &= 1, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (i)$$

wodurch den Gleichungen (g) und (h) in Bezug auf die erste brechende Fläche Genüge geleistet wird. Man kann daher die mit dem Index o versehenen Gröfsen wie gegebene Werthe der Veränderlichen gebrauchen.

Es bleibt jetzt nur noch übrig, die vorhergehenden endlichen Differenzengleichungen zu integriren; da

sie aber zu complicirt sind, als dafs ihre genaue Integration möglich wäre, so werde ich sie in Reihen entwickeln, welche nach steigenden Potenzen der Coordinaten $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{f}$ geordnet sind. Die Glieder dieser Reihen werde ich so in Ordnungen abtheilen, dafs die Ordnungszahl jedes Mal die Stelle angibt, welche das Glied in der Reihe einnimmt. Hiernach besteht die erste Ordnung aus den ersten Gliedern sämmtlicher Reihen, die zweite Ordnung aus den zweiten Gliedern, u. s. w., die Exponenten aber wachsen jedes Mal um zwei Einheiten, wenn man in derselben Reihe von einer Ordnung zur folgenden übergeht. Durch diese Entwickelung werden die endlichen Differenzengleichungen linearisch, und steigen nur höchstens bis zur zweiten Ordnung. Mit der Integration solcher Gleichungen hat sich zwar bereits *Lagrange* in seiner Abhandlung über die Fernröhre, welche in den neuen Mémoiren von Berlin, Jahrgang 1778, pag. 162 abgedruckt ist, beschäftiget, da er jedoch nur einen speciellen Fall betrachtet, so wird es nicht undienlich seyn, die allgemeinen Formeln hierher zu setzen, zumal da ihre Entwickelung nur wenigen Raum erfordert. Ich werde mich dabei zur Abkürzung einer Bezeichnungsart bedienen, welche derjenigen ähnlich ist, die *Fourier* bei den Integralen der Differenzialformeln gebraucht hat, indem ich nämlich durch das Zeichen

$$\Sigma_{\alpha}^{\beta} u_m$$

die Summe aller Glieder bezeichne, welche entstehen, wenn man dem Index m alle Werthe von $m = \alpha$ bis $m = \beta$ einschliefslich gibt. Enthält die Gröfse u_m, wie es bisweilen geschieht, mehr als einen Index, so werde ich denjenigen, auf welchen sich die Summation bezieht, unter das Zeichen Σ setzen. Aufserdem werde ich dem

Zeichen $[u_i]^m$

die in der Differenzenrechnung angenommene Bedeutung geben, wornach es das Product von m Factoren

$u_i\, u_{i-1}\, u_{i-2} \ldots u_{i-(m-1)}$ darstellt.

Integration der endlichen Differenzengleichung vom ersten Grade und der zweiten Ordnung.

3) Ich betrachte zuerst die endliche Differenzengleichung

$$u_i = p_{i-1}\,[u_{i-1} + q_{i-2}\, u_{i-2}], \quad \ldots \quad \text{(a)}$$

und setze voraus, dafs die Gröfsen u_i an die Bedingungen geknüpft sind:

$$\left.\begin{aligned} u_0 &= 0 \\ u_1 &= c \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad \text{(b)}$$

Setzt man in der Gleichung (a)

$$u_i = c\, U_i, \quad \ldots\ldots \quad \text{(c)}$$

so verwandelt sich dieselbe in folgende:

$$U_i = p_{i-1}\,[U_{i-1} + q_{i-2}\, U_{i-2}], \quad \ldots \quad \text{(d)}$$

und die Bedingungen (b) geben

$$U_0 = 0,$$
$$U_1 = 1.$$

Formirt man nun nach der Gleichung (d) die verschiedenen Werthe von U_2, U_3 u. s. w., so erhält man durch fortgesetzte Substitutionen die folgenden Werthe dieser Gröfsen:

$$U_2 = p_1,$$
$$U_3 = p_2 p_1 + p_2 q_1,$$
$$U_4 = p_3 p_2 p_1 + p_3 p_2 q_1 + p_3 q_2 p_1,$$
$$U_5 = p_4 p_3 p_2 p_1 + p_4 p_3 p_2 q_1 + p_4 p_3 q_2 p_1 + p_4 q_3 p_2 p_1 + p_4 q_3 p_2 q_1,$$

u. s. w.

Das Gesetz dieser Ausdrücke ist schon so evident, dafs es unnöthig ist, die Entwickelung weiter fortzusetzen.

Man sieht in der That, dafs U_i aus mehreren Producten besteht, deren jedes $i-1$ Factoren enthält. Um diese Producte zu formiren, braucht man anfänglich nur das erste zu schreiben, welches ist:

$$p_{i-1}\, p_{i-2} \cdots p_1 = [p_{i-1}]^{i-1}.$$

In demselben verwechselt man hierauf zuerst ein p, dann zwei p u. s. w. mit q, indem man den q alle mögliche Stellen gibt und diese Verwechselung so weit fortsetzt, als es geschehen kann, mit der einzigen Bedingung, nur diejenigen Producte beizubehalten, in welchen vor jedem q unmittelbar ein p vorhergeht. U_i ist sodann die Summe von sämmtlichen hierdurch erhaltenen Producten.

Die Gleichung (d) zeigt, dafs das gefundene Gesetz für U_i richtig ist, wenn es für U_{i-1} und U_{i-2} als richtig angenommen wird. Nach dieser Voraussetztung enthält nämlich $p_{i-1}\, U_{i-1}$ alle nach jenem Gesetze gebildeten Producte von $i-1$ Factoren, in welchen q_{i-2} nicht vorkommt, $p_{i-1}\, q_{i-2}\, U_{i-2}$ dagegen alle diejenigen, von welchen q_{i-2} ein Factor ist, wodurch die Allgemeinheit jenes Gesetzes bewiesen wird.

Nachdem U_i auf diese Art gefunden ist, so ist der Ausdruck (c) das Integral der Gleichung (a).

Hat man statt der Bedingungen (b) die folgenden:

$$\left.\begin{aligned} u_k &= 0, \\ u_{k+1} &= c, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (e)$$

und man formirt nach der Gleichung (a) den Ausdruck von u_{k+i}, so wird derselbe

$$u_{k+i} = p_{k+i-1}\,[u_{k+i-1} + q_{k+i-2}\, u_{k+i-2}]. \quad (f)$$

Die Gleichungen (f) und (e) stimmen mit denen, (a) und (b), überein, wenn man jeden Index, welcher

in den letzteren vorkommt, um dieselbe Gröfse k vermehrt. Bezeichnet man daher durch U_i^k dasjenige, in was sich U_i durch diese Veränderung des Index verwandelt, so ist das Integral der Gleichung (f) oder (a):

$$u_{k+i} = c\,U_i^k,$$

oder wenn man $i-k$ statt i nimmt,

$$u_i = c\,U_{i-k}^k \quad \ldots\ldots\ldots \quad (g)$$

Dieser Ausdruck enthält als besonderen Fall das Integral (c), welches daraus entsteht, wenn man $k=0$ setzt. Da übrigens das Integral (g) von den Bedingungen (e) abhängt, so ist es nicht das vollständige Integral der Gleichung (a), es reicht aber für den gegenwärtigen Zweck hin.

Ich gehe nun zum allgemeinen Fall über, und betrachte die Gleichung

$$u_i = p_{i-1}\,[u_{i-1} + q_{i-2}\,u_{i-2}] + r_{i-1}, \quad \ldots \quad (h)$$

wobei u_i keiner Bedingung unterworfen ist.

Nimmt man die Werthe von u_0 und u_1 als gegeben an, und formirt nach der Gleichung (h) die Ausdrücke von u_2, u_3 u. s. w. bis u_i, so erhält man daraus durch fortgesetzte Substitutionen den Werth von u_i, durch u_0 und u_1 ausgedrückt; und da die Gleichung (h) linearisch ist, so kann dieser Werth nur die Gestalt haben:

$$u_i = P_i u_1 + Q_i u_0 + R_i, \quad \ldots \quad (i)$$

Man hat eben so

$$u_{i-1} = P_{i-1}\,u_1 + Q_{i-1}\,u_0 + R_{i-1},$$
$$u_{i-2} = P_{i-2}\,u_1 + Q_{i-2}\,u_0 + R_{i-2}.$$

Durch Substitution dieser Werthe erhält man aus der Gleichung (h)

$$u_i = p_{i-1}\,(P_{i-1} + q_{i-2}\,P_{i-2})\,u_1$$
$$+ p_{i-1}\,(Q_{i-1} + q_{i-2}\,Q_{i-2})\,u_0$$
$$+ p_{i-1}\,(R_{i-1} + q_{i-2}\,R_{i-2}) + r_{i-1}.$$

Die Vergleichung hiervon mit dem Ausdrucke (i) gibt

$$\left.\begin{aligned} P_i &= p_{i-1}(P_{i-1} + q_{i-2} P_{i-2}), \\ Q_i &= p_{i-1}(Q_{i-1} + q_{i-2} Q_{i-2}), \\ R_i &= p_{i-1}(R_{i-1} + q_{i-2} R_{i-2}) + r_{i-1}. \end{aligned}\right\} \cdot \quad (k)$$

Setzt man nun in der Gleichung (i) zuerst $i = 0$, dann $i = 1$, so erhält man

$$P_0 = 0; \quad Q_0 = 1; \quad R_0 = 0.$$
$$P_1 = 1; \quad Q_1 = 0; \quad R_1 = 0.$$

Durch diese Werthe gibt die zweite Gleichung (k)

$$Q_2 = p_1 q_0.$$

Vergleicht man die beiden ersten Gleichungen (k) und die vorhergehenden Werthe von P_0, P_1, Q_1 und Q_2 mit den Ausdrücken (a) und (e), so sieht man, dafs sie mit letzteren übereinstimmen, wenn man darin ein Mal

$$u = P; \quad k = 0; \quad c = 1,$$

und dann

$$u = Q; \quad k = 1; \quad c = p_1 q_0$$

setzt. Vermittelst dieser Werthe gibt daher das Integral (g)

$$\left.\begin{aligned} P_i &= U_i, \\ Q_i &= p_1 q_0 U_{i-1}^{i}. \end{aligned}\right\} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (l)$$

Es bleibt jetzt noch übrig, R_i zu finden. Die Gleichung (h) zeigt, dafs R_i nur eine linearische Function der verschiedenen mit r bezeichneten Gröfsen seyn kann, und dafs eine beliebige von ihnen, z. B. r_m, zum ersten Male in dem Ausdrucke von R_{m+1} vorkommt, in welchem ihr Coefficient die Einheit ist. Denkt man sich daher R_i in einen nach r geordneten Ausdruck entwickelt, und bezeichnet den Coefficienten von r_m in demselben durch $S_i^{(m)}$, so kann jener Ausdruck nur die Gestalt haben:

$$\left.\begin{aligned} R_i &= S_i^{(1)} r_1 \ldots + S_i^{(m)} r_m \ldots + S_i^{(i-1)} r_{i-1} \\ &= \sum_m^{(i-1)} S_i^{(m)} r_m, \end{aligned}\right\} \text{(m)}$$

und es ist $S_i^{(m)} = 0$ für alle Werthe von i, von $i = 0$ bis zu $i = m$, dagegen ist $S_i^{(m)} = 1$ für $i = m + 1$, so dafs man hat

$$S_m^{(m)} = 0,$$
$$S_{m+1}^{(m)} = 1.$$

Formirt man nun nach dem Ausdrucke (m) die Werthe von R_{i-1} und R_{i-2}, und substituirt sie eben so wie den von R_i in der letzten Gleichung (k), so erhält man durch die Vergleichung der mit r_m multiplicirten Glieder

$$S_i^{(m)} = p_{i-1} (S_{i-1}^{(m)} + q_{i-2} S_{i-2}^{(m)}).$$

Die vorhergehenden Ausdrücke stimmen mit denen (e) und (a) überein, wenn man setzt

$$u = S^{(m)}; \quad k = m; \quad c = 1.$$

Das Integral (g) gibt daher

$$S_i^{(m)} = U_{i-m}^m.$$

Durch Substitution dieses Werthes erhält man endlich aus (m)

$$R_i = \sum_m^{(i-1)} U_{i-m}^m r_m \quad \ldots \ldots \quad \text{(n)}$$

Die Formeln (i), (l) und (n) enthalten das vollständige Integral der gegebenen Differenzengleichung vom ersten Grade und der zweiten Ordnung (h), die Grössen u_1 und u_0 vertreten dabei die Stelle der beiden willkürlichen Constanten, welche die Ordnung der Gleichung erfordert.

Substituirt man in dem Ausdrucke (i) die Werthe von P_i, Q_i und R_i, so wird jenes Integral

$$u_i = U_i u_1 + U_{i-1}^1 p_1 q_0 u_0 + \sum_m^{(i-1)} U_{i-m}^m r_m, \quad \text{(o)}$$

worin man die Gröfsen u_1 und $p_1 q_0 u_0$ durch zwei willkürliche Constanten ersetzen kann.

Durch die Annahme $q = 0$ verwandelt sich die gegebene Gleichung (h) in die endliche Differenzengleichung vom ersten Grade und der ersten Ordnung:

$$u_i = p_{i-1} u_{i-1} + r_{i-1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (p)$$

In diesem Falle hat man

$$U_i = [p_{i-1}]^{i-1},$$

$$U^m_{i-m} = [p_{i-1}]^{i-m-1} = \frac{[p_{i-1}]^{i-1}}{[p_m]^m},$$

folglich wird das Integral (o)

$$u_i = [p_{i-1}]^{i-1} \left\{ u_1 + \Sigma_1^{(i-1)} \frac{r_m}{[p_m]^m} \right\}$$

$$= [p_{i-1}]^{i-1} \left\{ u_1 + \Sigma_2^i \frac{r_{m-1}}{[p_{m-1}]^{m-1}} \right\}, \quad . \quad . \quad . \quad (q)$$

oder, wenn man u_0 als willkürliche Constante betrachtet, und bemerkt, dafs die Gleichung (p)

$$u_1 = p_0 u_0 + r_0$$

gibt,

$$u_i = [p_{i-1}]^i \left\{ u_0 + \Sigma_0^{(i-1)} \frac{r_m}{[p_m]^{m+1}} \right\}$$

$$= [p_{i-1}]^{i-1} \left\{ p_0 u_0 + \Sigma_1^i \frac{r_{m-1}}{[p_{m-1}]^{m-1}} \right\}, \quad . \quad . \quad . \quad (r)$$

welches mit dem bekannten Werthe dieses Integrals übereinstimmt.

Enthält die Gröfse r_{i-1} ein Glied, welches mit dem Zeichen Σ versehen ist, so dafs die Gleichung (p) die Gestalt hat:

$$u_i = p_{i-1} u_{i-1} + r_{i-1} + s_{i-1} \Sigma_1^{(i-1)} t_\mu, \quad . \quad (s)$$

so wird ihr Integral

$$u_i = [p_{i-1}]^{i-1} \left\{ \begin{array}{l} u_1 + \Sigma_1^{(i-1)} \dfrac{r_m}{[p_m]^m} \\ \\ \quad + \Sigma_m^{(i-1)} \dfrac{s_m}{[p_m]^m} \Sigma_1^m t_\mu . \end{array} \right\} \text{(t)}$$

In manchen Fällen ist es besser, die Ordnung der beiden Integrationen umzukehren, welche in dem letzten Gliede enthalten sind. Zu diesem Ende hat man, wenn man statt $\frac{s_m}{[p_m]^m}$ den Buchstaben q_m setzt,

$$\Sigma_m^{(i-1)} q_m \Sigma_1^m t_\mu = \Sigma_m^{(i-1)} q_m [t_1 + t_2 \ldots + t_m] =$$
$$= q_1 t_1$$
$$+ q_2 (t_1 + t_2)$$
$$+ \ldots\ldots\ldots$$
$$+ q_m (t_1 + t_2 \ldots + t_m)$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ q_{i-1} (t_1 + t_2 \ldots + t_{i-1})$$
$$= t_1 (q_1 \ldots + q_{i-1}) + t_2 (q_2 \ldots + q_{i-1}) \ldots$$
$$\ldots + t_m (q_m \ldots + q_{i-1}) \ldots + t_{i-1} q_{i-1}$$
$$= \Sigma_m^{(i-1)} t_m \Sigma_m^{(i-1)} q_\mu = \Sigma_m^{(i-1)} t_m \Sigma_m^{(i-1)} \frac{s_\mu}{[p_\mu]^\mu} .$$

Hierdurch nimmt das Integral (*t*) die Gestalt an

$$u_i = [p_{i-1}]^{i-1} \left\{ \begin{array}{l} u_1 + \Sigma_1^{(i-1)} \dfrac{r_m}{[p_m]^m} \\ \\ \quad + \Sigma_m^{(i-1)} t_m \Sigma_m^{(i-1)} \dfrac{s_\mu}{[p_\mu]^\mu} \end{array} \right\} . \quad \text{(u)}$$

Glieder der ersten Ordnung, oder optische Formeln mit Vernachlässigung der Abweichungen.

4) Nach der am Ende von Nro. 2. gegebenen Definition sind die Glieder der ersten Ordnung diejenigen Werthe, welche man erhält, wenn man die genauen

Ausdrücke in Reihen entwickelt, die nach steigenden Potenzen der Coordinaten $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{f}$ geordnet sind, und in jeder Reihe nur das mit der niedrigsten Potenz derselben multiplicirte Glied beibehält. Werden jene Coordinaten als klein vorausgesetzt, so sind die Reihen convergirend, und die Glieder der ersten Ordnung enthalten genäherte Auflösungen, welche in vielen Fällen hinreichen; es ist daher vor Allem nöthig, sich damit zu beschäftigen. Ich werde mich allgemein der lateinischen Buchstaben bedienen, um die Gröfsen der ersten Ordnung zu bezeichnen, die denjenigen correspondiren, für welche in Nro. 2. deutsche Buchstaben gebraucht worden sind. Treibt man daher die Näherung nicht weiter, so mufs man die letzteren Buchstaben mit den ersteren verwechseln, und da die Gleichungen (a) und (d) von Nro. 2. zeigen, dafs die Gröfsen $\mathfrak{Z}$ und $\mathfrak{S}$ von der Ordnung $\mathfrak{X}^2$ oder $\mathfrak{b}^2$ sind, so müssen sie gegen die Coordinaten $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{f}$ und die davon unabhängigen Glieder vernachlässigt werden. Hiernach geben die Formeln von Nro. 2.:

$$\left.\begin{aligned}
h &= \tfrac{1}{c},\\
k &= \tfrac{1}{a} - \tfrac{1}{c},\\
\tfrac{1}{g} &= (k+h) - \tfrac{k}{n} = \tfrac{n-1}{na} + \tfrac{1}{nc},\\
\tfrac{f_,}{g_,} &= \tfrac{b_,}{n,c_,} = \tfrac{f}{g}\cdot\tfrac{g}{n,c_,},\\
b_, &= f,\\
c_, &= g+d,\\
Y_, &= f + (Y-f)\left(\tfrac{g+d}{g}\right) = Y\left(\tfrac{g+d}{g}\right) - \tfrac{fd}{g}\\
X_, &= X\left(\tfrac{g+d}{g}\right),\\
Z &= \tfrac{X^2+Y^2}{2a},
\end{aligned}\right\} \quad (a)$$

$$\left.\begin{aligned} y &= f-(Y-f)\left(\frac{z-g}{g}\right)=-Y\left(\frac{z-g}{g}\right)+\frac{zf}{g} \\ x &= -X\left(\frac{z-g}{g}\right). \end{aligned}\right\} \quad (a)$$

Um diese Formeln zu integriren, betrachte ich zuerst die sechste und die dritte. Bezieht man sie auf die i^{te} Fläche, so werden sie

$$\left.\begin{aligned} c_i &= g_{i-1}+d_{i-1}, \\ \frac{1}{g_i} &= \left(\frac{n-1}{n}\right)_i \frac{1}{a_i}+\frac{1}{n_i c_i}. \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (b)$$

Statt c und g führe ich eine Reihe von veränderlichen Gröfsen u_0, u_1 u. s. w. bis u_{2i} ein, und setze

$$\left.\begin{aligned} c_i &= \frac{u_{2i-1}}{u_{2i-2}}, \\ g_i &= \frac{u_{2i-1}}{u_{2i}}. \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (c)$$

Durch Substitution dieser Werthe nehmen die Gleichungen (b) die Gestalt an:

$$\left.\begin{aligned} u_{2i-1} &= d_{i-1}\,u_{2i-2}+u_{2i-3}, \\ u_{2i} &= \left(\frac{n-1}{n\,a}\right)_i u_{2i-1}+\frac{1}{n_i}u_{2i-2}, \end{aligned}\right\} \quad . \quad (d)$$

und sie stimmen mit der Gleichung (h) von Nro. 3. überein, wenn man setzt:

$$\left.\begin{aligned} p_{2i-2} &= d_{i-1}, \\ p_{2i-1} &= \left(\frac{n-1}{u\,a}\right)_i, \\ q_{2i-3} &= \frac{1}{d_{i-1}}, \\ q_{2i-2} &= \left(\frac{a}{n-1}\right)_i, \\ r_{2i-2} &= r_{2i-1} = 0. \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (e)$$

Mit Berücksichtigung dieser Werthe ist der Ausdruck (o) von Nro. 3. das Integral der Gleichungen (d),

wenn man die Constanten u_1 und u_0 auf eine schickliche Weise bestimmt. Zu diesem Ende erhält man aus (c) und (e), wenn man darin $i=1$ setzt,

$$c_1 = \frac{u_1}{u_0},$$

$$p_1 = \left(\frac{n-1}{na}\right)_1,$$

$$q_0 = \left(\frac{a}{n-1}\right)_1,$$

und hieraus

$$p_1 q_0 u_0 = \frac{u_1}{n_1 c_1};$$

u_1 bleibt unbestimmt, und da es aus dem Endresultate wegfällt, so kann man, ohne der Allgemeinheit zu schaden, dafür die Einheit nehmen. Hierdurch wird die Formel (o) von Nro. 3.:

$$u_i = U_i + \frac{1}{n_1 c_1} U'_{i-1}, \quad \ldots \quad \text{(f)}$$

worin man nach und nach i in $2i-2$, $2i-1$ und $2i$ umändern muſs, um c_i und g_i vermittelst der Ausdrücke (c) zu erhalten.

Die vorhergehenden Resultate sind denen analog, welche *Lagrange* in der oben angeführten Abhandlung für ein System von Linsengläsern gefunden hat.

Da man übrigens in der Ausübung gewöhnlich die Werthe von c und g für alle brechende Flächen zu kennen nöthig hat, so ist es einfacher, sich hierzu unmittelbar der Formeln (b) zu bedienen, indem man sie abwechselnd gebraucht, und dem Index i nach und nach alle Werthe von $i=1$ bis zu $i=i$ gibt.

Ich gehe nun zur vierten Gleichung (a). Auf die i^{te} Fläche bezogen wird sie

$$\frac{f_i}{g_i} = \frac{b_i}{n_i c_i} = \frac{g_{i-1}}{n_i c_i} \frac{f_{i-1}}{g_{i-1}}.$$

Das Integral hiervon, nach der Formel (r) von Nro. 3. genommen, ist

$$\frac{f_i}{g_i} = \frac{b_i}{n_i\, c_i} = \frac{1}{[n_i]^i}\left[\frac{g_{i-1}}{c_i}\right]^{i-1} \frac{g_0}{c_1}\frac{f_0}{g_0},$$

folglich, wenn man statt $\frac{g_0}{c_1}\frac{f_0}{g_0}$ seinen Werth $\frac{b_1}{c_1}$ substituirt, welchen die Ausdrücke (i) von Nro. 2. geben,

$$\frac{f_i}{g_i} = \frac{b_i}{n_i\, c_i} = \frac{1}{[n_i]^i}\left[\frac{g_{i-1}}{c_i}\right]^{i-1} \frac{b_1}{c_1}.$$

Setzt man zur Abkürzung

$$\left.\begin{aligned} \nu_i &= n_i n_{i-1} \ldots n_1 = [n_i]^i, \\ V_i &= \frac{g_{i-1}}{c_i}\frac{g_{i-2}}{c_{i-1}} \ldots \frac{g_1}{c_2} = \left[\frac{g_{i-1}}{c_i}\right]^{i-1}, \\ \varphi_1 &= \frac{b_1}{c_1}, \end{aligned}\right\} \quad \text{(g)}$$

so ist

ν_i das Brechungsverhältnifs unter der Voraussetzung, dafs der Lichtstrahl unmittelbar in das i^{te} durchsichtige Mittel dringt, ohne die vorhergehenden zu durchlaufen;

V_i die durch das Instrument hervorgebrachte Vergrösserung, wenn man darauf keine Rücksicht nimmt, dafs die Gegenstände bei dem Gebrauche desselben in eine andere Entfernung als bei der Betrachtung mit dem bloſsen Auge gehalten werden müssen;

φ_1 die Tangente des halben Gesichtsfeldes in dem Falle, dafs der leuchtende Punct an der Grenze desselben liegt.

Durch diese Werthe nimmt der vorhergehende Ausdruck von $\frac{f_i}{g_i}$ die Gestalt an:

$$\frac{f_i}{g_i} = \frac{b_i}{n_i\, c_i} = \frac{V_i \varphi_1}{\nu_i} \quad \ldots\ldots \quad \text{(h)}$$

Hierbei mufs bemerkt werden, dafs man, um diese Formel auf die erste brechende Fläche anwenden zu können,

$$V_1 = 1$$

setzen mufs, denn hieraus folgt

$$\frac{f_1}{g_1} = \frac{\varphi_1}{\nu_1} = \frac{b_1}{n_1 c_1}.$$

Endlich geben die siebente und die achte Gleichung (a), wenn man darin statt $g + d$ und $\frac{f}{g}$ ihre Werthe substituirt,

$$Y_i = \frac{c_i}{g_{i-1}} Y_{i-1} - \frac{V_{i-1} d_{i-1}}{\nu_{i-1}} \varphi_1,$$

$$X_i = \frac{c_i}{g_{i-1}} X_{i-1};$$

folglich, wenn man nach der Formel (q) von Nro. 3. integrirt, und zur Abkürzung

$$K^{(m)} = -\frac{V_{m-1} V_m d_{m-1}}{\nu_{m-1}},$$

$$K_i = \sum_m^i K^{(m)}$$

setzt,

$$Y_i = \frac{1}{V_i}[Y_1 + K_i \varphi_1],$$

$$X_i = \frac{1}{V_i} X_1.$$

Die erste dieser Formeln zeigt, dafs man $K_1 = 0$ setzen mufs, damit der Werth von Y_1 darin begriffen ist.

Für die folgenden Untersuchungen ist es jedoch vortheilhaft, die Bezeichnungen so abzuändern, dafs der Ausdruck von Y_1 dieselbe Gestalt hat wie der von Y_i. Hierzu ist weiter nichts erforderlich, als den Ursprung der Y_1 in denjenigen Punct zu verlegen, dessen Ordinate

$$Y_1 = K_1 \varphi_1$$

ist, wobei K_1 eine willkürliche Constante bezeichnet.

Versieht man nun Y_1, wenn es auf diesen neuen Ursprung bezogen wird, mit einem Accente, so ist

$$Y_1 = \acute{Y}_1 + K_1 \varphi_1,$$

und die vorhergehenden Formeln nehmen die Gestalt an:

$$\left.\begin{aligned} K^{(m)} &= -\frac{V_{m-1} V_m d_{m-1}}{\varrho_{m-1}}, \\ K_i &= K_1 + \sum_m^i K^{(m)}, \\ Y_i &= \frac{1}{V_i}[\acute{Y}_1 + K_i \varphi_1], \\ X_i &= \frac{X_1}{V_i}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (i)$$

Hierdurch gibt die neunte Gleichung (a)

$$Z_i = \frac{X_1^2 + (\acute{Y}_1 + K_i \varphi_1)^2}{2 a_i V_i^2} \quad \ldots \quad (k)$$

Da auf diese Art die Gröfsen g_i, f_i, X_i, Y_i und Z_i bestimmt sind, so sind die beiden letzten Gleichungen (a), auf die i^{te} Fläche bezogen, diejenigen, welche den Projectionen des gebrochenen Strahles auf den Ebenen der yz und der zx zugehören. Setzt man in diesen Gleichungen $z_i = g_i$, so geben sie

$$y_i = f_i,$$
$$x_i = 0,$$

und da diese Werthe von Y_1 und X_1 unabhängig sind, so folgt daraus, dafs sich alle Strahlen, welche von demselben leuchtenden Puncte ausgehen, in demjenigen Puncte schneiden, dessen Coordinaten

$$x_i = 0,$$
$$y_i = f_i,$$
$$z_i = g_i$$

sind. Dieser Vereinigungspunct ist daher das Bild des leuchtenden Punctes, wenn man nur die Gröfsen der

ersten Ordnung berücksichtigt. Eben so haben sich die Strahlen, ehe sie auf die i^{te} Fläche fielen, in dem der $(i-1)^{ten}$ Fläche zugehörigen Vereinigungspuncte durchschnitten, dessen Coordinaten aus den vorhergehenden durch Verwechselung von i mit $(i-1)$ erhalten werden. In Bezug auf die i^{te} Fläche sind diese Coordinaten

$$x_i = 0,$$
$$y_i = f_{i-1} = b_i,$$
$$z_i = g_{i-1} + d_{i-1} = c_i.$$

Man nennt daher gewöhnlich die Gröfsen c_i und g_i die der i^{ten} Fläche zugehörigen *Vereinigungsweiten* der Strahlen.

Glieder der höheren Ordnungen, welche sich auf die Abweichung wegen der Gestalt beziehen.

5) Die Glieder der ersten Ordnung können als eine erste Näherung betrachtet werden, so dafs die der höheren Ordnungen nur kleine Correctionen enthalten, welche an ersteren angebracht werden müssen. Diese Correctionen sind dasjenige, was man gewöhnlich die *Abweichungen wegen der Gestalt* nennt. Um sie auf eine schickliche Weise zu bezeichnen, werde ich mich der Charakteristik der endlichen Differenzen bedienen, indem ich dieselbe vor die durch die erste Näherung gefundenen Gröfsen setze. Hiernach bezeichnet Δ die Glieder der zweiten Ordnung, Δ^2 die der dritten Ordnung, u. s. w.

Dieses vorausgesetzt, fange ich mit der Entwickelung der Formeln (f) von Nro. 2. an. Da die zweite derselben aus der ersten entsteht, wenn man $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{Y}$ mit x und $\mathfrak{X}$ verwechselt und $\mathfrak{f}=0$ setzt, so ist es nur nö-

thig, die erstere zu betrachten, nämlich

$$y = \mathfrak{f} - \frac{(\mathfrak{Y}-\mathfrak{f})(z-\mathfrak{g})}{\mathfrak{g}-\mathfrak{Z}}.$$

$\mathfrak{Z}$ ist von der Ordnung $\mathfrak{X}^2$; treibt man daher die Entwickelung nur bis zu den Gliedern der dritten Ordnung, so ist

$$\frac{1}{\mathfrak{g}-\mathfrak{Z}} = \frac{1}{\mathfrak{g}} + \frac{\mathfrak{Z}}{\mathfrak{g}^2} + \frac{\mathfrak{Z}^2}{\mathfrak{g}^3},$$

und der vorhergehende Ausdruck nimmt die Gestalt an:

$$y = \mathfrak{Y} - z\left(\frac{\mathfrak{Y}-\mathfrak{f}}{\mathfrak{g}}\right) - \left(\frac{\mathfrak{Y}-\mathfrak{f}}{\mathfrak{g}}\right)\left(\frac{z-\mathfrak{g}}{\mathfrak{g}}\right)\mathfrak{Z} - \left(\frac{\mathfrak{Y}-\mathfrak{f}}{\mathfrak{g}}\right)\left(\frac{z-\mathfrak{g}}{\mathfrak{g}}\right)\frac{\mathfrak{Z}^2}{\mathfrak{g}}.$$

Nach der angenommenen Bezeichnung hat man aber

$$\mathfrak{Y} = Y + \Delta Y + \Delta^2 Y,$$
$$\frac{1}{\mathfrak{g}} = \frac{1}{g} + \Delta\frac{1}{g} + \Delta^2\frac{1}{g},$$
$$\frac{\mathfrak{f}}{\mathfrak{g}} = \frac{f}{g} + \Delta\frac{f}{g} + \Delta^2\frac{f}{g},$$
$$\mathfrak{Z} = Z + \Delta Z.$$

Dieses gibt

$$\frac{z-\mathfrak{g}}{\mathfrak{g}} = \frac{z}{\mathfrak{g}} - 1 = \frac{z-g}{g} + z\Delta\frac{1}{g},$$

$$\mathfrak{Y} - z\left(\frac{\mathfrak{Y}-\mathfrak{f}}{\mathfrak{g}}\right) = Y - z\left(\frac{Y-f}{g}\right) - z\left(Y\Delta\frac{1}{g} - \Delta\frac{f}{g}\right) - z\left(Y\Delta^2\frac{1}{g} - \Delta^2\frac{f}{g}\right) - \Delta Y\left[\frac{z-g}{g} + z\Delta\frac{1}{g}\right] - \Delta^2 Y\left(\frac{z-g}{g}\right),$$

$$\left(\frac{\mathfrak{Y}-\mathfrak{f}}{\mathfrak{g}}\right)\left(\frac{z-\mathfrak{g}}{\mathfrak{g}}\right)\mathfrak{Z} = \frac{(Y-f)(z-g)Z}{g^2} + \frac{\Delta Y(z-g)Z}{g^2} + \left(Y\Delta\frac{1}{g} - \Delta\frac{f}{g}\right)\left(\frac{z-g}{g}\right)Z + \frac{(Y-f)(z-g)\Delta Z}{g^2} + \frac{z(Y-f)Z}{g}\Delta\frac{1}{g},$$

$$\left(\frac{\mathfrak{y}-\mathfrak{f}}{\mathfrak{g}}\right)\left(\frac{z-\mathfrak{g}}{\mathfrak{g}}\right)\frac{\mathfrak{Z}^2}{\mathfrak{g}}=\frac{(Y-f)(z-g)\,Z^2}{g^3}.$$

Hierdurch verwandelt sich der Ausdruck von y in folgenden:

$$y=Y-z\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{Y-f}{g}\right)+\left(Y\Delta\frac{1}{g}-\Delta\frac{f}{g}\right)\\ \quad+\left(Y\Delta^2\frac{1}{g}-\Delta^2\frac{f}{g}\right)\\ \quad+\Delta\frac{1}{g}\left[\Delta Y+\left(\frac{Y-f}{g}\right)Z\right]\end{array}\right\}$$

$$-(z-g)\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{g}\left[\Delta Y+\left(\frac{Y-f}{g}\right)Z\right]+\frac{\Delta^2 Y}{g}+\frac{Z\Delta Y}{g^2}\\ +\left(Y\Delta\frac{1}{g}-\Delta\frac{f}{g}\right)\frac{Z}{g}+\left(\frac{Y-f}{g^2}\right)\Delta Z\\ +\left(\frac{Y-f}{g^3}\right)Z^2.\end{array}\right\}\quad\text{(a)}$$

Vermittelst der angegebenen Verwechselungen erhält man hieraus unmittelbar:

$$x=X-z\left\{\begin{array}{l}\frac{X}{g}+X\Delta\frac{1}{g}+X\Delta^2\frac{1}{g}\\ \quad+\Delta\frac{1}{g}\left[\Delta X+\frac{XZ}{g}\right]\end{array}\right\}$$

$$-(z-g)\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{g}\left[\Delta X+\frac{XZ}{g}\right]+\frac{\Delta^2 X}{g}+\frac{Z\Delta X}{g^2}\\ \quad+\frac{XZ}{g}\Delta\frac{1}{g}+\frac{X}{g^2}\Delta Z+\frac{XZ^2}{g^3}.\end{array}\right\}\quad\text{(b)}$$

Schreibt man in diesen Formeln $g+(z-g)$ statt z, so können sie auch unter die Gestalt gebracht werden:

$$y=f-g\left\{\begin{array}{l}\left(Y\Delta\frac{1}{g}-\Delta\frac{f}{g}\right)\\ \quad+\left(Y\Delta^2\frac{1}{g}-\Delta^2\frac{f}{g}\right)\\ \quad+\Delta\frac{1}{g}\left[\Delta Y+\left(\frac{Y-f}{g}\right)Z\right]\end{array}\right\}\quad\text{(c)}$$

$$
\begin{aligned}
x = -g\Big\{ & X\Delta\tfrac{1}{g} + X\Delta^2\tfrac{1}{g} + \Delta\tfrac{1}{g}\Big[\Delta X + \tfrac{XZ}{g}\Big] \\
& -(z-g)\begin{cases}
\tfrac{X}{g} + X\Delta\tfrac{1}{g} + \tfrac{1}{g}\Big[\Delta X + \tfrac{XZ}{g}\Big] \\
+ X\Delta^2\tfrac{1}{g} + \Delta\tfrac{1}{g}\Big[\Delta X + \tfrac{XZ}{g}\Big] \\
+ \tfrac{\Delta^2 x}{g} + \tfrac{Z\Delta X}{g^2} + \tfrac{XZ}{g}\Delta\tfrac{1}{g} \\
+ \tfrac{X\Delta Z}{g^2} + \tfrac{XZ^2}{g^3}.
\end{cases}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& -(z-g)\begin{cases}
\left(\tfrac{Y-f}{g}\right) + \left(Y\Delta\tfrac{1}{g} - \Delta\tfrac{f}{g}\right) \\
+ \tfrac{1}{g}\Big[\Delta Y + \left(\tfrac{Y-f}{g}\right)Z\Big] \\
+ \left(Y\Delta^2\tfrac{1}{g} - \Delta^2\tfrac{f}{g}\right) \\
+ \Delta\tfrac{1}{g}\Big[\Delta Y + \left(\tfrac{Y-f}{g}\right)Z\Big] \\
+ \tfrac{\Delta^2 Y}{g} + \tfrac{Z\Delta Y}{g^2} + \left(Y\Delta\tfrac{1}{g} - \Delta\tfrac{f}{g}\right)\tfrac{Z}{g} \\
+ \left(\tfrac{Y-f}{g^2}\right)\Delta Z + \left(\tfrac{Y-f}{g^3}\right)Z^2
\end{cases} \qquad \text{(c)}
\end{aligned}
$$

Da die vorhergehenden Formeln sehr complicirt sind, so füge ich die folgende Bemerkung bei, welche dazu dient, sie bei den Anwendungen, welche man gewöhnlich davon macht, sehr zu vereinfachen.

Der Hauptzweck der analytischen Untersuchungen in der Optik ist nämlich, die Lage der gebrochenen Strahlen in der Gegend des letzten durch sie hervorgebrachten Bildes zu berechnen, um Mittel zu finden, die Deutlichkeit desselben so vollkommen als möglich zu machen. Nach Nro. 4. ist aber die jenem Bilde zugehörige Abscisse, wenn man nur die Gröfsen der ersten Ordnung berücksichtigt,

$$z_i = g_i.$$

Man kann folglich schliefsen, dafs in einer Entfernung von dem Bilde, welche die Abweichungen nicht übersteigt, $(z-g)_i$ eine Gröfse von der Ordnung dieser Abweichungen seyn mufs. Beschränkt man sich daher auf die Glieder der zweiten Ordnung, welches in den gewöhnlichen Fällen hinreicht, so kann man die Producte von $(z-g)$ in Gröfsen derselben Ordnung vernachlässigen.

Was die Glieder der dritten Ordnung betrifft, so werden sie nur bei der Theorie der achromatischen Objective gebraucht, wo sie beträchtliche Werthe erhalten. In diesem Falle ist ein Theil der Glieder, welche sich auf das Objectiv beziehen, mit der Vergröfserung multiplicirt, und hierdurch werden jene Glieder sehr bedeutend, so dafs man alle übrigen, bei welchen diefs nicht Statt findet, als zu einer höheren Ordnung gehörig betrachten kann. So sind die Glieder der zweiten Ordnung, welche von dem Objective herrühren und nicht mit der Vergröfserung multiplicirt sind, eben so wie diejenigen, welche den Ocularen zugehören, als Glieder der dritten Ordnung anzusehen. Bei der Berechnung der achromatischen Objective bestimmt man aber die willkürlichen Gröfsen, welche in den Ausdrücken der Abweichungen vorkommen, auf eine solche Art, dafs diese so vollkommen als möglich vernichtet werden, welches geschieht, wenn die Summe der correspondirenden Glieder der zweiten und dritten Ordnung verschwindet, die Glieder beider Ordnungen folglich gleich und entgegengesetzt werden, damit sie sich wechselseitig aufheben können. Hierdurch reduciren sich $\left(Y\Delta\frac{1}{g} - \Delta\frac{f}{g}\right)$ und $X\Delta\frac{1}{g}$, welche den Abweichungen entsprechen, auf Gröfsen von der Ordnung derjenigen, welche von den Ocularen herrühren, und

können daher in diesem Falle als Glieder der dritten Ordnung betrachtet werden; eben so $(z-g)$, welches immer von der Ordnung der Abweichungen ist, wenn man die Lage der Strahlen nur in der Nähe des letzten Bildes untersucht.

Aus dem Gesagten geht hervor, dafs es in den beiden angegebenen Fällen erlaubt ist, die Producte von $\Delta\frac{1}{g}$ und $(z-g)$ in Gröfsen der zweiten Ordnung zu vernachlässigen. Hierdurch werden die Formeln (c), wenn man sie auf die i^{te} Fläche bezieht,

$$\left.\begin{aligned} y_i &= f_i - g_i\left(Y\Delta\frac{1}{g} - \Delta\frac{f}{g}\right)_i \\ &\quad - g_i\left(Y\Delta^2\frac{1}{g} - \Delta^2\frac{f}{g}\right)_i \\ &\quad - (z-g)_i\left(\frac{Y-f}{g}\right)_i, \\ x_i &= -g_i X_i \Delta\frac{1}{g_i} - g_i X_i \Delta^2\frac{1}{g_i} \\ &\quad - (z-g)_i\frac{X_i}{g_i}. \end{aligned}\right\} \quad (d)$$

(Die Fortsetzung folgt.)

II.

Über die Integration der Differenzialgleichungen mehrerer Variablen der ersten Ordnung und des zweiten Grades;

von

Joseph L. Raabe.

(Beschlufs.)

---

§. 5.

Bei der in dem vorhergehenden Paragraphe aus einander gesetzten Transformationsmethode bleibt noch der Fall zu erörtern übrig, in welchem die Gleichungen (E) die Werthe von $\frac{dx_2}{dx_1}$, $\frac{dx_3}{dx_1}$, $\frac{dx_4}{dx_1}$, etc. unbestimmt lassen oder auf $\frac{0}{0}$ reduciren.

Tritt dieser Umstand ein, dann ist es gleich viel, welchen Functionen von x_1, x_2, x_3, x_4, etc. die Differenzialquotienten $\frac{dx_2}{dx_1}$, $\frac{dx_3}{dx_1}$, $\frac{dx_4}{dx_1}$, etc. gleich gesetzt werden, damit den Gleichungen (E) Genüge geschehe; dadurch werden die Werthe von x_2, x_3, x_4, etc., die durch die letzten Gleichungen des vorhergehenden Paragraphs völlig bestimmt waren, jetzt unbestimmt bleiben, so dafs man haben wird

$$\begin{aligned}
x_2 &= F_2(x_1, y_1, y_2, y_3, \ldots y_{n-1}),\\
x_3 &= F_3(x_1, y_1, y_2, y_3, \ldots y_{n-1}),\\
x_4 &= F_4(x_1, y_1, y_2, y_3, \ldots y_{n-1}),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
x_n &= F_n(x_1, y_1, y_2, y_3, \ldots y_{n-1}),
\end{aligned}$$

wo F_2, F_3, ... F_n willkürliche Functionen der Grössen $x_1, y_1, y_2, \ldots y_{n-1}$ seyn werden; es wird also

wegen des Statthabens der Gleichungen (E), wenn man aus diesen Gleichungen die Werthe von x_2, x_3, . . . x_n wie auch die Werthe ihrer Differenzialien in die Gleichung (A) substituirt, eine andere von der Form (B) zum Vorschein kommen müssen.

Der Theil rechter Hand des Gleichheitszeichens dieser Gleichung (B) kann nun der in ihm vorkommenden willkürlichen Functionen wegen, durch Bestimmung derselben, immer zu einem vollständigen Quadrate gemacht werden.

Denn damit der erwähnte Theil der Gleichung (B) ein Quadrat werde, ist es nöthig, dafs die Coefficienten B_1, B_2, etc., $B_{1,2}$, etc. ein System von $\frac{(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2}$ Bedingungsgleichungen von den Formen

$$B_{1,2}^2 - B_1 B_2 = 0,$$
$$B_{1,3}^2 - B_1 B_3 = 0,$$
. . . . . .
$$B_{2,3}^2 - B_2 B_3 = 0$$
. . . . . .

eingehen.

Diese Gleichungen werden die Variablen x_1, y_1, y_2, . . . y_{n-1} und eine unbestimmte Anzahl willkürlicher Constanten enthalten, die die willkürlichen Functionen F_2, F_3, . . . F_n mit sich führen können. Eliminirt man aus denselben, oder vielmehr denkt man sich aus denselben die n Gröfsen x_1, y_1, y_2, . . . y_{n-1} eliminirt, so bleibt noch eine Anzahl von

$$\frac{(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2} - n = \frac{n^2 - 5n + 2}{2}$$

Gleichungen, die blofs eine unbestimmte Anzahl willkürlicher Constanten enthalten, und denen, wie eine einfache Überlegung zeigt, immer Genüge geschehen kann.

Nachdem nun der zweite Theil der Gleichung (B)

ein vollständiges Quadrat ist, ziehe man beiderseits die zweite Wurzel aus, so wird man dann eine Gleichung von der Form

$$dx_1 = C_1\,dy_1 + C_2\,dy_2 + C_3\,dy_3 + \ldots + C_{n-1}\,dy_{n-1}$$

erhalten.

Substituirt man in diese Gleichung für $y_1, y_2, \ldots y_{n-1}$ ihre Werthe, durch $x_1, x_2, \ldots x_n$ ausgedrückt, zurück, so kann nur die vorgelegte Gleichung (A) zum Vorschein kommen; weil aber diese so eben gefundene Gleichung in Bezug auf ihre Differenzialien linear ist, so mufs die aus ihr durch Substitution erhaltene Gleichung (A) ebenfalls von linearer Form in Bezug auf die Differenzialien seyn.

Es erhellt also hieraus, dafs, wenn die Coefficienten A_1, A_2, A_3, etc., $A_{1,2}$, $A_{1,3}$, etc. der Gleichung (A) so beschaffen sind, dafs sie in den Gleichungen (E) die Werthe von $\frac{dx_2}{dx_1}$, $\frac{dx_3}{dx_1}$, $\frac{dx_4}{dx_1}$, etc. unbestimmt lassen, dieses ein sicheres Merkmal sey, dafs die Gleichung (A) einer linearen Form in Bezug auf ihre Differenzialien fähig ist, welches wir auch bei einer Differenzialgleichung von der Form (A) dreier Variablen im zweiten Paragraphe bestätigt gefunden haben.

Zweite Abtheilung.

Über die Reduction der Gleichung (B) in ein System von $n-1$ linearen Differenzialgleichungen mit $n-2$ neuen Variablen.

§. 6.

Um auch hier mit dem einfachsten Falle den Anfang zu machen, wollen wir zuerst zeigen, wie die Gleichung (7) in ein System zweier Gleichungen, die in Bezug auf

ihre Differenzialien linear sind und eine Variable mehr enthalten, reducirt werden könne.

Zu diesem Zwecke nehmen wir an, die beiden gesuchten linearen Differenzialgleichungen seyen von der Form

$$\left.\begin{aligned} 0 &= a_1 dy_1 + a_2 dy_2, \\ dx_1 &= b_1 dy_1 + b_2 dy_2, \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

wo a_1, a_2, b_1, b_2 einstweilen noch unbekannt sind.

Diese zwei Gleichungen müssen so beschaffen seyn, dafs durch irgend eine Verbindung derselben die Gleichung (7) zum Vorscheine komme. Die einfachste dieser Verbindungen wird wohl die seyn, dafs, wenn eine jede derselben quadrirt und dann ihre Summe genommen wird, die Gleichung (7) erhalten werde.

Führt man die angezeigte Operation aus, so erhält man

$$dx_1^2 = (a_1^2 + b_1^2)\, dy_1^2 + (a_2^2 + b_2^2)\, dy_2^2 + 2\,(a_1 a_2 + b_1 b_2)\, dy_1\, dy_2.$$

Soll nun diese Gleichung mit (7) identisch seyn, so mufs man haben

$$\left.\begin{aligned} a_1^2 + b_1^2 = B_1, \quad a_2^2 + b_2^2 = B_2, \\ a_1 a_2 + b_1 b_2 = B_{1,2}, \end{aligned}\right\} \quad . \quad (14)$$

Da man hier vier unbekannte Gröfsen a_1, a_2, b_1, b_2 und blofs drei Gleichungen hat, so sieht man, dafs eine dieser Gröfsen willkürlich bleibt, folglich werden die Gleichungen (13) blofs eine neue willkürliche oder variable Gröfse enthalten.

In den meisten Fällen wird man diese Gleichungen am bequemsten auf folgende Art auflösen:

Man setze nämlich zuerst

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= B_1^{\frac{1}{2}} \alpha_1, \quad b_1 = B_1^{\frac{1}{2}} \beta_1, \\ a_2 &= B_2^{\frac{1}{2}} \alpha_2, \quad b_2 = B_2^{\frac{1}{2}} \beta_2, \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

so gehen die Gleichungen (14) in folgende über:

$$\alpha_1^2 + \beta_1^2 = 1, \quad \alpha_2^2 + \beta_2^2 = 1,$$

$$\alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2 = \frac{B_{1,2}}{\sqrt{B_1 B_2}}.$$

Setzt man ferner

$$\alpha_1 = \cos. p_1, \quad \alpha_2 = \cos. p_2,$$

so geben die beiden ersten der vorhergehenden drei Gleichungen

$$\beta_1 = \sin. p_1, \quad \beta_2 = \sin. p_2,$$

und die dritte dieser Gleichungen gibt dann

$$\cos.(p_2 - p_1) = \frac{B_{1,2}}{\sqrt{B_1 B_2}}, \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

folglich

$$p_2 = p_1 + \text{arc. cos.} \frac{B_{1,2}}{\sqrt{B_1 B_2}}.$$

Man hat also

$$\cos. p_2 = \frac{B_{1,2} \cos. p_1 - \sqrt{B_1 B_2 - B_{1,2}^2} \sin. p_1}{\sqrt{B_1 B_2}},$$

$$\sin. p_2 = \frac{B_{1,2} \sin. p_1 + \sqrt{B_1 B_2 - B_{1,2}^2} \cos. p_1}{\sqrt{B_1 B_2}},$$

daher ist

$$\alpha_1 = \cos. p_1, \quad \alpha_2 = \frac{B_{1,2} \cos. p_1 - \sqrt{B_1 B_2 - B_{1,2}^2} \sin. p_1}{\sqrt{B_1 B_2}}$$

$$\beta_1 = \sin. p_1, \quad \beta_2 = \frac{B_{1,2} \sin. p_1 + \sqrt{B_1 B_2 - B_{1,2}^2} \cos. p_1}{\sqrt{B_1 B_2}}$$

Substituirt man diese Werthe in die Gleichungen (15), so gehen sie in folgende über:

$$a_1 = B_1^{\frac{1}{2}} \cos. p_1, \quad a_2 = \frac{B_{1,2} \cos. p_1 - \sqrt{B_1 B_2 - B_{1,2}^2} \sin. p_1}{B_1^{\frac{1}{2}}}$$

$$b_1 = B_1^{\frac{1}{2}} \sin. p_1, \quad b_2 = \frac{B_{1,2} \sin. p_1 + \sqrt{B_1 B_2 - B_{1,2}^2} \cos. p_1}{B_1^{\frac{1}{2}}}$$

Es gehen mithin die Gleichungen (13) in folgende über:

$$\left.\begin{aligned} 0 &= B_1 \cos.p_1\, dy_1 \\ &\quad + [B_{1,2} \cos.p_1 - \sqrt{B_1 B_2 - B_{1,2}^2}\, \sin.p_1]\, dy_2 \\ dx_1 &= \\ &= \frac{B_1 \sin.p_1 dy_1 + [B_{1,2} \sin.p_1 + \sqrt{B_1 B_2 - B_{1,2}^2}\, \cos.p_1] dy_2}{B_1^{\frac{1}{2}}} \end{aligned}\right\} (17)$$

welche zwei Gleichungen durch Elimination von p_1 die vorgelegte Differenzialgleichung (7) geben.

Der besondere Fall, den wir in §. 1. betrachtet haben, nämlich die gefundene Differenzialgleichung (b) daselbst, geht mit Hülfe der so eben aufgestellten Gleichungen in folgende swei über:

$$\left.\begin{aligned} 0 &= (1+y_1^2) \cos.p_1\, dy_1 \\ &\quad - (y_1 y_2 \cos.p_1 + \sqrt{1+y_1^2+y_2^2}\, \sin.p_1)\, dy_2 \\ \frac{a\, dx_1}{x_1^2 - a^2} &= \\ &= \frac{(1+y_1^2)\sin.p_1 dy_1 - (y_1 y_2 \sin.p_1 - \sqrt{1+y_1^2+y_2^2}\, \cos.p_1) dy_2}{\sqrt{1+y_1^2}\, \sqrt{1+y_1^2+y_2^2}} \end{aligned}\right\} (c)$$

Für den besondern Fall, wenn man $B_{1,2} = 0$ hat, lassen sich die Gleichungen (17) bedeutend vereinfachen, denn sie gehen dann in folgende über:

$$0 = B_1^{\frac{1}{2}} \cos.p_1\, dy_1 - B_2^{\frac{1}{2}} \sin.p_1\, dy_2,$$
$$dx_1 = B_1^{\frac{1}{2}} \sin.p_1\, dy_1 + B_2^{\frac{1}{2}} \cos.p_1\, dy_2.$$

Geht hier p_1 in $90^0 + p_1$ über, so hat man

$$\left.\begin{aligned} 0 &= B_1^{\frac{1}{2}} \sin.p_1\, dy_1 + B_2^{\frac{1}{2}} \cos.p_1\, dy_2, \\ dx_1 &= B_1^{\frac{1}{2}} \cos.p_1\, dy_1 - B_2^{\frac{1}{2}} \sin.p_1\, dy_2. \end{aligned}\right\} . \quad (18)$$

Finden aber folgende zwei Gleichungen

$$B_1 = 0, \quad B_2 = 0,$$

oder nur eine derselben Statt, so ersieht man aus der Gleichung (16), dafs man die Gleichungen (17) nicht

mehr erhalten kann. In diesem Falle ist es am bequemsten, aus den Gleichungen (14) drei der Gröfsen a_1, a_2, b_1, b_2 als Functionen der vierten zu bestimmen.

Nehmen wir z. B. an, es finden beide zuletzt aufgestellten Gleichungen Statt, so ist die zu reducirende Differenzialgleichung (7) von folgender Form:

$$dx_1^2 = 2B_{1,2}\, dy_1\, dy_2.$$

Die Gleichungen (14) geben dann

$$b_1 = a_1\sqrt{-1}, \quad b_2 = -\frac{B_{1,2}\sqrt{-1}}{2a_1}, \quad a_2 = \frac{B_{1,2}}{2a_1},$$

und die Gleichungen (13) gehen dann in folgende über:

$$0 = a_1\, dy_1 + \frac{B_{1,2}}{2a_1}\, dy_2,$$

$$dx_1 = \sqrt{-1}\left[a_1\, dy_1 - \frac{B_{1,2}}{2a_1}\, dy_2\right].$$

Hier ist also a_1 die neu eingeführte Variable, und wenn diese aus den letzten Gleichungen eliminirt wird, erhält man die vorgelegte.

§. 7.

Die Rechnung wird bedeutend vereinfacht, wenn die vorgelegte Differenzialgleichung (7) so beschaffen ist, dafs der Theil rechts derselben die Variable x_1 oder irgend eine Function derselben nur als gemeinschaftlichen Factor enthält. In der That, denkt man sich dann eine der Variablen y_1, y_2, z. B. y_2 als Function von y_1 und einer neuen Variablen z_1, so hat man durch Differenziation

$$dy_2 = \frac{dy_2}{dy_1}\, dy_1 + \frac{dy_2}{dz_1}\, dz_1.$$

Substituirt man diesen Werth von dy_2 in die Gleichung (7), so nimmt sie folgende Form an:

$$dx_1^2 = \left[B_1 + 2B_{1,2}\frac{dy_2}{dy_1} + B_2\left(\frac{dy_2}{dy_1}\right)^2\right]dy_1^2 + B_2\,dz_1^2 + 2\frac{dy_2}{dz_1}\left(B_{1,2} + B_2\frac{dy_2}{dy_1}\right)dy_1\,dz_1.$$

Wählt man nun die Abhängigkeit der Gröfse y_2 von y_1, z_1 dergestalt, dafs der Coefficient von $dy_1\,dz_1$ in der letzten Gleichung verschwindet, so mufs man folgende identische Gleichung haben:

$$0 = B_{1,2} + B_2\frac{dy_2}{dy_1}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

Da nun diese Gleichung vermöge der Annahme, dafs der Theil rechts der Gleichung (7) die Variable x_1 nur als gemeinschaftlichen Factor enthalte, von x_1 befreiet seyn wird, so enthält sie blofs die zwei Veränderlichen y_1, y_2, und gibt durch Integration

$$y_2 = \psi_2(y_1, z_1),$$

wo ψ_2 eine bekannte Function, und z_1 die willkürliche Constante der Integration vorstellt.

Wenn nun dieser Werth von y_2 wie auch der von dy_2 unter der Annahme, dafs z_1 ebenfalls variabel ist, in die Gleichung (7) gesetzt wird, so nimmt sie folgende Form an:

$$dx_1^2 = Y_1\,dy_1^2 + Z_1\,dz_1^2, \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

wo Y_1, Z_1 leicht zu bestimmende Gröfsen seyn werden.

Nach den Gleichungen (18) des vorhergehenden Paragraphs zerfällt diese Gleichung in folgende zwei:

$$0 = Y_1^{\frac{1}{2}}\sin.p_1\,dy_1 + Z_1^{\frac{1}{2}}\cos.p_1\,dz_1,$$

$$dx_1 = Y_1^{\frac{1}{2}}\cos.p_1\,dy_1 - Z_1^{\frac{1}{2}}\sin.p_1\,dz_1.$$

Wie die Gleichung (19) zeigt, wird die so eben vorgetragene Vereinfachung auch dann eintreten, wenn entweder $B_{1,2}$, B_2 oder $B_{1,2}$, B_1 die Variable x_1 blofs als gemeinschaftlichen Factor enthalten; im letztern

Falle wird man blofs y_1 als Function von y_2 und einer neuen Variablen z_1 annehmen müssen.

Das in §. 1. gerechnete Beispiel, oder die Gleichung (b) daselbst, kann dieser Vereinfachung theilhaftig werden, und die Gleichung (19) geht für dasselbe in folgende über:

$$0 = \frac{-y_1 y_2 (x_1^2 - a^2)^2}{a^2 (1 + y_1^2 + y_2^2)} + \frac{(1 + y_1^2)(x_1^2 - a^2)^2}{a^2 (1 + y_1^2 + y_2^2)} \frac{dy_2}{dy_1},$$

oder, wenn man den gemeinschaftlichen Factor wegläfst,

$$\frac{dy_2}{y_2} = \frac{y_1 \, dy_1}{1 + y_1^2}.$$

Diese Gleichung integrirt, gibt

$$y_2 = z_1 \sqrt{1 + y_1^2},$$

die Gleichung (20) geht daher in folgende über:

$$dx_1^2 = \frac{(x_1^2 - a^2)^2}{a^2} \left[\frac{dy_1^2}{1 + y_1^2} + \frac{1 + y_1^2}{1 + z_1^2} \, dz_1^2 \right],$$

und die Gleichungen (18) sind dann:

$$\left.\begin{aligned} 0 &= \frac{\sin. p_1}{\sqrt{1 + y_1^2}} dy_1 + \frac{\sqrt{1 + y_1^2}}{\sqrt{1 + z_1^2}} \cos. p_1 \, dz_1, \\ dx_1 &= \frac{x_1^2 - a^2}{a} \left[\frac{\cos. p_1}{\sqrt{1 + y_1^2}} dy_1 - \frac{\sqrt{1 + y_1^2}}{\sqrt{1 + z_1^2}} \sin. p_1 \, dz_1 \right] \end{aligned}\right\} \quad (d)$$

§. 8.

Es sey ferner die Gleichung (12) in folgende drei lineare Differenzialgleichungen aufgelöst:

$$\left.\begin{aligned} 0 &= a_1 \, dy_1 + a_2 \, dy_2, \\ 0 &= b_1 \, dy_1 + b_2 \, dy_2 + b_3 \, dy_3, \\ dx_1 &= c_1 \, dy_1 + c_2 \, dy_3 + c_3 \, dy_3, \end{aligned}\right\} \quad (21)$$

wo a_1, a_2, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3 einstweilen noch unbekannt sind.

Werden diese sämmtlichen Gleichungen quadrirt und dann ihre Summen genommen, so hat man

$$dx_r^2 = (a_1^2 + b_1^2 + c_1^2)\,dy_1^2 + (a_2^2 + b_2^2 + c_2^2)\,dy_2^2 + (b_3^2 + c_3^2)\,dy_3^2$$
$$+ 2\,[(a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2)\,dy_1\,dy_2 + (b_1 b_3 + c_1 c_3)\,dy_1\,dy_3]$$
$$+ 2\,(b_2 b_3 + c_2 c_3)\,dy_2\,dy_3 .$$

Nun soll diese Gleichung mit der Gleichung (12) identisch seyn, daher müssen folgende Gleichungen bestehen:

$$\left.\begin{aligned} a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 &= B_1, \\ a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 &= B_2, \\ b_3^2 + c_3^2 &= B_3, \\ a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 &= B_{1,2}, \\ b_1 b_3 + c_1 c_3 &= B_{1,3}, \\ b_2 b_3 + c_2 c_3 &= B_{2,3}. \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (22)$$

Da man hier sechs Gleichungen und acht unbekannte Gröfsen a_1, b_1, etc. hat, so sieht man, dafs zwei dieser Gröfsen noch willkürlich oder variabel bleiben.

Ist keiner der Coefficienten B_1, B_2, B_3 gleich Null, so lassen sich die Gleichungen (22) am bequemsten auf folgende Weise behandeln:

Man setze nämlich zuerst

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= B_1^{\frac{1}{2}}\alpha_1, & b_1 &= B_1^{\frac{1}{2}}\beta_1, & c_1 &= B_1^{\frac{1}{2}}\gamma_1, \\ a_2 &= B_2^{\frac{1}{2}}\alpha_2, & b_2 &= B_2^{\frac{1}{2}}\beta_2, & c_2 &= B_2^{\frac{1}{2}}\gamma_2, \\ & & b_3 &= B_3^{\frac{1}{2}}\beta_3, & c_3 &= B_3^{\frac{1}{2}}\gamma_3, \end{aligned}\right\} \quad (23)$$

so gehen die Gleichungen (22) in folgende über:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 &= 1, \\ \alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2 &= 1, \\ \beta_3^2 + \gamma_3^2 &= 1, \\ \alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2 + \gamma_1 \gamma_2 &= \frac{B_{1,2}}{\sqrt{B_1 B_2}}, \end{aligned}\right.$$

$$\beta_1\beta_3 + \gamma_1\gamma_3 = \frac{B_{1,3}}{\sqrt{B_1 B_3}},$$

$$\beta_2\beta_3 + \gamma_2\gamma_3 = \frac{B_{2,3}}{\sqrt{B_2 B_3}}.$$

Um diese sechs Gleichungen bequemer aufzulösen, setze man

$$\alpha_1 = \cos.p_1, \quad \beta_1 = \sin.p_1 \cos.q_1,$$
$$\alpha_2 = \cos.p_2, \quad \beta_2 = \sin.p_2 \cos.q_2,$$
$$\beta_3 = \cos.p_3,$$

so folgt aus den drei ersten der vorigen sechs Gleichungen

$$\gamma_1 = \sin.p_1 \sin.q_1, \quad \gamma_2 = \sin.p_2 \sin.q_2, \quad \gamma_3 = \sin.p_3,$$

und die drei letzten derselben Gleichungen geben

$$\left.\begin{aligned} \cos.p_1 \cos.p_2 + \sin.p_1 \sin.p_2 \cos.(q_1 - q_2) &= \frac{B_{1,2}}{\sqrt{B_1 B_2}} \\ \sin.p_1 \cos.(p_3 - q_1) &= \frac{B_{1,3}}{\sqrt{B_1 B_3}} \\ \sin.p_2 \cos.(p_3 - q_2) &= \frac{B_{2,3}}{\sqrt{B_2 B_3}} \end{aligned}\right\} (24)$$

Aus diesen drei Gleichungen kann man immer drei der Gröfsen p_1, p_2, p_3, q_1, q_2 als Functionen der beiden andern, und der Coefficienten B_1, B_2, etc. bestimmen. Am bequemsten ist es, die letzten drei Gröfsen als Functionen der beiden ersten auszudrücken, welches man mit Hülfe algebraischer Gleichungen des zweiten Grades immer ausführen kann.

Hat man nun p_3, q_1, q_2 als Functionen von p_1, p_2, B_1, B_2, etc. bestimmt, so kann man mit Hülfe der vorhergehenden Gleichungen α_1, β_1, γ_1, α_2, etc. ebenfalls als Functionen dieser Gröfsen ausdrücken, und daher vermöge der Gleichungen (23) hat man auch a_1, b_1, c_1, a_2, etc. als bekannte Functionen von x_1, y_1, y_2, y_3, p_1, p_2. Substituirt man nun diese Werthe in die Gleichungen (21), so hat man die Differenzialgleichung (12)

in ein System dreier linearer Differenzialgleichungen erster Ordnung aufgelöst.

Sind aber einer oder der andere der Coefficienten B_1, B_2, B_3 gleich Null, dann mufs man aus den Gleichungen (22) selbst sechs der Gröfsen a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, b_3, c_3 als Functionen der beiden andern und der Coefficienten $B_{1,2}$, $B_{1,3}$, $B_{2,3}$ ausmitteln.

Für den besondern Fall hingegen, wenn in der Differenzialgleichung (12) die Coefficienten $B_{1,2}$, $B_{1,3}$, $B_{2,3}$ fehlen, gehen die Gleichungen (24) in folgende über:

$$\begin{aligned} \cos.p_1 \cos.p_2 + \sin.p_1 \sin.p_2 \cos.(q_1 - q_2) &= 0, \\ \sin.p_1 \cos.(p_3 - q_1) &= 0, \\ \sin.p_2 \cos.(p_3 - q_2) &= 0. \end{aligned}$$

Aus den beiden letzten dieser Gleichungen erhält man

$$\cos.(p_3 - q_1) = 0, \quad \cos.(p_3 - q_2) = 0,$$

folglich

$$q_1 = \frac{\pi}{2} + p_3, \quad q_2 = \frac{\pi}{2} + p_3,$$

wo π die halbe Peripherie des Kreises für den Halbmesser 1 vorstellt. Die erste derselben drei Gleichungen gibt dann

$$\cos.(p_1 - p_2) = 0 \quad \text{oder} \quad p_2 = \frac{\pi}{2} + p_1,$$

man hat also für den gegenwärtigen Fall

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \cos.p_1, & \beta_1 &= -\sin.p_1 \sin.p_3, & \gamma_1 &= \sin.p_1 \cos.p_3, \\ \alpha_2 &= -\sin.p_1, & \beta_2 &= -\cos.p_1 \sin.p_3, & \gamma_2 &= \cos.p_1 \cos.p_3, \\ & & \beta_3 &= \cos.p_3, & \gamma_3 &= \sin.p_3. \end{aligned}$$

Substituirt man diese Werthe in die Gleichungen (23), so hat man

$$\begin{aligned} a_1 &= B_1^{\frac{1}{2}} \cos.p_1, & a_2 &= -B_2^{\frac{1}{2}} \sin.p_1, \\ b_1 &= -B_1^{\frac{1}{2}} \sin.p_1 \sin.p_3, & b_2 &= -B_2^{\frac{1}{2}} \cos.p_1 \sin.p_3, \\ & & b_3 &= B_3^{\frac{1}{2}} \cos.p_3, \end{aligned}$$

$$c_1 = B_1^{\frac{1}{2}} \sin. p_1 \cos. p_3, \quad c_2 = B_2^{\frac{1}{2}} \cos. p_1 \cos. p_3,$$
$$c_3 = B_3^{\frac{1}{2}} \sin. p_3.$$

Setzt man in diesen Gleichungen statt p_1, $180^0 - p_1$, und statt p_3, $90^0 - q_1$, und substituirt die erhaltenen Resultate in die Gleichungen (21), so gehen sie in folgende über:

$$\left.\begin{aligned} 0 &= B_1^{\frac{1}{2}} \cos. p_1 \, dy_1 + B_2^{\frac{1}{2}} \sin, p_1 \, dy_2, \\ 0 &= B_1^{\frac{1}{2}} \sin. p_1 \cos. q_1 \, dy_1 - B_2^{\frac{1}{2}} \cos. p_1 \cos. q_1 \, dy_2 \\ &\quad - B_3^{\frac{1}{2}} \sin. q_1 \, dy_3, \\ dx_1 &= B_1^{\frac{1}{2}} \sin. p_1 \sin. q_1 \, dy_1 - B_2^{\frac{1}{2}} \cos. p_1 \sin. q_1 \, dy_2 \\ &\quad + B_3^{\frac{1}{2}} \cos. q_1 \, dy_3. \end{aligned}\right\} (25)$$

§. 9.

Wenn die in dem vorhergehenden Paragraphe behandelte Differenzialgleichung (12) so beschaffen ist, dafs der Theil rechts derselben die Variable x_1 oder irgend eine Function derselben blofs als gemeinschaftlichen Factor enthält, dann kann man sie in eine andere transformiren, die bedeutend einfacher ist. In der That, denkt man sich unter dieser Voraussetzung zwei der Variablen y_1, y_2, y_3, z. B. die beiden letztern als noch unbekannte Functionen der erstern und zwei neuer Veränderlichen z_1, z_2 ausgedrückt, so hat man durch's Differenziren:

$$\left.\begin{aligned} dy_2 &= \frac{dy_2}{dy_1} dy_1 + \frac{dy_2}{dz_1} dz_1 + \frac{dy_2}{dz_2} dz_2, \\ dy_3 &= \frac{dy_3}{dy_1} dy_1 + \frac{dy_3}{dz_1} dz_1 + \frac{dy_3}{dz_2} dz_2. \end{aligned}\right\} (26)$$

Substituirt man diese Werthe von dy_2, dy_3 in die Gleichung (14), so nimmt sie folgende Form an:

$$dx_1^2 = Y_1 dy_1^2 + Z_1 dz_1^2 + Z_2 dz_2^2 + 2(Y_{1,1} dy_1 dz_1 + Y_{1,2} dy_1 dz_2) + 2 Z_{1,2} dz_1 dz_2,$$

in welcher die Coefficienten leicht darzustellen sind.

Da nun die Abhängigkeit der Variablen y_2, y_3 von y_1, z_1, z_2 einstweilen noch willkürlich war, so wollen wir nun dergestalt darüber verfügen, dafs die Coefficienten von $dy_1 dz_1$, $dy_1 dz_2$ in der letzten Gleichung verschwinden.

Hierdurch erhält man

$$Y_{1,1} = 0, \quad Y_{1,2} = 0,$$

oder wenn die Werthe der Theile links gesetzt werden:

$$0 = \frac{dy_2}{dz_1}\left(B_{1,2} + B_2 \frac{dy_2}{dy_1} + B_{2,3} \frac{dy_3}{dy_1}\right) + \frac{dy_3}{dz_1}\left(B_{1,3} + B_{2,3} \frac{dy_2}{dy_1} + B_3 \frac{dy_3}{dy_1}\right),$$

$$0 = \frac{dy_2}{dz_2}\left(B_{1,2} + B_2 \frac{dy_2}{dy_1} + B_{2,3} \frac{dy_3}{dy_1}\right) + \frac{dy_3}{dz_2}\left(B_{1,3} + B_{2,3} \frac{dy_2}{dy_1} + B_3 \frac{dy_3}{dy_1}\right).$$

Sollen diese Gleichungen Statt haben, z_1, z_2 mögen constant oder variabel seyn, so müssen folgende zwei Gleichungen bestehen:

$$\left.\begin{aligned} 0 &= B_{1,2} + B_2 \frac{dy_2}{dy_1} + B_{2,3} \frac{dy_3}{dy_1}, \\ 0 &= B_{1,3} + B_{2,3} \frac{dy_2}{dy_1} + B_3 \frac{dy_3}{dy_1}. \end{aligned}\right\} \quad (27)$$

Vermöge der Annahme, dafs in der Gleichung (12) der Theil rechts die Variable x_1 nur als gemeinschaftlichen Factor enthalte, werden die letzten Gleichungen von x_1 befreiet seyn. Sucht man nun aus denselben die Werthe von $\frac{dy_2}{dy_1}$, $\frac{dy_3}{dy_1}$, und substituirt sie in die Gleichungen (26), wenn man nämlich z_1, z_2 als constant

betrachtet, so kann man dadurch diese beiden Differenzialgleichungen integriren, und man wird erhalten

$$y_2 = \psi_2(y_1, z_1, z_2),$$
$$y_3 = \psi_3(y_1, z_1, z_2),$$

wo ψ_2, ψ_3 bekannte Functionen, und z_1, z_2 die willkürlichen Constanten der Integrationen vorstellen.

Substituirt man diese Werthe von y_2, y_3 unter der Annahme, dafs z_1, z_2 Variable sind, in die Gleichung (12), so nimmt sie folgende Form an:

$$dx_1^2 = Y_1\,dy_1^2 + Z_1\,dz_1^2 + Z_2\,dz_2^2 + 2Z_{1,2}\,dz_1\,dz_2 \quad . \quad (28)$$

In dem Falle endlich, wenn diese letzte Gleichung so beschaffen ist, dafs entweder Z_1 und $Z_{1,2}$ oder Z_2 und $Z_{1,2}$ die Variablen x_1, y_1 oder irgend eine Function derselben nur als gemeinschaftlichen Factor enthalten, kann man durch eine ähnliche Betrachtung, wie im §. 7., dieser Gleichung folgende Form geben:

$$dx_1^2 = Y_1\,dy_1^2 + Z_1\,dz_1^2 + U_1\,du_1^2 \quad . \quad (29)$$

Wendet man das hier aus einander gesetzte Verfahren auf unsern besondern Fall im §. 3. oder auf die Gleichung (b′) an, so gehen die Gleichungen (27) in folgende über:

$$0 = y_1y_2 - (1 + y_1^2 + y_3^2)\frac{dy_2}{dy_1} + y_2y_3\frac{dy_3}{dy_1},$$
$$0 = y_1y_3 + y_2y_3\frac{dy_2}{dy_1} - (1 + y_1^2 + y_2^2)\frac{dy_3}{dy_1}.$$

Hieraus findet man

$$\frac{dy_2}{y_2} = \frac{y_1\,dy_1}{1+y_1^2},$$
$$\frac{dy_3}{y_3} = \frac{y_1\,dy_1}{1+y_1^2},$$

und integrirt

$$y_2 = z_1\sqrt{1+y_1^2},$$
$$y_3 = z_2\sqrt{1+y_1^2},$$

die Gleichung (28) ist daher im vorliegenden Falle folgende:

$$dx_1^2 = \frac{(x_1^2-a^2)^2}{a^2}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{dy_1^2}{1+y_1^2}+\dfrac{(1+y_1^2)(1+z_2^2)}{1+z_1^2+z_2^2}\,dz_1^2\\ \qquad+\dfrac{(1+y_1^2)(1+z_1^2)}{1+z_1^2+z_2^2}\,dz_2^2\\ \qquad-\dfrac{2z_1z_2(1+y_1^2)}{1+z_1^2+z_2^2}\,dz_1\,dz_2.\end{array}\right\}$$

Setzt man ferner in dieser Gleichung

$$z_2 = u_1\sqrt{1+z_1^2},$$

so nimmt sie die Form von (29) an, und zwar hat man

$$dx_1^2 = \frac{(x_1^2-a^2)^2}{a^2}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{dy_1^2}{1+y_1^2}\\ +(1+y_1^2)\left[\dfrac{dz_1^2}{1+z_1^2}+\dfrac{1+z_1^2}{1+u_1^2}\,du_1^2\right]\end{array}\right\} \quad (c')$$

Mit Hülfe der Gleichungen (25) zerfällt diese Gleichung in folgende drei lineare:

$$0 = \frac{\cos.p_1}{\sqrt{1+y_1^2}}\,dy_1 + \frac{\sin.p_1\sqrt{1+y_1^2}}{\sqrt{1+z_1^2}}\,dz_1,$$

$$0 = \frac{\sin.p_1\cos.q_1}{\sqrt{1+y_1^2}}\,dy_1 - \frac{\cos.p_1\cos.q_1\sqrt{1+y_1^2}}{\sqrt{1+z_1^2}}\,dz_1 - \frac{\sin.q_1\sqrt{1+y_1^2}\sqrt{1+z_1^2}}{\sqrt{1+u_1^2}}\,du_1,$$

$$dx_1 = \frac{x_1^2-a^2}{a}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\sin.p_1\sin.q_1}{\sqrt{1+y_1^2}}\,dy_1-\dfrac{\cos.p_1\sin.q_1\sqrt{1+y_1^2}}{\sqrt{1+z_1^2}}\,dz_1\\ \qquad+\dfrac{\cos.q_1\sqrt{1+y_1^2}\sqrt{1+z_1^2}}{\sqrt{1+u_1^2}}\,du_1\end{array}\right\}$$

Eliminirt man aus denselben p_1, q_1, so kommt die Differenzialgleichung (c′) zum Vorscheine.

§. 10.

Wir wollen nun auf gleiche Weise, wie in den §§. 6., 8., eine Differenzialgleichung von fünf Variablen

der Form

$$\left.\begin{aligned} dx_1^2 = {} & B_1\,dy_1^2 + B_2\,dy_2^2 + B_3\,dy_3^2 + B_4\,dy_4^2 \\ & + 2(B_{1,2}\,dy_1dy_2 + B_{1,3}\,dy_1dy_3 + B_{1,4}\,dy_2dy_4) \\ & + 2(B_{2,3}\,dy_2dy_3 + B_{2,4}\,dy_2dy_4) \\ & + 2\,B_{3,4}\,dy_3dy_4 \end{aligned}\right\} \quad (30)$$

in ein System von vier linearen Differenzialgleichungen mit drei neuen Variablen reduciren.

Es seyen

$$\left.\begin{aligned} 0 &= a_1\,dy_1 + a_2\,dy_2 \\ 0 &= b_1\,dy_1 + b_2\,dy_2 + b_3\,dy_3 \\ 0 &= c_1\,dy_1 + c_2\,dy_2 + c_3\,dy_3 + c_4\,dy_4 \\ dx_1 &= e_1\,dy_1 + e_2\,dy_2 + e_3\,dy_3 + e_4\,dy_4 \end{aligned}\right\} \quad (31)$$

die vier verlangten linearen Differenzialgleichungen, so erhält man, wenn sie quadrirt und addirt werden, durch Vergleichung mit der Gleichung (30) folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 + e_1^2 &= B_1, \\ a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 + e_2^2 &= B_2, \\ b_3^2 + c_3^2 + e_3^2 &= B_3, \\ c_4^2 + e_4^2 &= B_4, \\ a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 + e_1e_2 &= B_{1,2}, \\ b_1b_3 + c_1c_3 + e_1e_3 &= B_{1,3}, \\ c_1c_4 + e_1e_4 &= B_{1,4}, \\ b_2b_3 + c_2c_3 + e_2e_3 &= B_{2,3}, \\ c_2c_4 + e_2e_4 &= B_{2,4}, \\ c_3c_4 + e_3e_4 &= B_{3,4}. \end{aligned}$$

Da wir hier zehn Gleichungen und dreizehn unbekannte Gröfsen a_1, a_2, b_1, b_2, b_3, etc. haben, so sieht man, dafs die Gleichungen (31) blofs drei von x_1, y_1, y_2, y_3, y_4 verschiedene Gröfsen enthalten werden. Um in den Fällen, wenn keiner der Coefficienten B_1, B_2, B_3, B_4 gleich Null ist, sich die Rechnung zu erleichtern, setze man zuerst folgende Gleichungen fest:

$$\left.\begin{aligned}
a_1 &= B_1^{\frac{1}{2}}\alpha_1, \quad b_1 = B_1^{\frac{1}{2}}\beta_1, \quad c_1 = B_1^{\frac{1}{2}}\gamma_1,\\
&\qquad\qquad\qquad\quad e_1 = B_1^{\frac{1}{2}}\varepsilon_1,\\
a_2 &= B_2^{\frac{1}{2}}\alpha_2, \quad b_2 = B_2^{\frac{1}{2}}\beta_2, \quad c_2 = B_2^{\frac{1}{2}}\gamma_2,\\
&\qquad\qquad\qquad\quad e_2 = B_2^{\frac{1}{2}}\varepsilon_2,\\
&\qquad\quad b_3 = B_3^{\frac{1}{2}}\beta_3, \quad c_3 = B_3^{\frac{1}{2}}\gamma_3,\\
&\qquad\qquad\qquad\quad e_3 = B_3^{\frac{1}{2}}\varepsilon_3,\\
&\qquad\qquad\qquad\quad c_4 = B_4^{\frac{1}{2}}\gamma_4,\\
&\qquad\qquad\qquad\quad e_4 = B_4^{\frac{1}{2}}\varepsilon_4,
\end{aligned}\right\} \quad (32)$$

wodurch die vorhergehenden Gleichungen in folgende übergehen:

$$\begin{aligned}
\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 + \varepsilon_1^2 &= 1,\\
\alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2 + \varepsilon_2^2 &= 1,\\
\beta_3^2 + \gamma_3^2 + \varepsilon_3^2 &= 1,\\
\gamma_4^2 + \varepsilon_4^2 &= 1,\\
\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2 + \varepsilon_1\varepsilon_2 &= \frac{B_{1,2}}{\sqrt{B_1 B_2}},\\
\beta_1\beta_3 + \gamma_1\gamma_3 + \varepsilon_1\varepsilon_3 &= \frac{B_{1,3}}{\sqrt{B_1 B_3}},\\
\gamma_1\gamma_4 + \varepsilon_1\varepsilon_4 &= \frac{B_{1,4}}{\sqrt{B_1 B_4}},\\
\beta_2\beta_3 + \gamma_2\gamma_3 + \varepsilon_2\varepsilon_3 &= \frac{B_{2,3}}{\sqrt{B_2 B_3}},\\
\gamma_2\gamma_4 + \varepsilon_2\varepsilon_4 &= \frac{B_{2,4}}{\sqrt{B_2 B_4}},\\
\gamma_3\gamma_4 + \varepsilon_3\varepsilon_4 &= \frac{B_{3,4}}{\sqrt{B_3 B_4}}.
\end{aligned}$$

Setzt man, um diese Gleichungen bequemer auflösen zu können,

$$\alpha_1 = \cos.p_1,\quad \beta_1 = \sin.p_1\cos.q_1,\quad \gamma_1 = \sin.p_1\sin.q_1\cos.r_1,$$
$$\alpha_2 = \cos.p_2,\quad \beta_2 = \sin.p_2\cos.q_2,\quad \gamma_2 = \sin.p_2\sin.q_2\cos.r_2,$$
$$\beta_3 = \cos.p_3,\quad \gamma_3 = \sin.p_3\cos.q_3,$$
$$\gamma_4 = \cos.p_4,$$

so geben die vier ersten der vorhergehenden Gleichungen

$$\varepsilon_1 = \sin.p_1\sin.q_1\sin.r_1,$$
$$\varepsilon_2 = \sin.p_2\sin.q_2\sin.r_2,$$
$$\varepsilon_3 = \sin.p_3\sin.q_3,$$
$$\varepsilon_4 = \sin.p_4,$$

und die sechs letzten derselben Gleichungen gehen in folgende über:

$$\cos.p_1\cos.p_2 + \sin.p_1\sin.p_2\,[\cos.q_1\cos.q_2 + \sin.q_1\sin.q_2\cos.(r_2 - r_1)] = \frac{B_{1,2}}{\sqrt{B_1 B_2}}$$

$$\sin.p_1\,[\cos.p_3\cos.q_1 + \sin p_3\sin.q_1\cos.(q_3 - r_1)] = \frac{B_{1,3}}{\sqrt{B_1 B_3}}$$

$$\sin.p_1\sin.q_1\cos.(p_4 - r_1) = \frac{B_{1,4}}{\sqrt{B_1 B_4}}$$

$$\sin.p_2\,[\cos.p_3\cos.q_2 + \sin.p_3\sin.q_2\cos.(q_3 - r_2)] = \frac{B_{2,3}}{\sqrt{B_2 B_3}}$$

$$\sin.p_2\sin.q_2\cos.(p_4 - r_2) = \frac{B_{2,4}}{\sqrt{B_2 B_4}}$$

$$\sin.p_3\cos.(p_4 - q_3) = \frac{B_{3,4}}{\sqrt{B_3 B_4}}$$

Drückt man nun aus diesen sechs Gleichungen sechs der Gröfsen p_1, p_2, p_3, p_4, q_1, q_2, q_3, r_1, r_2 als Functionen der drei übrigen aus, so sind, wenn man diese drei noch übrig bleibenden oder willkürlichen Gröfsen durch p_1, q_1, r_1 bezeichnet, sämmtliche Grössen α_1, α_2, α_3, etc. als Functionen von p_1, q_1, r_1 und x_1, y_1, y_2, y_3, y_4 gegeben.

Man findet dann mit Hülfe der Gleichungen (32) die Coefficienten a_1, a_2, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3, c_4, e_1, e_2,

e_3, e_4 ebenfalls als Functionen derselben Gröfsen, welche dann, in die Gleichungen (31) substituirt, die verlangten vier linearen Differenzialgleichungen mit den drei neuen Variablen darbieten.

Enthält aber die vorgelegte Differenzialgleichung (30) blofs die zweiten Potenzen der Differenzialien der Variablen, dann gehen die vorhergehenden Gleichungen in folgende über:

$$\begin{aligned}
\cos.p_1\cos.p_2 + \sin.p_1\sin.p_2[\cos.q_1\cos.q_2 \\
+ \sin.q_1\sin.q_2\cos.(r_2 - r_1)] &= 0, \\
\sin.p_1[\cos.p_3\cos.q_1 + \sin.p_3\sin q_1\cos.(q_3 - r_1)] &= 0, \\
\sin.p_1\sin.q_1\cos.(p_4 - r_1) &= 0, \\
\sin.p_2[\cos.p_3\cos.q_2 + \sin.p_3\sin.q_2\cos.(q_3 - r_2)] &= 0, \\
\sin.p_2\sin.q_2\cos.(p_4 - r_2) &= 0, \\
\sin.p_3\cos.(p_4 - q_3) &= 0.
\end{aligned}$$

Die dritte, fünfte und sechste dieser Gleichungen geben

$$r_1 = \frac{\pi}{2} + p_4,$$

$$r_2 = \frac{\pi}{2} + p_4,$$

$$q_3 = \frac{\pi}{2} + p_4,$$

und die drei übrigen derselben Gleichungen gehen daher in folgende über:

$$\begin{aligned}
\cos.p_1\cos.p_2 + \sin.p_1\sin.p_2\cos.(q_1 - q_2) &= 0, \\
\sin.p_1\cos.(q_1 - p_3) &= 0, \\
\sin.p_2\cos.(q_2 - p_3) &= 0.
\end{aligned}$$

Die zwei letzten dieser Gleichungen geben

$$q_1 = \frac{\pi}{2} + p_3,$$

$$q_2 = \frac{\pi}{2} + p_3,$$

und die erste derselben gibt daher

$$\cos.(p_1 - p_2) = 0$$

oder

$$p_1 = \frac{\pi}{2} + p_2.$$

Man hat also

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= -\sin.p_2, & \beta_1 &= -\cos.p_2 \sin.p_3, \\
& & \gamma_1 &= -\cos.p_2 \cos.p_3 \sin.p_4, \\
& & \varepsilon_1 &= \cos.p_2 \cos.p_3 \cos.p_4, \\
\alpha_2 &= \cos.p_2, & \beta_2 &= -\sin.p_2 \sin.p_3, \\
& & \gamma_2 &= -\sin.p_2 \cos.p_3 \sin.p_4, \\
& & \varepsilon_2 &= \sin.p_2 \cos.p_3 \cos.p_4, \\
& & \beta_2 &= \cos.p_3, \\
& & \gamma_3 &= -\sin.p_3 \sin.p_4, \\
& & \varepsilon_3 &= \sin.p_3 \cos.p_4, \\
& & \gamma_4 &= \cos.p_4, \\
& & \varepsilon_4 &= \sin.p_4.
\end{aligned}$$

Setzt man hier statt p_2, $180^0 - p_1$, statt p_3, $90^0 + q_1$, statt p_4, $90^0 + r_1$, und berücksichtiget man die Gleichungen (32), so gehen die Gleichungen (31) in folgende über:

$$\begin{aligned}
0 &= B_1^{\frac{1}{2}} \sin.p_1 \, dy_1 \\
&\quad + B_2^{\frac{1}{2}} \cos.p_1 \, dy_2, \\
0 &= B_1^{\frac{1}{2}} \cos.p_1 \cos.q_1 \, dy_1 \\
&\quad - B_2^{\frac{1}{2}} \sin.p_1 \cos.q_1 \, dy_2 \\
&\quad - B_3^{\frac{1}{2}} \sin.q_1 \, dy_3, \\
0 &= B_1^{\frac{1}{2}} \cos.p_1 \sin.q_1 \cos.r_1 \, dy_1 \\
&\quad - B_2^{\frac{1}{2}} \sin.p_1 \sin.q_1 \cos.r_1 \, dy_2 \\
&\quad + B_3^{\frac{1}{2}} \cos.q_1 \cos.r_1 \, dy_3 \\
&\quad + B_4^{\frac{1}{2}} \sin.r_1 \, dy_4,
\end{aligned}$$

$$dx_1 = -B_1^{\frac{1}{2}} \cos.p_1 \sin.q_1 \sin.r_1\, dy_1$$
$$+ B_2^{\frac{1}{2}} \sin.p_1 \sin.q_1 \sin.r_1\, dy_2$$
$$- B_3^{\frac{1}{2}} \cos.q_1 \sin.r_1\, dy_3$$
$$+ B_4^{\frac{1}{2}} \cos.r_1\, dy_4.$$

Eliminirt man aus diesen Gleichungen p_1, q_1, r_1, so erhält man folgende Differenzialgleichung

$$dx_1^2 = B_1 dy_1^2 + B_2 dy_2^2 + B_3 dy_3^2 + B_4 dy_4^2.$$

Aus dieser Differenzialgleichung kann man übrigens auch auf einem andern Wege zu denselben vier linearen Differenzialgleichungen gelangen: man multiplicire nämlich in dem Theile rechts derselben was immer für zwei Glieder mit $\cos.p_1^2 + \sin.p_1^2$, so wird hierdurch die Gleichheit nicht gestört; sind diese zwei multiplicirten Glieder $B_1 dy_1^2 + B_2 dy_2^2$, so hat man wegen

$$(B_1 dy_1^2 + B_2 dy_2^2)(\cos.p^2 + \sin.p^2) =$$
$$= (B_1^{\frac{1}{2}} \sin.p_1\, dy_1 + B_2^{\frac{1}{2}} \cos.p_1\, dy_2)^2$$
$$+ (B_1^{\frac{1}{2}} \cos.p_1\, dy_1 - B_2^{\frac{1}{2}} \sin.p_1\, dy_2)^2$$

statt der vorgelegten Differenzialgleichung folgende:

$$dx_1^2 = (B_1^{\frac{1}{2}} \sin.p_1\, dy_1 + B_2^{\frac{1}{2}} \cos.p_1\, dy_2)^2$$
$$+ (B_1^{\frac{1}{2}} \cos.p_1\, dy_1 - B_2^{\frac{1}{2}} \sin.p_1\, dy_2)^2$$
$$+ B_3 dy_3^2 + B_4 dy_4^2.$$

Da nun der Winkel p_1 ganz willkürlich ist, kann man über ihn dergestalt verfügen, dafs man folgende Gleichung festsetzt:

$$0 = B_1^{\frac{1}{2}} \sin.p_1\, dy_1 + B_2^{\frac{1}{2}} \cos.p_1\, dy_2, \quad \text{(I.)}$$

und die vorhergehende Gleichung geht, wenn man

$$B_1^{\frac{1}{2}} \cos.p_1\, dy_1 - B_2^{\frac{1}{2}} \sin.p_1\, dy_2 = C_1$$

setzt, in folgende über:

$$dx_1^2 = C_1^2 + B_3 dy_3^2 + B_4 dy_4^2.$$

Multiplicirt man abermals die Glieder $C_1^2 + B_3 dy_3^2$ mit $\cos. q_1^2 + \sin. q_1^2$, so wird ebenfalls die Gleichheit nicht gestört, und die letzte Gleichung geht daher in folgende über:

$$dx_1^2 = (C_1 \sin. q_1 + B_3^{\frac{1}{2}} \cos. q_1 \, dy_3)^2$$
$$+ (C_1 \cos. q_1 - B_3^{\frac{1}{2}} \sin. q_1 \, dy_3)^2 + B_4 dy_4^2.$$

Weil hier der Winkel q_1 willkürlich ist, kann man auch folgende Gleichung festsetzen:

$$0 = C_1 \cos. q_1 - B_3^{\frac{1}{2}} \sin. q_1 \, dy_3, \quad . \quad . \quad \text{(II.)}$$

und die vorhergehende Gleichung geht, wenn man

$$C_1 \sin. q_1 + B_3^{\frac{1}{2}} \cos. q_1 \, dy_3 = C_2$$

setzt, in folgende über:

$$dx_1^2 = C_2^2 + B_4 dy_4^2.$$

Multiplicirt man endlich den Theil rechts mit $\cos. r_1^2 + \sin. r_1^2$, so geht diese Gleichung in folgende über:

$$dx_1^2 = (C_2 \sin. r_1 + B_4^{\frac{1}{2}} \cos. r_1 \, dy_4)^2$$
$$+ (C_2 \cos. r_1 - B_4^{\frac{1}{2}} \sin. r_1 \, dy_4)^2;$$

wenn hier endlich

$$0 = C_2 \cos. r_1 - B_4^{\frac{1}{2}} \sin. r_1 \, dy_4 \quad . \quad . \quad \text{(III.)}$$

gesetzt wird, so hat man

$$dx_1 = C_2 \sin. r_1 + B_4^{\frac{1}{2}} \cos. r_1 \, dy_4 \quad . \quad \text{(IV.)}$$

Die Gleichungen (I.), (II.), (III.), (IV.) sind mit den oben aufgestellten vier linearen Differenzialgleichungen identisch, wenn man in (II.), (III.), (IV.) die Werthe von C_1, C_2 restituirt.

Wenn die im Anfange dieses Paragraphs vorgelegte Differenzialgleichung (30) so beschaffen ist, dafs die Variable x_1 in dem Theile rechts derselben blofs als gemeinschaftlicher Factor erscheint, dann kann man ihr durch Einführung von drei neuen Variablen z_1, z_2, z_3 folgende Form geben:

$$dx_1^2 = Y_1 dy_1^2 + Z_1 dz_1^2 + Z_2 dz_2^2 + Z_3 dz_3^2 + 2(Z_{1,2} dz_1 dz_2 + Z_{1,3} dz_1 dz_3) + 2 Z_{2,3} dz_2 dz_3,$$

welche Gleichung, wie aus dem Frühern erhellet, viel leichter in ein System von vier linearen Differenzialgleichungen aufgelöst werden kann.

Enthalten ferner in der letzten Gleichung die Coefficienten Z_1, Z_2, Z_3, $Z_{1,2}$, $Z_{1,3}$, $Z_{2,3}$ die Variablen x_1, y_1 blofs als gemeinschaftlichen Factor, so kann man ihr auch folgende Form geben:

$$dx_1^2 = Y_1 dy_1^2 + Z_1 dz_1^2 + U_1 du_1^2 + U_2 du_2^2 + 2 U_{1,2} du_1 du_2;$$

und wenn endlich die Coefficienten U_1, $U_{1,2}$ oder U_2, $U_{1,2}$ die Variablen x_1, y_1, z_1 blofs als gemeinschaftlichen Factor mit sich führen, kann man sie auch in folgende umsetzen:

$$dx_1^2 = Y_1 dy_1^2 + Z_1 dz_1^2 + U_1 du_1^2 + V_1 dv_1^2,$$

welche Gleichung sehr leicht in vier lineare Differenzialgleichungen zerfällt werden kann.

Dritte Abtheilung.

Über die Integration der in der vorhergehenden Abtheilung gefundenen $n-1$ linearen Differenzialgleichungen oder der Differenzialgleichung (B).

§. 11.

In dieser Abtheilung will ich blofs einige specielle Differenzialgleichungen mit drei, vier, fünf Variablen integriren, aus welchen man zur Genüge ersehen wird, wie in jedem andern Falle zu verfahren sey.

Man habe also, um mit einem einfachen Falle den Anfang zu machen, folgende Differenzialgleichung gegeben:

$$dx_1^2 = A^2(dy_1^2 + dy_2^2), \quad \ldots \quad (a)$$

wo A irgend eine Constante vorstellt.

Vermöge den Gleichungen (18) zerfällt diese in folgende zwei lineare Differenzialgleichungen:

$$\left.\begin{aligned} 0 &= \sin.p_1\, dy_1 + \cos.p_1\, dy_2, \\ dx_1 &= A\cos.p_1\, dy_1 - A\sin.p_1\, dy_2. \end{aligned}\right\} \quad (b)$$

Nun wollen wir die zweite dieser Gleichungen, als für sich allein bestehend, integriren. Zuerst bringe man sie nach *Pfaff's* Verfahren, gewöhnliche lineare Differenzialgleichungen erster Ordnung zu integriren, auf eine andere, die blofs drei Variable enthält. Dieses wird erreicht, wenn man

$$\left.\begin{aligned} p_1 &= a, \\ y_1 &= \frac{x_1 \cos.a}{A} + b, \\ y_2 &= -\frac{x_1 \sin.a}{A} + c \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (c)$$

setzt, wo a, b, c die neuen Variablen vorstellen.

Durch Differenziation der beiden letzten dieser

Gleichungen erhält man

$$dy_1 = \frac{\cos. a}{A} dx_1 - \frac{x_1 \sin. a}{A} da + db,$$
$$dy_2 = -\frac{\sin. a}{A} dx_1 - \frac{x_1 \cos. a}{A} da + dc.$$

Substituirt man diese Werthe in die zweite der Gleichungen (b), so geht sie nach allen Reductionen in folgende über:

$$\sin. a \,.\, dc - \cos. a \,.\, db = 0.$$

Diese Differenzialgleichung, welche blofs die drei Variablen a, b, c enthält, wird durch das System folgender zwei Gleichungen integrirt:

$$c \sin. a - b \cos. a = \varphi(a),$$
$$c \cos. a + b \sin. a = \varphi'(a),$$

wo $\varphi(a)$ eine jede willkürliche Function von a vorstellt, und $\varphi'(a)$ statt $\frac{d.\varphi(a)}{da}$ gesetzt worden ist.

Substituirt man in diese Gleichungen die Werthe von a, b, c, welche aus den Gleichungen (c) folgen, so erhält man:

$$\left.\begin{aligned} \frac{x_1}{A} - y_1 \cos. p_1 + y_2 \sin. p_1 &= \varphi(p_1), \\ y_1 \sin. p_1 + y_2 \cos. p_1 &= \varphi'(p_1), \end{aligned}\right\} \quad (d)$$

welche Gleichungen die Integralien der zweiten der Differenzialgleichungen (b) vorstellen.

Um nun auch der ersten der Differenzialgleichungen (b) Genüge zu thun, differenzire man die zweite der zuletzt aufgestellten Gleichungen, so hat man

$$\sin. p_1 \, dy_1 + \cos. p_1 \, dy_2 + [y_1 \cos. p_1 - y_2 \sin. p_1 - \varphi''(p_1)] \, dp_1 = 0,$$

wo $\varphi''(p_1)$ statt $\frac{d^2\varphi(p_1)}{dp_1^2}$ gesetzt worden ist.

Vergleicht man diese Gleichung mit der ersten der

Gleichungen (b), so erhält man

$$[\gamma_1 \cos. p_1 - \gamma_2 \sin. p_1 - \varphi''(p_1)]\, dp_1 = 0,$$

welcher Gleichung Genüge geschieht, wenn man entweder

$$dp_1 = 0$$

annimmt, oder folgende Gleichung festsetzt:

$$\gamma_1 \cos. p_1 - \gamma_2 \sin. p_1 = \varphi''(p_1),$$

Die erste Annahme gibt

$$p_1 = \text{Const.} = a,$$

wodurch die Gleichungen (d) in folgende übergehen:

$$\frac{x_1}{A} - \gamma_1 \cos. a + \gamma_2 \sin. a = \varphi(a),$$
$$\gamma_1 \sin. a + \gamma_2 \cos. a = \varphi'(a),$$

welche Gleichungen den beiden Differenzialgleichungen (b), folglich auch der Gleichung (a) Genüge thun.

Die zweite Anuahme hingegen gibt, in Vereinigung mit den Gleichungen (d), folgende Bestimmungen für x_1, γ_1, γ_2:

$$x_1 = A[\varphi(p_1) + \varphi''(p_1)],$$
$$\gamma_1 = \sin. p_1 \varphi'(p_1) + \cos. p_1 \varphi''(p_1);$$
$$\gamma_2 = \cos. p_1 \varphi'(p_1) - \sin. p_1 \varphi''(p_1),$$

in welchen Gleichungen p_1 eine Variable vorstellen kann.

Denkt man sich aus denselben p_1 eliminirt, so erhält man ein System zweier Gleichungen, die die allgemeinsten Integralien der vorgelegten Differenzialgleichung (a) vorstellen.

Für den Fall, wo $A = 1$ ist, erhält man dieselben Formeln, die *Lagrange* bei der Integration derselben Differenzialgleichung gefunden hat.

Übrigens ersieht man auch, dafs im letztern Falle die hier angegebenen Formeln dazu dienen können, die rectificabeln ebenen Curven anzugeben.

§. 12.

Man habe ferner folgende von *Monge* integrirte Differenzialgleichung:

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = \frac{r^2}{z^2}(dx^2 + dy^2).$$

Nach der von uns bis jetzt gebrauchten Bezeichnungsart wird diese Differenzialgleichung folgende Gestalt annehmen:

$$dx_1^2 = \frac{r^2 - x_1^2}{x_1^2} dy_1^2 + \frac{r^2 - x_1^2}{x_1^2} dy_2^2 \quad . \quad . \quad (a)$$

Mit Hülfe der Gleichungen (18) zerfällt diese Differenzialgleichung in folgende zwei lineare:

$$\left.\begin{aligned} 0 &= \sin.p_1\, dy_1 + \cos.p_1\, dy_2, \\ dx_1 &= \frac{\sqrt{r^2 - x_1^2}}{x_1}[\cos.p_1\, dy_1 - \sin.p_1\, dy_2]. \end{aligned}\right\} . \quad (b)$$

Um die zweite dieser Gleichungen zu integriren, setze man nach *Pfaff*

$$\left.\begin{aligned} p_1 &= a, \\ y_1 &= -\cos.a\sqrt{r^2 - x_1^2} + b, \\ y_2 &= \sin.a\sqrt{r^2 - x_1^2} + c, \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (c)$$

wo a, b, c drei neue Variable vorstellen.

Differenzirt man diese Gleichungen, und substituirt die erhaltenen Werthe für dy_1, dy_2 in die zweite der Gleichungen (b), so geht sie in folgende über:

$$\sin.a \,.\, dc - \cos.a \,.\, db = 0.$$

Diese Gleichung integrirt gibt

$$c\sin.a - b\cos.a = \varphi(a),$$
$$c\cos.a + b\sin.a = \varphi'(a),$$

und wenn in denselben die Werthe für a, b. c, welche aus den Gleichungen (c) folgen, substituirt werden, erhält man folgende zwei Integralgleichungen

$$\left.\begin{aligned} -\sqrt{r^2 - x_1^2} - y_1 \cos.p_1 + y_2 \sin.p_1 &= \varphi(p_1) \\ y_1 \sin.p_1 + y_2 \cos.p_1 &= \varphi'(p_1) \end{aligned}\right\} \text{(d)}$$

der zweiten der Differenzialgleichungen (b).

Um auch der ersten der Differenzialgleichungen (b) Genüge zu thun, differenzire man die zweite der so eben gefundenen Integralgleichungen, wodurch man erhält

$$\sin.p_1\, dy_1 + \cos.p_1\, dy_2 + [y_1 \cos.p_1 - y_2 \sin.p_1 - \varphi''(p_1)]\, dp_1 = 0;$$

woraus erhellt, dafs auch der ersten der Differenzialgleichungen (b) Genüge geschieht, wenn man entweder

$$dp_1 = 0$$

oder

$$y_1 \cos.p_1 - y_2 \sin.p_1 = \varphi''(p_1)$$

festsetzt. Die erstere Annahme erklärt p_1 als eine Constante, und die Gleichungen (d) stellen dann unter dieser Voraussetzung die Integralien der beiden Gleichungen (b) oder der vorgelegten Differenzialgleichung (a) vor.

Die zweite Annahme hingegen bietet folgende drei Integralgleichungen dar:

$$\begin{aligned} -\sqrt{r^2 - x_1^2} - y_1 \cos.p_1 + y_2 \sin.p_1 &= \varphi(p_1), \\ y_1 \sin.p_1 + y_2 \cos.p_1 &= \varphi'(p_1), \\ y_1 \cos.p_1 - y_2 \sin.p_1 &= \varphi''(p_1), \end{aligned}$$

aus welchen, da p_1 variabel ist, diese Gröfse eliminirt werden mufs.

§. 13.

Als letztes Beispiel für drei Variable will ich noch von folgender Differenzialgleichung

$$dx_1^2 = x_1^2\, dy_1^2 + y_2^2\, dy_2^2 \quad . \quad . \quad . \quad \text{(a)}$$

die Integralien aufsuchen.

Nach den Gleichungen (18) zerfällt diese in folgende zwei lineare:

$$\left.\begin{aligned} 0 &= x_1 \sin.p_1\, dy_1 + y_2 \cos.p_1\, dy_2, \\ dx_1 &= x_1 \cos.p_1\, dy_1 - y_2 \sin.p_1\, dy_2. \end{aligned}\right\} \quad \text{(b)}$$

Die zweite dieser Differenzialgleichungen wird nach *Pfaff's* Methode durch Festsetzung folgender Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= b \tang.p_1, \\ y_1 &= \log.a \tang.\frac{p_1}{2}, \\ y_2^2 &= -\frac{2b}{\cos.p_1} + c, \end{aligned}\right\} \quad \text{(c)}$$

wo a, b, c drei neue Variable vorstellen, in folgende blofs drei Variable enthaltende lineare Differenzialgleichung

$$dc - 2b\frac{da}{a} = 0$$

umgesetzt.

Integrirt man diese Differenzialgleichung, so erhält man

$$\begin{aligned} c - 2b \log.a &= \varphi(b), \\ -2\log.a &= \varphi'(b). \end{aligned}$$

Wenn nun für a, b, c die Werthe, welche aus den Gleichungen (c) folgen, gesetzt werden, so sind die Integralien der zweiten der Gleichungen (b) folgende:

$$y_2^2 + \frac{2x_1}{\sin.p_1} - 2x_1 \Cotang.p_1 \left[y_1 - \log.\tang.\frac{p_1}{2}\right] = \varphi(x_1 \Cotang.p_1),$$

$$-2\left[y_1 - \log.\tang.\frac{p_1}{2}\right] = \varphi'(x_1 \Cotang.p_1).$$

Um auch der ersten der Differenzialgleichungen (b) Genüge zu thun, differenzire man die zweite der so eben gefundenen Gleichungen nach allen Gröfsen, die sie enthält, so erhält man:

$$-2dy_1 + 2\frac{dp_1}{\sin. p_1} =$$

$$= \left[\text{Cotang.}\, p_1\, dx_1 - \frac{x_1\, dp_1}{\sin. p_1^2}\right] \varphi''(x_1 \text{ Cotang.}\, p_1).$$

Substituirt man in diese Gleichung den Werth von dy_1, der aus der ersten der Differenzialgleichungen (b) folgt, so erhält man nach allen Reductionen folgende Gleichung:

$$\left(\frac{\cos. p_1\, dx_1}{x_1} - \frac{dp_1}{\sin. p_1}\right)\left[\frac{2}{x_1} + \frac{\varphi''(x_1 \text{ Cotang.}\, p_1)}{\sin. p_1}\right] = 0.$$

Hieraus folgt, daſs man entweder

$$\frac{\cos. p_1}{x_1}\, dx_1 - \frac{dp_1}{\sin. p_1} = 0$$

oder

$$\frac{2}{x_1} + \frac{\varphi''(x_1 \text{ Cotang.}\, p_1)}{\sin. x_1} = 0$$

haben muſs.

Die erste Annahme gibt durch Integration

$$x_1 \text{ Cotang.}\, p_1 = \text{Const.} = a,$$

folglich sind die Integralien der vorgelegten Differenzialgleichung (a) entweder

$$y_1^2 \sin. p_1 + 2x_1\left\{1 - \cos. p_1\left[y_1 - \log. \text{tang.}\frac{p_1}{2}\right]\right\} =$$

$$= \sin. p_1\, \varphi(x_1 \text{ Cotang.}\, p_1),$$

$$2\left[y_1 - \log. \text{tang.}\frac{p_1}{2}\right] = -\varphi'(x_1 \text{ Cotang.}\, p_1),$$

$$2 \sin. p_1 = -x_1 \varphi''(x_1 \text{ Cotang.}\, p_1)$$

oder

$$y_1 = -\tfrac{1}{2}\varphi'(a) + \log.\left(\frac{-a + \sqrt{a^2 + x_1^2}}{x_1}\right),$$

$$y_1^2 = \varphi(a) - a\varphi'(a) - 2\sqrt{a^2 + x_1^2},$$

wo aus den erstern Integralien die neu eingeführte Variable p_1 eliminirt werden muſs.

§. 14.

Als Beispiel von vier Variablen will ich zuerst die Integralien von folgender Differenzialgleichung

$$dx_1^2 = dy_1^2 + dy_2^2 + dy_3^2 \quad . \quad . \quad . \quad \text{(a)}$$

entwickeln.

Nach den Gleichungen (25) zerfällt sie in folgende drei lineare Differenzialgleichungen:

$$\left.\begin{aligned} 0 &= \cos.p_1\, dy_1 + \sin.p_1\, dy_2, \\ 0 &= \sin.p_1 \cos.q_1\, dy_1 - \cos.p_1 \cos.q_1\, dy_2 \\ &\qquad - \sin.q_1\, dy_3, \\ dx_1 &= \sin.p_1 \sin.q_1\, dy_1 - \cos.p_1 \sin.q_1\, dy_2 \\ &\qquad + \cos.q_1\, dy_3. \end{aligned}\right\} \text{(b)}$$

Die letzte dieser Gleichungen, welche sechs Variable enthält, kann man nach *Pfaff's* Methode in eine andere ebenfalls lineare transformiren, die blofs fünf Variable enthält. Dieses wird erreicht, wenn man folgende Gleichungen festsetzt:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= x_1 \sin.a \sin.b + g, \\ y_2 &= -x_1 \cos.a \sin.b + e, \\ y_3 &= x_1 \cos.b + c, \\ p_1 &= a, \\ q_1 &= b, \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad \text{(c)}$$

wo a, b, c, e, g die neuen Variablen sind.

Führt man diese Werthe in der letzten der Gleichungen (b) ein, so erhält man folgende Differenzialgleichung:

$$0 = \cos.b\, dc - \cos.a \sin.b\, de + \sin.a \sin.b\, dg, \quad \text{(d)}$$

die, wie man sieht, blofs fünf Variable enthält.

In dieser Differenzialgleichung wird ferner nach *Pfaff* eine der Variablen einstweilen als constant betrachtet. Nennen wir b diese constante, so geht die letzte Gleichung durch Festsetzung folgender Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} e &= \frac{c\cos.a'}{\text{tang.}\,b} + c', \\ g &= -\frac{c\sin.a'}{\text{tang.}\,b} + b', \\ a &= a' \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \text{(e)}$$

in folgende über:

$$0 = \cos.a'\,dc' - \sin.a'\,db'.$$

Da hier blofs die drei Variablen a', b', c' enthalten sind, so wird sie durch das System folgender zwei Gleichungen

$$\begin{aligned} c'\cos.a' - b'\sin.a' &= \varphi(a'), \\ c'\sin.a' + b'\cos.a' &= -\varphi'(a') \end{aligned}$$

integrirt, in welchen $\varphi(a')$ eine willkürliche Function von a vorstellt, und $\varphi'(a')$ statt $\frac{d.\varphi'(a')}{da'}$ gesetzt worden ist.

Substituirt man in die letzten zwei Gleichungen die Werthe von a', b', c', welche aus den Gleichungen (e) folgen, so gehen sie in folgende über:

$$\begin{aligned} -c\,\text{Cotang.}\,b + e\cos.a - g\sin.a &= \varphi(a), \\ e\sin.a + g\cos.a &= -\varphi'(a). \end{aligned}$$

Diese zwei Gleichungen stellen die Integralien der Differenzialgleichung (d) unter der Voraussetzung dar, dafs b constant sey. Nun ist aber b ebenfalls variabel, daher wird die willkürliche Function φ aufser a auch b enthalten müssen. Es werden mithin die Integralien der Differenzialgleichung (d) folgende seyn:

$$\begin{aligned} -a\,\text{Cotang.}\,b + e\cos.a - g\sin.a &= \varphi(a, b), \\ e\sin.a + g\cos.a &= -\varphi'(a), \\ e &= \sin.b^2\,\varphi'(b), \end{aligned}$$

wo $\varphi'(a)$, $\varphi'(b)$ statt $\frac{d.\varphi(a,b)}{da}$, $\frac{d.\varphi(a,b)}{db}$ gesetzt worden sind.

Setzt man nun in die letzten drei Gleichungen statt a, b, c, e, g ihre Werthe, welche aus den Gleichungen (c) folgen, so erhält man:

$$\left.\begin{aligned} \frac{x_1 - y_3 \cos. q_1}{\sin. q_1} + y_2 \cos. p_1 - y_1 \sin. p_1 &= \varphi(p, q), \\ y_2 \sin. p_1 + y_1 \cos. p_1 &= -\varphi'(p), \\ \frac{y_3 - x_1 \cos. q_1}{\sin. q_1^2} &= \varphi'(q), \end{aligned}\right\} \text{(f)}$$

welche drei Gleichungen die Integralien der dritten der Differenzialgleichungen (b) vorstellen.

Um auch den beiden ersten der Differenzialgleichungen (b) Genüge zu thun, suche man aus den so eben aufgestellten drei Integralgleichungen die Werthe von y_1, y_2, y_3; diese geben:

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 \sin. p_1 \sin. q_1 - \cos. p_1 \varphi'(p_1) \\ &\quad - \sin. p_1 \sin. q_1 \cos. q_1 \varphi'(q_1) - \sin. p_1 \varphi(p_1, q_1), \\ y_2 &= -x_1 \cos. p_1 \sin. q_1 - \sin. p_1 \varphi'(p_1) \\ &\quad + \cos. p_1 \sin. q_1 \cos. q_1 \varphi'(q_1) + \cos. p_1 \varphi(p_1, q_1), \\ y_3 &= x_1 \cos. q_1 + \sin. q_1^2 \varphi'(q_1). \end{aligned}$$

Differenzirt man diese Gleichungen, und substituirt die sich ergebenden Werthe für dy_1, dy_2, dy_3 in die beiden ersten der Differenzialgleichungen (b), so gehen sie in folgende über:

$$\begin{aligned} [x_1 \sin. q_1 - \varphi''(p_1) - \sin. q_1 \cos. q_1 \varphi'(q_1) - \varphi(p_1, q_1)]\, dp_1 &= \\ = \varphi''(p_1, q_1)\, dq_1, & \\ [x_1 - 2 \cos. q_1 \varphi'(q_1) - \sin. q_1 \varphi''(q_1)]\, dq_1 &= \\ = \sin. q_1 \varphi''(p_1, q_1)\, dq_1, & \end{aligned}$$

wo der Kürze wegen $\varphi''(p_1)$, $\varphi''(p_1, q_1)$, $\varphi''(q_1)$ der Ordnung nach statt $\frac{d^2 \varphi(p_1, q_1)}{dp_1^2}$, $\frac{d^2 \varphi(p_1, q_1)}{dp_1\, dq_1}$, $\frac{d^2 \varphi(p_1, q_1)}{dq_1^2}$ gesetzt worden ist.

Diese Gleichungen können nur in so ferne zugleich bestehen, als folgende von jedem Differenziale befreite Gleichung

$$\left.\begin{aligned} &\sin.q_1\,\varphi''(p_1,\,q_1)^2 = \\ =&[x_1\sin.q_1-\varphi''(p_1)-\sin.q_1\cos.q_1\varphi'(q_1)-\varphi(p_1,q_1)]\times \\ &\times[x_1-2\cos.q_1\,\varphi'(q_1)-\sin.q_1\,\varphi''(q_1)] \end{aligned}\right\}(g)$$

besteht. Eliminirt man nun aus dieser Gleichung und einer der beiden vorhergehenden Differenzialgleichungen die Variable x_1, so erhält man:

$$\varphi''(p_1,\,q_1)\,[\sin.q_1^2\,dp_1^2-dq_1^2]$$
$$+\,[\sin.q_1\cos.q_1\,\varphi'(q_1)+\sin.q_1^2\,\varphi''(q_1)$$
$$-\varphi''(p_1)-\varphi(p_1,\,q_1)]\,dp_1\,dq_1 = 0.$$

Die Gleichungen (f), vereinigt mit den beiden letzten Gleichungen, werden sämmtlichen Differenzialgleichungen (b) Genüge thun; allein die zweite dieser letzten Gleichungen ist noch eine Differenzialgleichung zwischen den beiden Variablen p_1, q_1, und erfordert mithin noch eine Integration, um zu den endlichen Integralien der vorgelegten Differenzialgleichung zu gelangen. Diese Integration kann man aber so lange, als über die willkürliche Function $\varphi(p_1,\,q_1)$ nicht entschieden wird, auch nicht bewerkstelligen, daher ich an ein Verfahren denken mufste; wie mit dieser Differenzialgleichung umzugehen wäre. Ich substituire nämlich die aus den Gleichungen (f) folgenden Werthe von γ_1, γ_2, γ_3, wie auch die Werthe ihrer Differenzialien in die vorgelegte Differenzialgleichung (a), dadurch finde ich nach allen Reductionen folgende Differenzialgleichung:

$$0=\{[x_1\sin.q_1-\varphi''(p_1)-\sin.q_1\cos.q_1\varphi'(q_1)-\varphi(p_1,q_1)]dp_1$$
$$-\varphi''(p_1,\,q_1)\,dq_1\}^2$$
$$+\{[x_1-2\cos.q_1\,\varphi'(q_1)-\sin.q_1\,\varphi''(q_1)]\,dq_1$$
$$-\sin.q_1\,\varphi''(p_1,\,q_1)\,dp_1\}^2.$$

Wenn die Gleichungen (f) die Integralien der vorgelegten Differenzialgleichung (a) wären, dann müfste die letzte Gleichung eine identische seyn; da dieses aber nicht Statt findet, so führe ich die früher gefundene

Gleichung (f) ein, wodurch die letzte Gleichung in folgende übergeht:

$$0 = \big([x_1 - 2\cos.q_1\varphi'(q_1) - \sin.q_1\varphi''(q_1)]\,dq_1 - \sin.q_1\varphi''(p_1, q_1)\,dp_1\big)^2 \times \times \big([x_1 - 2\cos.q_1\varphi'(q_1) - \sin.q_1\varphi''(q_1)]^2 + \varphi''(p_1, q_1)^2\big).$$

Da diese Gleichung identisch werden soll, so ist es gleichgültig, welche der Factoren man verschwinden läfst; der erste Factor gleich Null gesetzt, gibt eine der beiden früher gefundenen Differenzialgleichungen, und erzeugt mithin nichts Neues. Hingegen der zweite Factor gleich Null gesetzt, gibt

$$[x_1 - 2\cos.q_1\varphi'(q_1) - \sin.q_1\varphi''(q_1)]^2 + \varphi''(p_1, q_1)^2 = 0,$$

woraus man erhält

$$x_1 - 2\cos.q_1\varphi'(q_1) - \sin.q_1\varphi''(q_1) = \sqrt{-1}\,\varphi''(p_1, q_1).$$

Hierdurch geht die Gleichung (g) in folgende über:

$$x_1\sin.q_1 - \varphi''(p_1) - \sin.q_1\cos.q_1\varphi'(q_1) - \varphi(p_1, q_1) = = -\sqrt{-1}\sin.q_1\varphi''(p_1, q_1).$$

Diese zwei Gleichungen, vereinigt mit den Gleichungen (f), geben

$$x_1 = 2\cos.q_1\varphi'(q_1) + \sin.q_1\varphi''(q_1) + \sqrt{-1}\,\varphi''(p_1, q_1),$$

$$y_1 = -\cos.p_1\varphi'(p_1) + \sin.p_1\varphi''(p_1) - \sqrt{-1}\sin.p_1\sin.q_1\varphi''(p_1, q_1),$$

$$y_2 = -\sin.p_1\varphi'(p_1) - \cos.p_1\varphi''(p_1) + \sqrt{-1}\cos.p_1\sin.q_1\varphi''(p_1, q_1),$$

$$y_3 = (1 + \cos.q_1^2)\varphi'(q_1) + \sin.q_1\cos.q_1\varphi''(q_1) + \sqrt{-1}\cos.q_1\varphi''(p_1, q_1),$$

$$\varphi(p_1, q_1) + \varphi''(p_1) - \sin.q_1[\cos.q_1\varphi'(q_1) + \sin.q_1\varphi''(q_1) + 2\sqrt{-1}\,\varphi''(p_1, q_1)] = 0,$$

aus welchen, wenn p_1, q_1 eliminirt werden, ein System

dreier Gleichungen, die eine willkürliche Function mit sich führen, als Integralien der vorgelegten Differenzialgleichung (a) erhalten werden.

§. 15.

Man habe ferner folgende Differenzialgleichung

$$dx_1^2 = dy_1^2 + y_2^2\,dy_2^2 + x_3^2\,dy_3^2 \quad . \quad . \quad (a)$$

Nach den Gleichungen (25) zerfällt diese in folgende drei lineare:

$$\left.\begin{aligned} 0 &= \cos.p_1\,dy_1 + y_2 \sin.p_1\,dy_2, \\ 0 &= \sin.p_1 \cos.q_1\,dy_1 - y_2 \cos.p_1 \cos.q_1\,dy_2 \\ &\qquad - x_1 \sin.q_1\,dy_3, \\ dx_1 &= \sin.p_1 \sin.q_1\,dy_1 - y_2 \cos.p_1 \sin.q_1\,dy_2 \\ &\qquad + x_1 \cos.q_1\,dy_3. \end{aligned}\right\} \quad (b)$$

Die letzte dieser Differenzialgleichungen wird nach *Pfaff* durch das System folgender Gleichungen integrirt:

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 \text{Cotang.}\,q_1 \left[y_3 - \log.\tang.\frac{q_1}{2}\right] - \frac{2x_1}{\sin.q_1} \Big\} &= \\ + 2y_1 \sin.p_1 - y_2^2 \cos.p_1 \Big\} & \\ = \varphi(p_1, x_1 \text{Cotang.}\,q_1), & \\ 2y_1 \cos.p_1 + y_2^2 \sin.p_1 = \varphi'(p_1), & \\ 2\left[y_3 - \log.\tang.\frac{q_1}{2}\right] = \varphi'(x_1 \text{Cotang.}\,q_1). & \end{aligned}\right\} \quad (c)$$

Um mit Hülfe dieser gefundenen Integralien auch den beiden ersten der Differenzialgleichungen (b) Genüge zu thun, setzen wir der Kürze wegen

$$x_1 \text{Cotang.}\,q_1 = v, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (a')$$

wodurch die beiden ersten der Gleichungen (b) in folgende übergehen:

$$\left.\begin{aligned} 0 &= \cos.p_1\,dy_1 + y_2 \sin.p_1\,dy_2, \\ 0 &= \sin.p_1\,dy_1 - y_2 \cos.p_1\,dy_2 - v \tang.q_1^2\,dy_3, \end{aligned}\right\} \quad (b')$$

und die gefundenen Integralgleichungen (c) gehen in

folgende über:

$$\left.\begin{aligned} 2\rho\left(\gamma_3 - \frac{1}{\cos.\, q_1} - \log.\,\text{tang.}\,\frac{q_1}{2}\right) \\ + 2\gamma_1 \sin.\, p_1 - \gamma_2^2 \cos.\, p_1 = \varphi(p_1, \rho), \\ 2\gamma_1 \cos.\, p_1 + \gamma_2^2 \sin.\, p_1 = \varphi'(p_1), \\ 2\left(\gamma_3 - \log.\,\text{tang.}\,\frac{q_1}{2}\right) = \varphi'(\rho). \end{aligned}\right\} \text{(c')}$$

Sucht man aus diesen Gleichungen die Werthe von γ_1, γ_2^2, γ_3, differenzirt dann die erhaltenen Resultate, und substituirt sie in die Gleichungen (b'), so erhält man folgende zwei Gleichungen:

$$\left[\frac{2\rho}{\cos.\, q_1} - \rho\varphi'(\rho) + \varphi''(p_1) + \varphi(p_1, \rho)\right] dp_1 + \varphi''(p_1, \rho)\, d\rho = 0,$$

$$[\rho\varphi''(\rho) - 2\cos.\, q_1]\, d\rho + \rho\varphi''(p_1, \rho)\, d\rho = 0,$$

welche Gleichungen nur dann zugleich bestehen können, wenn man folgende Gleichung hat

$$\rho\varphi''(p_1, \rho)^2 = [\rho\varphi''(\rho) - 2\cos.\, q_1] \times \left[\frac{2\rho}{\cos.\, q_1} - \rho\varphi'(\rho) + \varphi''(p_1) + \varphi(p_1, \rho)\right]. \quad \text{(d')}$$

Substituirt man aber dieselben Werthe für $d\gamma_1$, $\gamma_2\, d\gamma_2$, $d\gamma_3$, die aus (c') folgen, in die vorgelegte Differenzialgleichung (a), so geht sie in folgende über:

$$0 = \cos.\, q_1^2 \left\{\left[\frac{2\rho}{\cos.\, q_1} - \rho\varphi'(\rho) + \varphi''(p_1) + \varphi(p_1, \rho)\right] dp_1 + \varphi''(p_1, \rho)\, d\rho\right\}^2 + \left\{[\rho\varphi''(\rho) - 2\cos.\, q_1]\, d\rho + \rho\varphi''(p_1, \rho)\, dp_1\right\}^2$$

und mit Berücksichtigung der Gleichung (d) geht sie in folgende über:

$$0 = \left([\rho\varphi''(\rho) - 2\cos.\, q_1]\, d\rho + \rho\varphi''(p_1, \rho)\, dp_1\right)^2 \times \left([\rho\varphi''(\rho) - 2\cos.\, q_1]^2 + \cos.\, q_1^2\, \varphi''(p_1, \rho)^2\right),$$

woraus erhellet, dafs man blofs den zweiten Factor Null zu setzen braucht, wodurch man folgende Gleichung erhält:

$$\nu\,\varphi''(\nu) - 2\cos.\,q_1 = \sqrt{-1}\cos.\,q_1\,\varphi''(p_1,\,\nu);$$

die Gleichung (d) geht dann in folgende über:

$$\frac{2\nu}{\cos.\,q_1} - \nu\,\varphi'(\nu) + \varphi''(p_1) + \varphi(p_1,\,\nu) = \\ = -\frac{\sqrt{-1}\,\nu\,.\,\varphi''(p_1,\,\nu)}{\cos.\,q_1},$$

Substituirt man in diese zwei Gleichungen den oben festgesetzten Werth von ν, und eliminirt dann aus diesen so erhaltenen zwei Gleichungen und den obigen Gleichungen (c) die eingeführten Variablen p_1, q_1, so erhält man ein System dreier Gleichungen, die eine willkürliche Function mit sich führen, welche die Integralien der vorgelegten Differenzialgleichung (a) seyn werden.

III.

Analyse des Kropfwassers zu Hall in Oesterreich ob der Enns;

vom

Med. Dr. Ritter von *Holger.*

(Vorgetragen in der practisch-ärztlichen Section der Versammlung der deutschen Naturforscher und Ärzte zu Hamburg, am 24. September 1830.)

Dieses nun immer mehr berühmt werdende Mineralwasser, von dem wir nur die nöthigsten Notizen als Einleitung hier vorangehen lassen, da die umständliche Beschreibung desselben in dem so eben erschienenen Werkchen des Hrn. Dr. *Leopold Wagner* über denselben Gegenstand enthalten ist, mufs uns um so merkwürdiger erscheinen, als es uns auf den wohlgeordneten Vorgang der gütigen Natur aufmerksam macht, die für ein Übel, das sie erzeugt, auch wieder wirksame und sichere Gegenmittel bereit hält. Lange ist es nämlich bekannt und kann nicht geläugnet werden, dafs in Gebirgsgegenden, und vorzüglich bei uns in Steiermark und Kärnthen, Wässer vorkommen, auf deren Genufs der, in diesen Gegenden so häufige, Kropf entsteht; nun werden wir aber von einem Wasser sprechen, welches dieses so lästige als entstellende Übel leicht und sicher zu heilen vermag. Dieses Wasser ist nicht etwa als ein neu entdeckter Arzneikörper zu betrachten, es war schon in den ältesten Zeiten bekannt, und sowohl zum Salzsieden als zur Heilung der Kröpfe verwendet. Seiner wird schon in der Stiftungsurkunde des Stiftes Kremsmünster vom Jahre 777 gedacht, worin dieser Brunnen dem Stifte geschenkt wird, um daraus einen Theil sei-

nes Salzbedarfs zu gewinnen. Als später die reicheren Sohlen zu Gmunden und Ischel in Aufnahme kamen, wurde die Haller Quelle aufgelassen, dafür aber stieg ihr Ruf als Heilwasser immer mehr empor.

Diese Quelle befindet sich im Traunkreise des Erzherzogthums Österreich ob der Enns, zwischen dem Markte *Hall* und dem Dorfe *Pfarrkirchen*, etwa dreifsig Schritte vom Sulzbache *). Sie wurde seit Jahrhunder-

*) Dr. *Wagner* bemerkt in seinem oben erwähnten Werkchen über Hall folgendes:

Hall, *Haliola*, Herzoghalle, Haal (eine Salzgrube), ein freier Markt im Lande ob der Enns, im Traunkreise, an der Strafse von Wels nach Seyer, eine Stunde von Kremsmünster, drei eine halbe von Wels, drei von Steier, ober dem Sulzbache, hat seinen Namen von der nahe gelegenen Salzquelle, ganz wahrscheinlich, erhalten.

Der genauesten geographischen Bestimmung zu Folge liegt Hall unter dem 31° — 45′ — 45″ der östlichen Länge, und unter dem 48° — 3′ — 29″ der nördlichen Breite, und 210 Wiener Klafter über dem Mittelmeere. An der östlichen und südlichen Seite begrenzen die nahen steierischen Gebirge den Horizont. Am Fufse des Berges, auf welchem der Markt Hall liegt, fliefst an der Südwestseite der Sulzbach, der seinen Namen wahrscheinlich von der nahen Salzquelle bekam, und sich in dem zwischen Hall und dem eine Viertelstunde weit von Hall entfernten, auf einer Anhöhe gelagerten, Dorfe Pfarrkirchen liegenden Thale von Südost nach Norden dahin schlängelt. Selber entspringt eine Stunde von Hall entfernt bei dem Dorfe Adelwang, und fällt in den nahen Kremsfluſs bei dem Dorfe Kematen, eine Stunde von Hall entfernt.

Die Umgebungen von Hall sind schöne, bald mit gröfserem, bald mit kleinerem Gehölze bedeckte Hügel, fruchtbares Ackerland, schöne Wiesen, buschige Auen, welche zu allen Jahrszeiten von den vielen, kerniges

ten von den Anwohnern unter dem Namen *Kropfwasser* zur Heilung von Kröpfen, wie auch gegen Gicht, Skro-

köstliches Quellwasser führenden Bächen erfrischt und bewässert werden.

Das Clima ist zwar schnellem Temperaturswechsel unterworfen, dessen ungeachtet genieſst diese Gegend eine sehr reine trockene Luft, welche die Fruchtbarkeit und Gesundheit ungemein befördert, daher auch Hall zu den gesündesten Gegenden des Landes ob der Enns zu zählen ist, besonders wegen seiner hohen und trockenen Lage, und seiner schönen Umgebung.

Der mittlere Thermometerstand laut fünfjährigen meteorologischen Beobachtungen beträgt + 6°,86 *R.*, der mittlere Barometerstand, auf 0° *R.* reducirt, 26″, 11,032 Pariser Maſs.

Die herrschenden Winde sind der Nordostwind, als welcher gewöhnlich schönes Wetter bringt, und der Westwind, welcher meistens regnerisches Wetter nach sich zieht.

Der Boden ist von mittlerer Güte, doch gut gepflegt, ergiebig an allen Gattungen von Gartengewächsen. In Rücksicht der beiden organischen Reiche ist die Umgebung von Hall den übrigen flachen Gegenden des Traunkreises ganz ähnlich. Sehr arm aber ist diese Gegend an Mineralien, denn, da der ganze Bezirk bloſs aus Hügeln von aufgeschwemmten Gebirgsarten besteht, so zeigen sich unter der Dammerde, auſser Geschieben von Rollsteinen und zerstreuten Nestern von Thonmergel und Lehm, nur einzelne, bisweilen ziemlich mächtige Blöcke von Kalkbreccia, welche unter dem Namen Nagelstein bei verschiedenen Bau- und Wirthschafsangelegenheiten als Material benützt wird. Von anderen Erd- und Steinarten, von brennbaren Mineralien oder Metallen war bisher keine Spur aufzufinden. Der Boden nahe und rings um die Salzquelle hat lettige Dammerde.

Hall ist ein freier Markt, hat 123 gröſstentheils hübsch gebaute Häuser, worunter besonders das Schloſs zu bemerken kommt, das auf einem freien mit Lin-

phelsucht, chronische Hautausschläge mit dem ausgezeichnetsten Erfolge angewendet, und in das Land der Kröpfe, nach Steiermark, versendet; seine ausgezeichnete Kraft zur Vertreibung der Kröpfe und gegen die übrigen angeführten Krankheiten, vorzüglich als Antiscrophulosum, wurde durch diese vieljährigen Erfahrungen unwiderleglich bewiesen, und *Cranz* nennt es in seinem Werke die *Gesundbrunnen der österreichischen Monarchie*, pag. 16 schon »gegen Kröpfe und die Krätze weit und breit berühmt.« Indefs war es denn doch in den neueren Zeiten noch nicht allgemein bekannt, und seine Anwendung erstreckte sich nicht weiter als über die nächst anliegenden Gegenden. Erst die Entdeckung des Jods in selbem im Jahre 1828 brachte es in mehr verbreiteten Ruf; denn, so wie es damals vielleicht das erste jodhältige Wasser war, welches man in der österreichischen Monarchie entdeckte, so ist es auch bisher

---

den besetzten Platze, Anger genannt, erbauet ist, und zwischen dem Pfarrhofe und dem eigentlichen ziemlich regulären Marktplatze liegt; selbes gehört dem Herrn Fürsten von *Trautmannsdorf*. Die Häuser gewähren geräumige gesunde Wohnungen. Der Ort ist mit allen in voller Ausübung stehenden Gewerben, dann mehreren bequemen Gasthäusern versehen. Der Markt hat ein reinliches Ansehen, und ist des Nachts immer beleuchtet. Da der Markt so schöne Umgebung hat, so findet man allda auch schöne Spaziergänge; eben so bemerkenswerth ist die interessante Nachbarschaft, nämlich das eine Stunde weit entfernte berühmte Benedictinerkloster Kremsmünster mit seinen Sehenswürdigkeiten, die wegen ihren Eisenmanufacturen so bekannte Kreisstadt Steier, die grofsen Dörfer Steinbach und Sierning, merkwürdig durch die dort wohnenden Zeug- und Messerschmiede. Gute Strafsen führen an alle diese Orte.

das Einzige geblieben, wenigstens das Einzige, welches als solches in Ruf zu kommen verdiente. Zu seiner ausgebreiteteren Anwendung trugen aber auch wesentlich die beiden in Hall und Pfarrkirchen errichteten Badehäuser, und vor allen die Veranstaltung bei, dafs es nun in Wien in mit aller Vorsicht gefüllten Flaschen in jeder beliebigen Menge käuflich zu haben ist.

Bisher fehlte noch eine vollständige Analyse dieses Wassers, von der denn doch noch einige Aufschlüsse zur genauen Bestimmung der Heilanzeigen erwartet werden konnten. Ich führte dieselbe durch, und legte sie zur Beurtheilung der practisch-ärztlichen Section zu Hamburg vor. Da ich unmittelbar vorher über die steiermärkischen kropferzeugenden Wässer gesprochen hatte, so erregte es allgemeines Interesse, dafs ich nun auch ein Wasser vorzeigen konnte, welches dieses Übel leicht und sicher zu entfernen im Stande ist; und wenn gleich Deutschland mehrere jodhältige Salzquellen besitzt, die sich auch durch ähnliche Wirkungen auszeichnen, worunter ich nur vorzüglich die bei *Rosenheim* und *Kreutznach* erwähne, so glaube ich doch, dafs das *Haller* Wasser sich in eine Reihe mit jenen stellen dürfe, und in so ferne interessant sey, wenn es auch nicht, wie bei uns, eine wesentliche Lücke in der Arzneimittellehre ausfüllt.

Das Wasser kommt in Flaschen nach Wien, deren jede zwischen 20 und 21 Loth desselben enthält. Es ist darin vollkommen klar und farbenlos, ohne bedeutenden Geruch. Es schmeckt ziemlich stark nach Kochsalz, mit einem Hinterhalte nach dem jodsauren Salze. Es wirft weder Perlen noch Blasen, hat nicht den stechenden Geschmack nach Carbonsäure, verändert sich beim langen Stehen in der offenen oder verschlossenen Flasche, selbst bei der stärksten Sommerhitze, nicht.

Indeſs erhielt ich doch zuweilen eine Flasche, deren Wasser gelb gefärbt war, und das stark nach *Brom* schmeckte und roch. Daſs eine Umänderung der Brom- und Jodsäure in Brom und Jod bei diesem Übermaſse von Kochsalz eintreten kann, wenn äuſsere zerlegende Einflüsse, etwa Sonnenstrahlen, auf das Wasser wirken, ist nach den bisherigen Erfahrungen leicht begreiflich. Diese Umänderung scheint auch allein die Ursache des unangenehmen Geruches nach gebranntem Schwamm zu seyn, welcher sich an der Quelle bei heiterer, trockener, warmer Witterung schon auf eine Entfernung von 50—60 Schritten zu erkennen gibt. Manche Flaschen enthielten einen geringen gelben Niederschlag, dessen Farbe Eisenoxyd vermuthen lieſs, welches er jedoch nicht enthielt; da dieser bald in gröſserer, bald in geringerer Menge vorhanden war, immer aber im Ganzen sehr wenig betrug, sich beim Kochen und beim Eindicken des Wassers bis zur Trockenheit weder verminderte noch vermehrte, glaubte ich ihn als zufällige Verunreinigung desselben ansehen zu müssen.

Einwirkung der Reagentien auf das nicht concentrirte Wasser.

Blutlauge, salzsaurer Baryt, salzsaures Platin, schwefelsaures Kali hatten gar keine Wirkung.

Schwefelsaures Kupfer gibt einen geringen grünlichweiſsen Niederschlag, der sich ohne Aufbrausen in Säuren löst, und für *Phosphorsäure* spricht.

Carbonsaures Kali einen starken weiſsen Niederschlag, der, da die Blutlauge keine Metalloxyde anzeigte, nur die *Erdsalze* bedeuten kann. Wird dieser abfiltrirt, so gibt *phosphorsaures Natron* noch einen weiſsen Niederschlag, der das *Lithon* anzuzeigen scheint.

Reines, carbonsaures und *Schwefelammoniak* geben weifse Niederschläge.

Wird der durch carbonsaures Kali erzeugte Niederschlag in einer Säure gelöset, so zeigt in dieser Lösung *Selensäure* den *Kalk*, und dann reines *Kali* die *Talkerde* an.

Stärke wirkt nicht auf das Wasser, selbst wenn Salpetersäure zugesetzt wird, auch *Chlor* verändert es nicht.

Schwefelsaures Silber erzeugt einen starken weifsen Niederschlag, der sich nicht ganz in Ammoniak löst. Aus der ammoniakalischen Auflösung desselben scheidet Essigsäure einen starken weifsen Niederschlag aus.

Das Wasser enthält daher

Salzsäure,	Natron,
Jodsäure,	Lithon,
Phosphorsäure,	Kalk,
	Talk,
	Thonerde.

Einwirkung der Reagentien auf das concentrirte Wasser.

Das Abdampfen des Wassers ging ruhig, ohne Gasentbindung vor sich, es wurde dabei weder gefärbt noch getrübt. Es schmeckte nach dem Concentriren wie eine concentrirte Kochsalzlösung mit unbedeutendem Nebengeschmack nach Jod und Brom. Es reagirte nun stark alkalisch.

Salzsaures Baryt gab nun einen weifsen, in Säuren unlöslichen Niederschlag, und eine geringe Menge eines dergleichen ohne Aufbrausen löslichen.

Es wurde nun vom Chlor alsogleich blafs braungelb gefärbt, und mit Äther geschüttelt nahm dieser den braunen Körper auf, und färbte sich blafs weingelb.

Wurde das Wasser mit Stärke gekocht, so wurde es auf Zusatz von etwas Salpetersäure sogleich blau, und nach der Hand fiel die blaue *Jodstärke* daraus zu Boden. Noch deutlicher erfolgte die Wirkung, wenn es mit Stärke gekocht und dann mit Schwefelsäure und Chlor nach *Balard's* Methode behandelt wurde. Es enthielt demnach

Salzsäure,	Natron,
Jodsäure,	Lithon,
Bromsäure,	Kalk,
Schwefelsäure,	Talkerde,
Phosphorsäure,	Thonerde.

Wurde das Wasser bis zur Trockenheit abgedampft, so gab es eine weifse Salzmasse, die für 1000 Th. 15.01 wog, und wenn sie ausgeglüht wurde, ein Gewicht von 13.70 hatte.

Die Basen wurden quantitativ folgender Weise bestimmt:

Es wurde das Wasser zweier Flaschen bedeutend concentrirt, hieraus zuerst durch *Ammoniak* die *Thonerde*, dann durch *salzsaures Baryt* der *Schwerspath*, dann wieder durch Ammoniak das *phosphorsaure Baryt* abgeschieden. Endlich wurde es mit carbonsaurem Kali fast bis zur Trockenheit abgedampft, die beim Auflösen im Wasser zurückbleibenden Carbonate durch *Kleesäure* und *phosphorsaures Natron* in *Kalk* und *Talkerde* zerlegt, die Auflösung aber mit *phosphorsaurem Natron* nach der Vorschrift *Berzelius's* behandelt, und das gewonnene Lithondoppelsalz vor dem Löthrohre als solches vollkommen genügend erwiesen. Es ergaben sich folgende Werthe als die Mittelzahlen zweier nur in der letzten Decimalstelle wenig abweichender Mengen der einzelnen Basen für 1000 Th. des Wassers:

Schwefelsäure . . .	0.098
Phosphorsäure . . .	0.012
Thonerde	0.201
Kalk	0.221
Talkerde	0.026
Lithon	0.283
	0.841.

Das Natron wurde aus der gefundenen Menge der Salzsäure und der festen Bestandtheile berechnet.

Salz-, Jod- und *Bromsäure* wurden durch *salpetersaures Silberoxyd* ausgeschieden. Der gesammte weifse Niederschlag betrug gewaschen und getrocknet als Mittelzahl zweier Versuche 34.27 für 1000 Th. Da aber das salpetersaure Silberoxyd auch die vorhandene *Schwefel-* und *Phosphorsäure* fällte, so mufste hiervon erst das schwefelsaure Silber mit 0.381 und das phosphorsaure Silber mit 0.069 abgezogen werden; es bleibt daher als wahre Zahl für die drei übrigen Silbersalze noch 33.82.

Das Jod wurde nach der neuesten Methode von *Balard* und *Saubeiran* durch *schwefelsaures Eisenkupfer* gefällt. Der graue, beim Trocknen orange gewordene Niederschlag wog getrocknet und gewaschen nach zwei übereinstimmenden Versuchen für 1000 Th. 0.92. Diese bestehen nach den neuesten Atomenzahlen aus 0.61 Jod und 0.31 Kupfer, oder aus 0.54 Jodsäure und 0.38 Kupferoxydul. Das Wasser enthielt aber nicht *Jod*, sondern *Jodsäure*, weil die Stärke von demselben erst auf Zusatz von Salpetersäure oder Chlor blau gefärbt wird. 0.54 Jodsäure nehmen aber 0.18 Natron auf, und bilden damit 0.72 jodsaures Natron, welches man auch als Jodnatrium bestehend aus 0.61 Jod und 0.11 Natrium betrachten kann.

Diese geringe Jodmenge im Verhältnisse mit dem

Volumen der erhaltenen Jodstärke bedurfte noch einer Bestätigung; aufserdem brachte mich die orangegelbe Farbe des Jodkupfers auf die Vermuthung, es könnte mit Eisenperoxyd verunreinigt seyn. Ich stellte daher den gewöhnlichen Versuch an, der sich auf die Unlöslichkeit des jodsauren Silberoxyds im concentrirten Ätzammoniak gründet. Ich erhielt aus einem Loth Wasser 0.0011 in Ammoniak unlösliches Jodsilber, welches für 1000 Th. 1.10 Jodsilber gibt, das aus 0.56 Jod und 0.54 Silber, oder 0.49 Jodsäure und 0.61 Silberoxyd besteht. Um nun die früheren 0.61 Jod zu erhalten, hätte ich hier 0.00119 erhalten müssen; nun konnte ich aber die fünfte Decimalzahl auf meiner Wage nicht mehr bestimmen, wiewohl ich sah, dafs der Körper schwerer als 0.0011, und leichter als 0.0012 war. Da nun *Martini's* neueste Versuche gelehrt haben, dafs das Jodsilber im concentrirten Ätzammoniak nicht ganz unlöslich sey, und für die frühere Zahl zwei übereinstimmende Versuche sprechen, so kann man auch die 1.19 Jodsilber mit grosser Wahrscheinlichkeit annehmen. Zieht man aber diese 1.19 Jodsilber von den früher gefundenen 33.82 ab, so bleiben 32.63 für Chlor- und Bromsilber.

»Um Brom und Chlor quantitativ von einander zu trennen, ist bis jetzt noch keine Methode bekannt« (*Rose's* Handb. d. analytisch. Chemie, S. 526). In der That war das Brom in so geringer Menge vorhanden, dafs der Äther nur blafs weingelb gefärbt wurde, der Silberniederschlag, der das Chlor und Brom enthielt, nicht im mindesten gelb war, und letzteres nach abgeschiedenem Jod aus dem Wasser durch Stärke nicht geschieden werden konnte; ich glaubte daher in Dr. *Wagner's* Werkchen, S. 18, noch das *bromsaure Natron* als Spur ansetzen zu können. Indefs wollte ich doch später die Einzige zu diesem Zwecke bekannte Methode anzuwen-

den versuchen, wenn ich gleich von ihrer Unvollkommenheit überzeugt war, weil sie doch vor der Hand immer noch die Beste bleibt, und erhielt ein Resultat, das wenigstens nicht unwahrscheinlich war. Sie beruht darauf, dafs verdünntes Ätzammoniak zwar das Chlor-, nicht aber das Bromsilber auflösen soll. Nun wissen wir aber noch nicht, ob diese Eigenschaft sich auch auf die kleinsten Mengen ausdehnt, noch weniger aber, wie stark das Ammoniak verdünnt seyn müsse, um den erwarteten Erfolg zu leisten. Ich versuchte mit einer Mischung von 1 Th. Ätzammoniak und 5 Th. Wasser, und erhielt aus 2 Loth Wasser in jenem unlöslichen Brom- und Jodsilber 0.0024, also für 1000 Th. 1.20. Zieht man nun hiervon die oben für das Jodsilber bestimmte Zahl 1.10 ab, so bleibt 0.10 für das Bromsilber. Dieſs enthält 0.058 Silber und 0.042 Brom, oder 0.062 Silberoxyd und 0.038 Bromsäure, die mit 0.016 Natron 0 054 bromsaures Natron bildet oder Bromnatrium, wenn es aus 0.042 Brom und 0.012 Natrium zusammengesetzt angesehen wird.

Es bleiben sonach für das Chlorsilber 32.53. Diese enthalten 8.00 Chlor und 24.53 Silber, oder 6.190 Salzsäure und 28.34 Silberoxyd.

1000 Th. des Mineralwassers enthalten daher

Salzsäure . . .	6.190,	Natron	6.261,
Jodsäure . . .	0.540,	Lithon	0.283,
Bromsäure . . .	0.038,	Kalk	0.221,
Schwefelsäure . .	0.098,	Thonerde	0.201,
Phosphorsäure . .	0.012,	Talkerde	0.026,
	6.878.		6.992.

Im Ganzen 13870, mithin nur um 0.170 mehr, als der frühere Versuch betrug. Diese Differenz rührt vielleicht von einem Säureverlust, den die Salze beim Glühen erleiden.

Versucht man nun die quaternäre Zusammensetzung anzugeben, so scheint mit Berücksichtigung dessen, dafs

beim Abdampfen des Wassers weder Trübung noch Niederschlag entsteht, folgende Berechnung zur wahrscheinlichsten Zusammensetzung zu führen:

0.026	Talkerde	mit	0.050 Schwefelsäure, = 0.076 Bittersalz.
0.048	Schwefelsäure	»	0.021 Lithon, = 0.069 schwefels. Lithon.
0.262	Lithon	»	0.394 Salzsäure, = 0.656 salzsaurem Lithon.
0.012	Phosphorsäure	»	0.005 Alaunerde, = 0.017 saurer phosphors. Alaunerde.
0.221	Kalk	»	0.216 Salzsäure, = 0.437 salzsaurem Kalk.
0.196	Alaunerde	»	0.314 Salzsäure, = 0.510 salzs. Alaunerde.
0.540	Jodsäure	»	0.180 Natron, = 0.720 jodsaurem Natron.
0.038	Bromsäure	»	0.016 Natron, = 0.054 broms. Natron.
5.266	Salzsäure	»	6.065 Natron, = 11.331 Kochsalz.

Das Mineralwasser enthält daher in 1000 Th.

Schwefelsaures Lithon . .	0.069.
Schwefelsaure Talkerde . .	0.076.
Salzsaures Natron	11.331.
Salzsaures Lithon	0.656.
Salzsaurer Kalk	0.437.
Salzsaure Alaunerde . . .	0.510.
Phosphorsaure Alaunerde .	0.017.
Jodsaures Natron	0.720.
Bromsaures Natron . . .	0.054.
	13.870.

Aus diesem geht nun hervor, dafs das Haller Kropfwasser eines der vorzüglichsten auflösenden Wässer sey, denn schon die grofse Menge Kochsalz würde ihm diese Eigenschaft ertheilen; aufserdem kommt aber das *jodsaure Natron* dazu, welches zwar rücksichtlich der grofsen Wirkungen dieses Wassers in nur geringer Menge vorhanden zu seyn scheint, diefs aber nicht ist; denn wenn wir bedenken, dafs der stärkste Grad von *Lugal's eau minérale jodée (Mémoire sur l'emploi de l'iode dans les maladies scrofuleuses, par Lugal, Paris 1829)* auf 1000 Th. Wasser nur 0.173 Jod, unser Wasser aber 0.560 desselben enthält, und dafs *Lugal* nur in seltenen Fällen genöthiget war, zu dieser starken Auflösung zu greifen, so wird die grofse Wirksamkeit des Haller Jodwassers klar genug. Zudem müssen wir den bedeutenden Lithongehalt nicht übersehen, der gewifs seine auflösende Wirkung noch sehr erhöht, und so stark ist, dafs es daran allen bekannten Mineralwässern vorsteht, und sogar das *Klausnerwasser* übertrifft, welches ich noch vor einem Jahre als das lithonreichste aller bis dahin bekannten Mineralwässer erwähnen mufste.

Über die Anwendung dieses Mineralwassers gibt das bereits angeführte Werkchen hinreichenden Aufschlufs; hier verdient nur noch, als Merkwürdigkeit, des *Kropfbrotes* gedacht zu werden, welches von den Landleuten der Umgegend erzeugt wird, indem sie zum Befeuchten des Brotteiges statt gemeinem Wasser dieses Mineralwasser nehmen. Es dient früh nüchtern genossen als Heilmittel in allen jenen Fällen wie das Wasser selbst, vorzüglich wirksam aber ist es zur Vertreibung der Kröpfe, daher es auch seinen Namen hat.

IV.

Beschreibung einer neuen und einfachen Extractions- und Filtrirmaschine;

von

Joseph Knezaurek, Chemiker.

Das bisher übliche Verfahren, bei pharmaceutischen und andern technischen Arbeiten zu filtriren, hat den wesentlichen Nachtheil, dafs dasselbe viel zu langsam vor sich geht, besonders wenn in kleinen Quantitäten filtrirt wird, man daher zu viel Zeit dabei verliert, welcher Zeitverlust zu andern Verrichtungen verwendet werden könnte, und dafs in vielen Fällen immer etwas von der zu filtrirenden Flüssigkeit auf dem Filtrum zurückbleibt, welche nicht durchgetrieben werden konnte, daher als Abgang zu betrachten ist.

Man war daher von jeher bemüht, das Filtriren durch Verdichtung oder Verdünnung der Luft schneller zu betreiben, und hat dazu die Luftpumpe vorzüglich mit gutem Erfolge angewendet. Wenn man aber die Kostspieligkeit, und die so zu sagen mit mathematischem Fleifs auszuführende Zusammensetzung einer solchen Maschine betrachtet, und den Umstand, dafs selbe zu ihrer Bedienung einen schon gebildeteren Laboranten benöthigt, so wird man einsehen, dafs unter diesen Voraussetzungen selbe wenig Anwendung gestattet.

Es handelt sich also darum, einen Filtrirapparat zu construiren, der sich durch seine Einfachheit, Wohlfeilheit, Dauerhaftigkeit und leichte Behandlung vor allen andern Filtrirapparaten auszeichnen mufs, und der leicht handzuhaben ist, wenn ein allgemeiner und mehrfacher Gebrauch von ihm gemacht werden soll.

Ich habe mich daher bemüht, einen solchen Apparat zu construiren, der diesen Anforderungen entspricht, und der aufser seiner Einfachheit auch wohlfeil angefertigt werden kann.

Die Zeichnung (Fig. 1) und Beschreibung wird das Nähere davon erklären.

a b c d ist ein Cylinder aus verzinntem Eisen- oder Kupferblech, der oben offen ist. In denselben ist ein anderer Cylinder unten bei *c d* eingelöthet, so zwar, dafs beide Cylinder einen festen Körper bilden. Bei *n m* ist oben an den inwendigen Cylinder ein Filtrirtrichter von 90° oder 45° ebenfalls fest angelöthet. Diese Winkelgrade von 90 oder 45 sind aus dem Grunde nothwendig, weil, wenn man ein Fliefspapier in den Trichter einlegt, dieses Filtrum mit 90° oder 45° eingebogen ist. Dieser Filtrirtrichter ist von Zinn oder einem anderen Materiale, je nachdem man es mit Substanzen und Flüssigkeiten zu thun hat, die diese Metalle nicht oxydiren oder auflösen.

Der Zwischenraum von *m n*, *m n* ist nur so grofs zu machen, dafs der Cylinder *f g i o* bequem auf und ab gehen kann. Dieser Cylinder ist oben verschlossen, unten aber offen. Nun wird bis zu der Höhe *m n* Wasser eingegossen, und der Cylinder *f g i o* bewegt sich in dieser Wasserschichte auf und ab.

Früher, bevor dieſs geschehen, gieſst man in den Filtrirtrichter, der inwendig mit einem Filtrum von Fliefspapier oder Leinwand etc. versehen ist, die zu filtrirende Flüssigkeit, stellt das Gefäfs *D* unter den Filtrirtrichter, senkt den obern Cylinder, in der Lage, in der er gezeichnet ist, in das Wasser, verschliefst sodann die Pippe, und legt das Gewicht *h* auf den Cylinder, worauf das Filtriren alsogleich schnell vor sich geht.

Dieses Gewicht *h* mufs aber etwas weniger wiegen, als das Wasser wiegen würde, welches den cubischen Raum *nmio* mit Inbegriff der Höhlung einnehmen könnte; denn wäre dieses Gewicht *h* gröfser, so würde das Sperrungswasser bei *a* und *b* herausgedrängt werden.

Bei einer solchen Vorkehrung des Apparates geht das Filtriren sehr schnell vor sich, da das ganze Gewicht *h* die in dem Filtrirapparate vorhandene atmosphärische Luft zusammenpreſst, die zum Theil aber zusammengepreſste Luft, als mechanische Kraft, vermöge ihrem Expansivdruck auf die zu filtrirende Flüssigkeit einwirkt, so daſs selbe schnell durchgeht, und wenn man feste und flüssige Stoffe auf dem Filter hatte, eine Absonderung beider bezweckt wird, nämlich der feste Körper auf dem Filtrum verbleibt, und der flüssige in dem untergestellten Gefäſs *D* aufgefangen wird. Sodann wird die Pippe geöffnet, der Cylinder herausgezogen, und die Arbeit beginnt von Neuem, wenn man mehr zu filtriren hat.

Nimmt man anstatt reinem Wasser eine gesättigte metallische Salzauflösung in Wasser, als z. B. eine Eisenvitriolauflösung oder Kochsalzauflösung, welche ein bedeutend gröfseres specifisches Gewicht haben als reines Wasser, so kann bei gleicher Gröfse des Apparats das Gewicht *h* bedeutend gröfser genommen werden, der Expansivdruck der Luft auf die zu filtrirende Flüssigkeit ist viel mächtiger, und das Filtriren geht um so schneller vor sich. Im Verhältnifs der durchfiltrirten Flüssigkeit senkt sich der obere Cylinder.

Jedoch darf man diesen Druck nicht zu sehr überspannen, weil sonst die Filtra, wenn selbe aus Fliefspapier sind, in den untern Mündungen des Filtrirtrichters leicht zerreissen könnten. Es sind nämlich unten an dem Trichter einige kleine Öffnungen oder Löcher

angebracht. Hat man andere Filtra, z. B. von Leinwand oder anderen festeren Stoffen, so ist diese Vorsicht nicht nothwendig, weil schon eine grofse Gewalt dazu gehören würde, die etwas ausgebauchten Mündungen dieser Stoffe (nämlich in der Gegend der kleinen Öffnungen an dem untern Theil des Filtrirtrichters) zu durchbrechen.

Dafs die Filtra, sie seyen aus Fliefspapier, Leinwand oder sonst aus einem dazu geeigneten Stoffe, genau nach dem Winkel des Filtrirtrichters zugeschnitten werden müssen, um genau an den Wänden des Filtrirtrichters anzuliegen, versteht sich von selbst. Hat derselbe 90, 45 oder mehr oder weniger Grade, so müssen die Filtra dieselben Grade haben, damit sie sich inwendig an die Wände des Trichters genau anschliefsen.

Bei kleinen gläsernen, eisernen oder kupfernen Filtrirapparaten könnte man auch mit sehr kräftigem Erfolge als Sperrungsflüssigkeit Quecksilber anwenden.

In Beziehung der Verhältnisse der Gröfse der Filtrirapparate gebe ich Folgendes an:

Es ist jederzeit besser, den Apparat eher etwas gröfser als kleiner anfertigen zu lassen, weil, wenn man selbst eine kleine Menge irgend einer Flüssigkeit zu filtriren hat, man nur ein kurzes Filtrum in den Filtrirtrichter einzulegen braucht, um den Apparat gleich in Gang zu bringen. Auch kann man denselben, wenn es nothwendig wäre, inwendig mit einer harzigen Auflösung überstreichen, oder mit einer Lage gewöhnlichen Wachses versehen; letzteres dann, falls beim Filtriren man es nur mit kalten Flüssigkeiten zu thun hat, die filtrirt werden sollen.

Was die Gröfse des Filtrirapparates und der Cylinder anbelangt, so richtet sich dieselbe nach der Gröfse des Filtrirtrichters, wie aus der Zeichnung zu ersehen

ist. Wenn nämlich der Trichter eine Mafs Flüssigkeit aufnehmen soll, so wird derselbe auf eine Mafs angegeben mit einem Winkel von 90 oder 45 Graden.

Die Breite des äufsern Cylinders wird etwa um den sechsten oder achten Theil mehr betragen, als die Breite der obern Mündung des Filtrirtrichters, und seine Höhe kann etwa das Doppelte oder Dreifache der Breite betragen.

Beträgt nämlich die Breite des äufsern Cylinders einen Schuh, so wird seine Höhe zwei, höchstens drei Schuh ausmachen, und man wird den Zwischenraum *m n* nur so weit von einander stellen, dafs das obere Gefäfs bequem auf und ab gehen kann. Diese Verhältnisse scheinen die geeignetesten zu seyn.

Aber auch zur Extractbereitung, ferner zur Darstellung verschiedener ausziehbarer Farben aus Rinden, Blättern, Wurzeln und Hölzern, zu concentrirten Gerbestoffauflösungen, zur Austrocknung feuchter Stärke, bei der Stärkefabrication, und zu anderen technischen Arbeiten kann die von mir angegebene Filtrirmaschine gebraucht und verwendet werden, wobei im Grofsen in manchen Fällen hölzerne Filtrirapparate dienen können.

Man kann selbe daher auch mit vollem Rechte eine Extractionsmaschine heifsen, welche die hydrostatische *Real*'sche Extractionspresse in manchem Falle recht gut zu ersetzen im Stande ist, da die *Real*'sche Presse, durch die dabei in Anwendung gebrachten langen Röhren, die senkrecht aufgestellt werden müssen, äufserst unbequem gehandhabt, und nicht an alle Orten aufgestellt werden kann. Auch zur Darstellung eines kräftigen Caffehs, der Bierwürze, ist meine Presse geeignet, wo man als Filtra Haarsiebe, Leinwand, Stroh oder geschrotenes Malz verwenden kann.

Es ist übrigens nicht nothwendig, die Filtrirvorrichtung trichterartig machen zu lassen, selbe kann auch eine jede beliebige andere Form, als z. B. die eines Tenakels haben, wo ein Jeder nach seinem Bedarf sich eine Form wählen kann, welche er will.

Die Form, welche die Fig. 2 angibt, ist auch recht gut.

Zwei durchgelöcherte horizontale Scheiben, die an einander genau abgeschliffen sind, um gut zu schliefsen, ersparen hier das Fliefspapier, die Leinwand etc. Da die Löcher, wenn die obere Scheibe auf die untere angelöthete gelegt wird, nicht auf einander passen, so mufs sich die durchgepreſste Flüssigkeit durch diese Scheiben dnrchzwingen, und läuft daher in ein untergestelltes Gefäſs klar ab.

Dafs das Verdampfen bei meinem Filtrirapparat, der geschlossen ist, vermieden wird, ist einleuchtend.

Hat man es mit geistigen Extracten oder Filtrationen zu thun, so ist die Ersparung an geistigen Theilen, z. B. des Alkohols, in einem Jahre sehr bedeutend; und sind andere scharfe Substanzen, die die Lunge und Augen angreifen, zu extrahiren oder zu filtriren, so werden diese Übelstände bei Anwendung meines geschlossenen Apparates gröſstentheils vermieden.

V.

Über die Härte der Krystalle *);

vom

Prof. *M. L. Frankenheim* in Breslau.

1) Die Resultate der Versuche, welche in der neuesten Zeit zur Erforschung der Gesetze, nach welchen die Cohäsionskraft wirkt, mit der gröfsten Sorgfalt angestellt wurden, sind zu verschieden, als dafs sie aus einer chemischen Verschiedenheit der untersuchten Körper oder aus Beobachtungsfehlern erklärt werden könnten. Massive metallene Cylinder, langsam abgekühlt, zerreissen schon bei einer Belastung von 100 Pf., während dieselben, zu feinen Drähten gezogen oder schneller gekühlt, bei einerlei Querschnitt nicht einmal unter dreifacher Belastung zerreissen. Einige suchen die Gründe dieses Unterschiedes in der Verschiedenheit der Anordnung der Theile, ohne durch diese neue Vorstellungsart die an sich dunkle Sache deutlicher zu machen. Für Jene, welche der Annahme von Atomen widerstreben, hat diese Vorstellungsart gar keinen Sinn, und Jenen, die das Daseyn derselben behaupten, ist es durchaus nicht klar, bei welcher Anordnung der Theile die gröfsere oder geringere Wirkung der Cohäsionskraft Statt findet, so dafs bis jetzt noch unter den ausgezeichnetesten französischen Forschern über die Gesetze der Cohäsionskraft die gröfste Meinungsverschiedenheit herrscht.

*) Dieser Aufsatz wurde in lateinischer Sprache als gedruckte Dissertation eingesendet. Er verdient gewifs eine gröfsere Verbreitung, als Dissertationen in der Regel erlangen, darum folgt hier eine Übersetzung.

2) Wir können aber kaum hoffen, dafs uns je durch Körper von cylindrischer oder Drahtform, wie sie bis jetzt angewendet worden, die Geheimnisse der Cohäsionskraft enthüllt werden, denn diese sind nicht einfach, sondern, wie es mikroskopische Beobachtungen lehren, aus mannigfaltig verbundenen Körnern oder Fäden zusammengesetzt; ihr Gefüge scheint zwar gleichartig, aber ihre Gestalt ist durch eine äufsere Kraft entstanden. Die Gesetze, nach denen die Cohäsionskraft wirkt, lassen sich aber nur an jenen Körpern gehörig erkennen, welche durch keine äufsere Kraft verändert worden sind, sondern ihre Gestalt der freien Wirkung ihrer Anziehungskraft verdanken. Diefs findet aber nur bei Krystallen Statt, die Stärke ihres Zusammenhanges ist daher jener Untersuchung würdig, deren sie bis jetzt fast gänzlich entbehrte.

3) Es ist zwar zu bedauern, dafs die Krystalle viel zu klein und zu ungleichartig sind, als dafs ihr Zusammenhang oder ihre Elasticität auf dieselbe Weise geprüft werden könnten, wie die anderer Körper; allein es findet sich glücklicher Weise an ihnen ein anderes Merkmal der Cohäsionskraft vor, nämlich die *Härte*, deren Anzeigen, wiewohl weniger genau, dennoch da von grofsem Nutzen sind, wo andere Mittel fehlen.

Die Mineralogen aus *Werner's* Schule, welche sich mit allen Eigenschaften der Naturkörper beschäftigten, die sich auf keine Weise, selbst nicht mit Hülfe künstlicher Vorrichtungen, erkennen lassen, haben auch Tafeln der relativen Härte der Naturkörper entworfen, welche zwar sehr zu ihrem Zwecke pafsten, dessen ungeachtet aber den Physikern bis jetzt von keinem Nutzen waren. Denn das, was bei der Härte der Krystalle eigentlich am meisten zu berücksichtigen und bei der Untersuchung des Zusammenhanges der Theile in Krystallen von der

gröfsten Wichtigkeit war, nämlich die Verschiedenheit der Härte an verschiedenen Stellen eines und desselben Körpers haben sie aufser Acht gelassen, und doch ist dieselbe bei einigen Körpern, z. B. beim Cyanit, Gyps, so auffallend, dafs sie sehr leicht wahrgenommen werden und den Mineralogen kaum entgehen konnte, da fast überall eine solche Verschiedenheit angetroffen wird.

4) Auch hielt es nicht schwer, eine Vorrichtung zu ersinnen, um den Krystall mit einem Körper stets mit gleicher Stärke zu streichen. Doch da es sich darum handelt, die Verschiedenheiten der Härte zu gewahren, defshalb die Lage der Krystalle oft zu verändern und sie mit verschiedenen Körpern zu streichen, so bietet die Einrichtung eines solchen Apparates um so weniger einen Vortheil, als schon das Gefühl der Stärke des Striches die hierzu von Jugend an gewöhnte Hand mit solcher Empfindlichkeit leitet, dafs man bei diesen Versuchen keines andern Hülfsmittels bedarf. Die Körper, deren ich mich so zum Streichen bediente, waren Stängelchen oder Nadeln von Zink, Blei, Zinn, Gold, Silber, Kupfer und Eisen von verschiedener Härte; bei härteren Körpern dienten mir der Topas und Saphir. Aus diesen Körpern wählte ich jene, welche den zu prüfenden Krystall an Härte am wenigsten übertrafen, oder ich strich sie, wenn sie härter waren, mit solcher Stärke, dafs das Verhältnifs der Härteunterschiede im Krystalle und dem streichenden Körper möglichst grofs ausfiel. Bei jedem Krystalle wurden aber nur jene Beobachtungsresultate mit einander verglichen, welche mittelst desselben Stängelchens möglichst schnell hinter einander erhalten wurden.

Schlägt man diesen Weg mit Sorgfalt ein, so wird man, wenn es auch nicht gelingt, die Verhältnisse der Cohäsionskrsft in Zahlen auszudrücken, doch wenigstens

dahin gelangen, die geringsten Härteunterschiede wahrzunehmen, wenn nur die zu prüfenden Flächen äufserst glatt, rein und wo möglich vor Kurzem blofsgelegt sind. Rauhe Flächen eignen sich zu diesen Versuchen nicht, weil der streichende Körper wie ein Hebel wirkt, der seine Unterstützungspuncte an den hervorragenden Stellen findet, und daher selbst bei gleichem Drucke mit der Hand den Körper stärker streicht, und ihn auf diese Weise weniger hart erscheinen macht.

5) Es gibt zweierlei Härteunterschiede; die einen finden an derselben Fläche nach verschiedenen Richtungen, die anderen an verschiedenen Flächen desselben Krystalls Statt. Die ersteren sind gröfstentheils viel geringer als die letzteren, und nur mit gröfserer Mühe zu gewahren, gestatten aber auch, einmal entdeckt, eine gröfsere Sicherheit. Denn die Ursachen, welche eine Änderung der Oberflächen bewirken, der Einfluſs des atmosphärischen Wassers oder der Rauheiten vermindern oder verwischen gar die Härteunterschiede, ohne jedoch ihr Verhältnifs in verschiedenen Richtungen so zu verkehren, dafs jene, welche zuvor härter war, jetzt weicher geworden wäre. Ja nicht einmal an künstlich polirten, welche viel weniger glatt als die natürlichen sind, fallen die Härteunterschiede immer ganz weg, sobald die Streifen fehlen, die man sehr häufig an Krystallen wahrnimmt, und die jede Prüfung der Härte verhindern, weil sie nach verschiedenen Richtungen verschieden wirken. Denn die den Streifen parallelen Linien sind glätter und aus Ursachen, die wir oben erwähnten, viel härter als jene, welche auf den Streifen senkrecht stehen. Häufig findet man jedoch an jenen Körpern, an welchen man zuweilen Streifen trifft, selbst die glatten Flächen in der auf die Streifen senkrechten Richtung minder hart, als in der zu ihnen parallelen.

6) Wir wollen mit jenen Unterschieden, welche an derselben Fläche wahrgenommen werden, den Anfang machen, weil sie einfacher sind. Denn es mag die Wirkung der Cohäsionskraft in der auf die Fläche senkrechten Richtung wie immer geartet seyn, so bleibt sie nach allen Richtungen, die in der Fläche selbst gezogen werden, stets dieselbe, und kann keinen Unterschied hervorbringen. Solche Unterschiede müssen, wo sie gefunden werden, von einer Seitenwirkung der Cohäsionskraft herrühren. Jene Richtungen werden von den Krystallographen für gleich geachtet, haben auch dieselbe Härte, und wo die Härte ungleich ist, da findet sich auch in den Axen oder Abmessungen der Krystalle ein Unterschied.

7) Körper, welche ihren chemischen Eigenschaften nach ganz verschieden sind, doch dieselben oder einander ähnliche Gestalten besitzen, befolgen dieselben Gesetze der Härte. Dieses ist aber nicht so zu nehmen, als hätten sie dieselbe Härte, ja sie können hierin viel von einander abweichen, sondern es finden für sie dieselben Härteverhältnisse Statt. Beispiele liefern der kohlensaure Kalk, salpeters. Natron, Flufsspath und salpeters. Strontian. Diese Übereinstimmung findet sich aber nur bei solchen Körpern, deren Krystalle in der That ähnlich sind, nicht bei jenen, die gegen ihre Natur nur künstlich in dieselbe Ordnung gebracht sind, wie diefs z. B. beim Flufsspath und Chlornatrium der Fall ist, bei welchen schon die Lage des Blätterdurchgangs zeigt, dafs sie ihre Gestalt verschiedenen Anziehungsgesetzen verdanken. Zwischen der Richtung des stärksten und schwächsten Blätterdurchgangs und der Härte herrscht der innigste Zusammenhang, und zwei Körper, welche zwar dieselbe Gestalt, aber verschie-

dene Blätterdurchgänge besitzen, werden gewifs in ihren Härteverhältnissen von einander abweichen.

Im *Weifs*'schen zweiaxigen oder im *Mohs*'schen prismatischen Systeme kann es zwei Arten von irgend einer Axe parallelen Blätterdurchgängen geben: deren sind entweder zwei gleiche, aber unter einem spitzigen Winkel gegen einander geneigte, oder es gibt nur einen einzigen, und wenn ihrer zwei sind, so sind sie ungleich und stehen auf einander senkrecht. Ersteres findet am Baryt, letzteres am Anhydrit Statt.

Beim Baryt sind von drei Flächen des stärksten Blätterdurchganges zwei den Flächen des Prisma's von 101° 42′ parallel, eine darauf senkrecht. Auf dieser Fläche habe ich die geringste Härte parallel zur kürzeren Diagonale oder senkrecht auf die abgestutzte stumpfe Kante gefunden, die gröfste Härte hingegen parallel zur längeren Diagonale oder senkrecht auf die abgestutzte scharfe Kante. Ähnliches fand ich an andern Körpern derselben Gattung.

8) Dasselbe Härteverhältnifs findet man an jenen Flächen, gegen welche zwei gleichartige Blätterdurchgänge zwar schief, aber symmetrisch geneigt sind, wie dieſs bei vielen Körpern des einaxigen, rhomboëdrischen Systemes u. s. w. der Fall ist, z. B. beim kohlensauren Kalk, salpetersauren Natron, wo in der Richtung parallel zur längern Diagonale eine gröfsere, parallel zur kürzern eine geringere Härte Statt findet. In den mittleren Richtungen fand ich auch eine mittlere Härte, jedoch nicht so, dafs sie gleichförmig von der kürzeren Diagonale gegen die längere hin zunähme, sondern oft liegt die Stelle der mittleren Härte jener der gröfsten Härte näher als der der geringsten.

9) Andere Gesetze befolgen jene Krystalle, welche zwei, zwar ungleichartige, aber unter sich und auf die

zu prüfende Fläche senkrechte Blätterdurchgänge haben. Beim Anhydrit gibt es drei auf einander senkrechte, leicht zu trennende (d. h. sehr deutliche) Blätterdurchgänge, von welchen wir den deutlichsten mit *A*, den andern mit *B*, und den dritten minder deutlichen und glänzenden mit *C* bezeichnen wollen. In der Fläche *C* sind die Härteunterschiede viel zu gering, als dafs sie mit Sicherheit erkannt werden könnten. In der Fläche *A* findet sich aber die geringste Härte senkrecht auf die Fläche *B*, die gröfste entweder senkrecht auf *C* oder senkrecht auf die Diagonale, so dafs die Richtung der gröfsten Härte viel weniger bestimmt, und die mittlere Härte der kleinsten näher liegt als der gröfsten.

Eben so verhält es sich in der Fläche *B*, wo die geringste Härte senkrecht auf *A* sich findet, die Richtung der gröfsten aber zwischen den Diagonalen und der auf *C* senkrechten Kante unbestimmt ist.

An der Endfläche des Borax steht die Richtung der geringsten Härte senkrecht auf der abgestutzten scharfen Kante des Würfels, d. i. senkrecht auf dem deutlichsten Blätterdurchgange.

Ähnliches findet man an allen jenen Flächen anderer Krystalle, welche gegen die Richtung zweier auf einander senkrechter Blätterdurchgänge unter rechtem oder nicht sehr schiefem Winkel geneigt sind. In der auf dem deutlicheren Blätterdurchgang senkrechten Richtung, oder wo nur ein Blätterdurchgang beobachtet wird, in der darauf senkrechten Richtung, sind sie weicher im Striche als in jeder andern Richtung.

10) Da die Krystalle der zwei doppelaxigen Systeme eine so verschiedene Härte zeigen, so war es mir von grofser Wichtigkeit, jene Körper zu prüfen, in welchen die Eigenschaften beider vereinigt sind, nämlich jene Krystalle, welche zwei sowohl gleiche als auch auf die

zu prüfende Fläche senkrechte Blätterdurchgänge besitzen, mithin die Endflächen der Krystalle des vieraxigen oder pyramidalen, oder die Hexaëderflächen des Tessular-Systemes. Es war mir wahrscheinlich, dafs diese Unterschiede, wenn es hier welche gäbe, nur mit gröfster Mühe aufgefunden werden könnten, da an den einzelnen Flächen wegen der symmetrischen Form blofs zwei unter 45° geneigte Maxima und Minima vorkommen können. Aber auch hier habe ich Unterschiede gefunden, wie ich sie dem Vorhergehenden gemäfs erwartete.

Beim Chlornatrium, dessen Blätterdurchgang hexaëdrisch ist, fand ich die den Diagonalen parallelen und sorgfältig untersuchten Linien härter als jene den Kanten parallelen. Beim Flufsspathe, dessen Blätterdurchgang octaëdrisch ist, gehen durch die hexaëdrischen Flächen vier, durch die einzelnen Diagonalen zwei Spaltungsrichtungen. So wie die Härte nach den Kanten am Chlornatrium, eben so ist die nach den Diagonalen am Flufsspathe beschaffen, und so wie an jenem Körper sich die Diagonalen härter zeigen, eben so sind es an diesem die Kanten; es unterliegt keinem Zweifel, dafs diefs von der Biegsamkeit des Meersalzes herrührt, denn bei geschmeidigen Körpern wirkt die Cohäsionskraft nach andern Gesetzen als bei starren, aber bei jenen lassen sich Härteunterschiede nicht so leicht unterscheiden, so dafs ich bis jetzt nicht im Stande war, an biegsamen Körpern, z. B. an krystallisirten Metallen etc., einen solchen Unterschied zu bemerken.

11) Sind schon jene Härteunterschiede, welche an einer Fläche ein zweifaches Maximum und Minimum erreichen, sehr schwer aufzufinden, um so schwerer ist dieses bei jenen, welche einem drei- oder mehrfachen Wechsel unterliegen. Aus dieser Ursache gelang es auch

nicht, an Flächen senkrecht auf eine Axe des drei- oder sechsaxigen Systemes, oder an kürzlich entblöfsten und wiederholt sorgfältig geprüften Flächen des Octaëders längs den den Kanten parallelen Dreiecksseiten, und jenen, die gegen sie unter 30° geneigt sind, irgend einen Unterschied zu entdecken. Doch folgt daraus nicht, dafs es daselbst wirklich keine Unterschiede gebe. Übrigens hemmt nicht die Anzahl der Seiten-Blätterdurchgänge, sondern ihre Lage die Untersuchung, da, wenn auch an den Octaëderflächen des Flufsspathes schon bei drei Blätterdurchgängen die Unterschiede verschwinden, doch noch nicht an den Hexaëderflächen desselben Krystalls vier, ja am schwefelsauren Zink nicht einmal fünf Blätterdurchgänge allen Unterschied verwischen.

Die Blätterdurchgänge dieses Körpers sind den Flächen des Rhombendodecaëders parallel. Durch die einzelnen Rhomben gehen fünf Blätterdurchgänge, deren vier den Kanten des Rhombus, der fünfte der längern Diagonale parallel sind. Diese Flächen lassen sich leichter nach Richtungen, die parallel zur kürzern Diagonale sind, ritzen, als nach den zur längeren Diagonale oder zu den Kanten parallelen. Die Ursache davon läfst sich leicht einsehen, denn die vier den Kanten parallelen Blätterdurchgänge bringen aus obigen Ursachen parallel zur kürzern Diagonale eine geringere Härte hervor. Nach dieser Richtung wäre auch vermög der Wirkung des fünften Blätterdurchganges allein die Härte am geringsten; kein Wunder also, dafs sich die längere Diagonale viel härter als die kürzere beweist. Auch fand ich nicht einen Krystall dieses Systemes, an welchem ich so auffallende Härteunterschiede hätte wahrnehmen können.

12) Diese Beispiele habe ich von Krystallen des Tessular-Systemes nicht etwa defshalb entlehnt, als wenn ich nur dieses allein der Prüfung unterworfen hätte, son-

dern weil sie beweisen, dafs es auch in diesem Systeme Unterschiede im Zusammenhange der Theile gebe, obschon man sie weder mittelst der Wirkung der Wärme noch der des Lichtes aufzufinden vermag; und dafs dieser Zusammenhang der Theile an Krystallen, der wahrscheinlich die Polarisation des Lichtes begründet, dennoch nicht dieselben Gesetze befolget *).

13) Aus dem, was wir bei Krystallen von hexaëdrischem oder octaëdrischem Blätterdurchgange anführten, kann man die oben erwähnten Härteverhältnisse anderer Flächen ableiten. Bei gleichartigen und rechtwinkeligen Blätterdurchgängen haben wir nach den darauf senkrechten Richtungen, die wir normal nennen wollen, eine geringere Härte gefunden, als nach den Diagonalen. Wenn die Härte nach der einen Normale wächst, während sie nach der andern dieselbe bleibt, so wächst zwar die Härte nach den gegen die Normale unter 45° geneigten Richtungen, aber in einem kleineren Verhältnisse als nach der Richtung der Normale selbst; und war sie zuvor etwas geringer, so nähert sie sich alsbald allmählich der Härte nach der Richtung der Diagonalen, ja wächst die Härte gar schnell, so kann es geschehen, dafs sie auch schnell die nach den Diagonalen übertrifft, und es ist kein Zweifel, dafs die Härte der Normalen sich desto mehr ändere, je gröfser bei gleichen Umständen der Unterschied ist, welcher in den gehörig gelegenen krystallographischen Abmessungen herrscht. Auch wäre es von grossem Nutzen, jene Abmessungen ausgemittelt zu haben,

*) Dafs es dieser Zusammenhang sey, der die Polarisirung des in die innern Theile der Körper eindringenden Lichtes begründet, und die Gesetze bestimmt, nach welchen sowohl Glasarten von ungleichem Zusammenhange als auch Krystalle das Licht brechen, diefs werde ich bei einer anderen Gelegenheit erörtern. *(F)*

längs welchen die Härte nach den Diagonalen der nach der Normalen gleich kommt, wiewohl es kaum durch Versuche bestimmt werden kann, da die Härteunterschiede zwischen der Diagonale und den Normalen nicht nur geringer als bei Körpern des Tessular-Systemes sind, sondern man auch häufig ungewifs ist, ob die Härte nach den Normalen oder nach der Diagonale am gröfsten ist. Diefs haben wir auch an den Flächen *A* und *B* beim Anhydrit gesehen, wo die Richtung der kleinsten Härte leicht, jene der gröfsten aber fast gar nicht bestimmt werden konnte. Dasselbe findet man bei andern Körpern. Wo sich eine grofse Härteverschiedenheit vorfindet, da stimmen die Richtungen der gröfsten und kleinsten Härte fast mit den Normalen überein, wie beim Gyps in der Richtung der Flächen des schwächeren Blätterdurchgangs.

14) Diefs über die erste Ordnung der Krystalle dieser Gattung. Es findet aber bei jenen, wo die Härte nach den Normalen zwar gleich bleibt, aber ihr Winkel stumpf wird, ein anderes Härteverhältnifs Statt. Wenn wir die Bezeichnung: Diagonale beim neuen Parallelogramme, beibehalten, so können wir sagen, dafs die Härte derjenigen Diagonale, welche den spitzigen Winkel der Normalen schneidet und ihnen daher näher tritt, vermindert, und die Härte der kürzern Diagonale vermehrt werde. Je näher sie den Normalen tritt, desto weniger wird sie von der längern Diagonale an Härte übertroffen, und es ist kein Zweifel, dafs auch hier die Härteverhältnisse eine von dem Winkel der Normalen abhängige Function sind, aus welcher, wenn sie bekannt wäre, leicht gefunden werden könnte, bei welchen Winkeln die Härte nach der kürzern Diagonale der nach der Normalen gleich kommt, ja sie sogar übertrifft. Auch hätte ich aus den Versuchen, welche ich anführte, die Function zwischen der Härte und jenen Winkeln oder Abmes-

sungen suchen können, wenn Formeln, welche nicht durch eine grofse Zahl ausführlicher Versuche begründet sind, Vertrauen verdienten.

15) An Krystallen dieses Systemes, und zwar an dem Parallelogramm, welches durch einen der Endfläche des Prisma's parallelen Schnitt entsteht, habe ich folgendes gefunden:

Am kohlensauren Kalk, schwefelsaurem Baryt und an ähnlichen, findet sich die gröfste Härte in der Richtung der längern Diagonale, die geringste aber zwischen der kürzern senkrecht auf die abgestutzte stumpfe Kante und den Normalen. An Körpern hingegen, die dem Anhydrit ähnlich sind, und wo entweder ein oder zwei rechtwinkelige Blätterdurchgänge sich vorfinden, steht die Richtung der geringsten Härte in der längern Diagonale auf der abgestutzten scharfen Kante senkrecht, die der gröfsten Härte liegt aber zwischen der kürzern Diagonale und den Kanten.

16) Prismen, welche ich gemeine nannte, sind nicht immer solche, welche von den Krystallographen die einfachste Bezeichnung erhalten haben, sondern jene, welche entweder häufiger vorkommen, oder bei welchen der stärkere Blätterdurchgang den prismatischen Flächen parallel ist. Diese stimmen häufig mit der *Weifs*'schen Bezeichnungsweise, und bei den dem Anhydrite ähnlichen Krystallen auch mit der *Mohs*'schen überein; nicht aber bei den dem Baryte ähnlichen Körpern, wo das Octaëder, dessen sich dieser ausgezeichnete Gelehrte immer als Grundgestalt bedienen wollte, jenem Prisma diese einfache Bezeichnung nicht zu geben vermochte, weil die Lage der abgeleiteten Flächen gegen einander in den zwei Ordnungen dieses Systemes verschieden ist. Diese Verschiedenheit ist so auffallend, dafs man bei jenen Körpern, deren Blätterdurchgänge nicht wahrgenommen

werden, aus dem bloſsen Gefüge der Flächen entscheiden könnte, zu welcher Ordnung sie gehören. Was aber noch in diesem und andern Systemen über das Gefüge der Flächen, wobei noch das meiste vom Zufalle und von keinem Gesetze abzuhängen scheint, zu bemerken komme, dieſs wollen wir bei einer anderen Gelegenheit besprechen.

(Die Fortsetzung folgt.)

VI.

Fortschritte der Physik in der neuesten Zeit.

A. Electricität.

1. Magnetisiren durch Electricität. Von *G. Moll.*

(Bibl. univ. Sept. 1830, p. 19.)

Dem deutschen physikalischen Publikum ist durch einen in *Schweigger's* Journal, Bd. 58, S. 273 enthaltenen, von *Pfaff* in Kiel herrührenden Bericht die auſserordentliche magnetisirende Kraft eines electrischen Stromes bekannt, der durch einen dicken Kupferdraht spiralförmig um ein weiches, in Form eines Hufeisens gebogenes Stück Eisen geleitet wird. Diesem Berichte gemäſs erlangt ein solches Hufeisen von 2 Decimeter (7.6 Zoll) Länge und 12 Millimeter (5.5 L.) Dicke, um das ein 3 Millimeter (1.4 L.) dicker Kupferdraht in 170 Windungen herumgeführt wurde, durch den electrischen Strom, wie ihn ein *Volta'*sches Element liefert, das aus einem $2^1/_2$ Decimeter (9.5 Z.) hohen, 2 Centim. (0.8 Z.) weiten cylindrischen Kupferkasten und einem entsprechenden Zinkcylinder besteht, und als flüssigen Leiter eine aus 16 Th. Wasser, 1 Th. Salzsäure und $^1/_2$ Th. Salpe-

tersäure gemischte Flüssigkeit enthält, eine magnetische Kraft, mittelst welcher es 6, 8 ja 10 Pfund tragen kann. *Appel* in Göttingen hat Apparate zu solchen Versuchen dem physikalischen Publikum käuflich angeboten, die noch mehr leisten, als der vorher besprochene. Auch hier in Wien ist dieser Versuch mit Erfolg angestellt worden, und es werden auch da fast von jedem mechanischen Künstler die dazu nöthigen Apparate gearbeitet. Bei einem derlei Versuche trug das Hufeisen, das vor dem Versuche keine Spur von Magnetismus zeigte, nach Schliefsung der Kette mittelst eines *Volta*'schen Elementes, wovon die Zinkplatte 2 F. breit und eben so hoch ist, 15—20 Pfund. Alles dieses wird bei weitem von dem übertroffen, was *Moll* in dem Aufsatze anführt, von welchem hier das Wichtigste folgen soll:

Das Hufeisen besteht aus englischem, weichen Eisen, einen engl. Zoll dick, und ist mit einem $^1/_8$ Z. dicken Kupferdrahte 83 Mal spiralförmig überwunden. Das Ganze wiegt nahe 5 Pf. Eine Armatur von der gewöhnlichen Einrichtung dient zur Verbindung beider Füfse des Hufeisens mit einander, und hat ein Gewicht von $1\,^1/_4$ Pf. Der Electromotor besteht aus einem einzelnen Elemente, dessen Theile ein Kupfertrog und eine darein passende Zinkplatte sind. Die mit dem flüssigen Leiter in Verbindung stehende Fläche des Zinkes hat 11 engl. Quadratfufs. Die leitende Flüssigkeit ist Wasser mit $^1/_{60}$ Schwefelsäure und $^1/_{60}$ Salpetersäure dem Gewichte nach. Dieser Apparat erzeugt einen so kräftigen Magnetismus, dafs man an die Armatur 50 Pf. hängen kann, ohne dafs ein Ablassen des Gewichtes erfolgt, ja wenn man die Belastung sorgsam wachsen läfst, so kann man sie auf 76 Pf. steigern. Diese Kraft läfst an ihrer Stärke alsogleich nach, sobald der electrische Strom unterbrochen ist, wenn man aber die Belastung unter ihrem Ma-

ximum läfst, so bleibt sie noch mehrere Minuten am Hufeisen hängen, und zwar desto länger, je tiefer diese Belastung unter dem Maximum steht. Kehrt man aber die Richtung des electrischen Stromes um, so fällt das Gewicht ab, man mag sich mit der Auswechslung der Polardrähte wie immer beeilen, doch zieht das Hufeisen augenblicklich wieder Eisen an. Nur bei einer sehr schwachen Belastung mittelst einer Stahlnadel kann man es dahin bringen, dafs dieselbe während der Umkehrung des electrischen Stromes nicht abfällt, indem jeder Pol derselben so schnell in den entgegengesetzten übergeht, dafs sie nicht Zeit hat, sich durch die Schwere hinreichend vom Hufeisen zu entfernen, um nicht wieder angezogen zu werden. Sie nimmt im Augenblicke des Polwechsels eine kleine Bewegung an, fällt aber in der Regel nicht ab. Hält man während der Umkehrung des electrischen Stromes die Armatur mit der Hand, so fühlt man gleichsam die Geschwindigkeit, mit welcher die Pole verwechselt werden, indem in dem Augenblicke, wo der Magnetismus des Eisens $= o$ ist, das Eisenstück, das nun ganz der Schwere überlassen ist, einen vorübergehenden Druck auf die Hand ausübt.

Wenn man die Belastung so sehr vermehrt, dafs sie abfällt, so trägt der Magnet nicht gleich wieder so viel, als er vorhin zu tragen vermocht hat, bekommt aber nach einiger Zeit wieder seine vorige Kraft. Dasselbe habe auch ich bei Wiederholung dieses Versuches deutlich wahrgenommen *). Es verhalten sich demnach diese Magnete wie andere künstlich durch Streichen erzeugte. Dafs man mit einem Hufeisen der genannten Art andere Stäbe magnetisiren kann, ist für sich klar.

Die Stärke des Magnetismus, den man durch den

*) Mit dem S. 107 beschriebenen Elemente. *(B.)*

electrischen Strom zu erzeugen im Stande ist, hängt nicht immer von der wirksamen Fläche des Electromotors ab. Dieses zeigte sich bei folgenden Versuchen *Moll's*. Dieser Gelehrte verband mit dem zuerst gebrauchten *Volta*'schen Elemente ein zweites so, dafs Kupfer mit Kupfer, Zink mit Zink communicirte, und beide Elemente gleichsam ein einziges von doppelter wirksamer Fläche, nämlich von 17 Quadratfufs, ausmachten. Der Magnet vermochte, als der von diesem Electromotor gelieferte Strom ihn umkreisete, kein gröfseres Gewicht zu tragen, als vorhin. Messingdraht wirkte wie Kupferdraht; ein kupfernes Hufeisen, auf gleiche Weise behandelt wie das eiserne, zeigte keine Spur einer magnetischen Kraft. Eisendraht statt des Kupfers oder Messings gebraucht, und vom Hufeisen durch einen Seidenüberzug recht isolirt gehalten, brachte an dem letzteren eine magnetische Kraft hervor, vermöge welcher er 86 Pf. zu tragen im Stande war.

Ein Hufeisen aus deutschem Schmiedeeisen von $2\,^1/_4$ Z. Dicke und $12\,^1/_2$ Z. Weite, mit $^1/_8$ Z. dickem Messingdraht in 44 Gängen umwunden, trug mittelst einer Armatur von 4 Pf., als ein electrischer Strom von einem Elemente mit 11 Fufs wirksamer Oberfläche ihn umströmte, 135 Pf., ja als er durch einen Seidenüberzug gut isolirt war, gar 154 Pf. Stärkere Magnete hat man bis jetzt überhaupt selten zu Stande gebracht. *Galiläi* soll einen Magnet von 6 Unzen Gewicht zu Stande gebracht haben, der 15 Pf. trug; der berühmte Magnet im Harlemer Museum trug 150 Pf., und sammt der Armatur 200 Pf., nach *Van Marum* gar 230 Pf.; in Amsterdam soll ein Magnet existiren, der 50 Pf. trägt; der gröfste von *Lenoble* verfertigte Magnet trug 105 Pf.; jener Magnet, den ein chinesischer Kaiser dem Könige *Johann V.* von Portugall geschenkt hat, soll 200 Pf. getragen ha-

ben; ein Magnet, den Prof. *Allamand* in Leiden besafs, trug 120 Pf.; *Coulomb* besafs einige Magnete, die 20 Pf. wogen, und 125 Pf. trugen; der deutsche Gelehrte *Keil* endlich soll einen Magnet verfertiget haben, der 150 Pf. trug. Demnach gehört der von *Moll* durch Electricität erzeugte Magnet zu den stärksten, die man bis jetzt erzeugt hat.

2. Über die physiologischen Wirkungen eines electrischen Stromes auf einen Frosch. Von *L. Nobili.* (Fortsetzung.)

(Bibl. univ. Juni 1830.)

Es war bereits im Bd. VIII. dieser Zeitschrift die Rede von den eigenthümlichen Wirkungen, welche ein electrischer Strom (nach *Nobili*) auf einen entblöfsten Froschcruralnerv ausübt. Diese Wirkung läfst sich nach dem Grade der Reizbarkeit des Thieres in fünf Perioden eintheilen, die bereits aufgezählt und näher charakterisirt sind. Nun sollen die in diesen fünf Abstufungen hervortretenden Phänomene näher beleuchtet und erklärt werden.

In der ersten Periode treten bekanntlich sowohl beim Öffnen als beim Schliefsen der Kette fast gleich starke Zuckungen ein, es mag der electrische Strom direct oder umgekehrt seyn. Der wahrscheinliche Grund dieser scheinbaren Gleichheit liegt nach *Nobili* darin, dafs bei der hier herrschenden grofsen Reizbarkeit des Thieres alle Einwirkungen so starke Contractionen hervorbringen, dafs sich daran die Verschiedenheit der angewandten Erregungsmittel nicht mehr wahrnehmen läfst.

In der zweiten Periode, wo beim Schliefsen der directe Strom, beim Öffnen aber der umgekehrte eine starke Zuckung hervorbringt, während beim Öffnen

der Kette mit dem directen Strome gar keine Wirkung, beim Schliefsen hingegen mit dem umgekehrten nur eine schwache Zuckung eintritt, zeigt sich die Eigenthümlichkeit des Nerves, nach der Richtung seiner Verzweigung eine Bewegung leichter fortzupflanzen, als nach der entgegengesetzten. So wie beim Schliefsen der Kette der directe Strom beginnt, wird der Nerv stark erschüttert, weil er die Bewegung nach der Richtung des Stromes gut leitet, während er nach der entgegengesetzten Richtung als minder guter Leiter des Stromes keine merkliche Einwirkung erfährt. Der directe Strom versetzt den Nerv in einen weniger gewaltsamen Zustand, als der umgekehrte, und defshalb wird er beim Aufhören dieses Stromes nur eine schwache Veränderung erleiden und nur wenig zucken, beim Unterbrechen des umgekehrten aber, der den Nerv in einen unnatürlicheren Zustand versetzte, kann eine starke Erschütterung nicht ausbleiben. In dem Mafse, als die Reizbarkeit des Thieres sinkt, werden auch die an sich schon schwachen Erschütterungen immer schwächer, und verschwinden endlich ganz, so dafs nur noch die stärkeren übrig bleiben, und hierin liegt der Grund der Erscheinungen der dritten, vierten und fünften Periode.

Überhaupt geht aus Allem hervor, dafs bei schwachen electrischen Kräften der directe Strom beim Schliessen, der umgekehrte beim Öffnen der Kette die stärkesteren Zuckungen hervorbringt, und dieses Gesetz enthält im Grunde den Schlüssel zu allen erwähnten Phänomenen. Doch darf man nie den Grad der Empfindlichkeit und Vivacität des Thieres übersehen, dessen Nerv dem Strome ausgesetzt ist, und die von der Temperatur, Jahreszeit etc. abhängt, und es können aus einer unterlassenen Rücksicht dieses Umstandes Anomalien zum Vorschein kommen, die den aufgestellten Sätzen

entgegen sind. Darum gibt *Nobili* auch an, dafs er seine Versuche gröfstentheils im Herbste bei einer Temperatur von 15° *C.* angestellt habe. In einer Zeit, wo den Thieren weniger Nahrung zu Gebote steht, und wo sie Entbehrungen und Leiden anderer Art ausgesetzt sind, dürften sich Ausnahmen von den aufgestellten Regeln zeigen. Bei solchen Individuen hören oft zuerst jene Zuckungen auf, die der directe Strom beim Öffnen der Kette bewirkt, ja bei einigen bleiben sogar die sonst stärkeren Zuckungen eher aus als die schwächeren, eine Anomalie, deren Untersuchungen *Nobili* den Physikern warm empfiehlt.

Die bisherigen Untersuchungen *Nobili's* beziehen sich auf den Cruralnerv allein, also einzig und allein auf das Nervensystem, und man kann billig fragen, wie sich die Sache verhalten wird, wenn mit dem Nerv zugleich der Muskel in den Kreis kommt. *Nobili's* Versuche geben auf diese Frage die Antwort: Das Gesetz der Contractionen bleibt dasselbe, man mag den Nerv allein oder den Nerv und den Muskel zugleich in die Kette bringen, nur in Betreff der Intensität findet ein kleiner Unterschied Statt. Die Zuckungen, die man bei Versuchen mit dem Nerv allein erhält, hören eher auf, als jene, die bei Anwendung des Nerves und des Muskels hervortreten, weil der blofsgelegte Nerv schneller austrocknet und seine Leitfähigkeit verliert, als jene Theile desselben, die in der Substanz des Muskels verzweigt sind, und durch sie gegen das Austrocknen geschützt werden. Übrigens verhält sich der Muskel bei den Zuckungen ganz leidend, und erhält seine Empfindlichkeit gegen den electrischen Strom allein vom Nerve. Diesem schon früher anerkannten Grundsatze hat *Nobili* durch einen neuen Versuch noch mehr Haltbarkeit gegeben. Bekanntlich liegen die Puncte der Frosch-

schenkel, welche sich unter der Einwirkung eines electrischen Stromes am meisten zusammenziehen, im dicken Fleische der Schenkel. *Nobili* leitete nun durch diese Puncte eines recht kräftigen Frosches einen sehr schwachen Strom, der, am Nerv angebracht, starke Bewegungen desselben erzeugt hätte, und bemerkte keine Spur einer Zuckung, wiewohl der Muskel an Leitfähigkeit dem Nerv nicht nachsteht, und auch die Gröfse der Berührungsfläche zwischen Fleisch und Metall einen günstigen Erfolg sollte erwarten lassen. Hätte der Muskel eine selbstständige Empfindlichkeit gegen den electrischen Strom, so hätten da die Zuckungen nicht ausbleiben können, und der Strom würde nicht eine Stärke brauchen, wie sie nothwendig ist, um zu den im Innern des Muskels gelegenen Verzweigungen des Nerves zu gelangen. Daher ist es begreiflich, dafs ein Muskel allein für sich durch einen starken Strom in Zuckungen versetzt werden mufs. Doch treten diese Zuckungen nur beim Schliefsen der Kette kräftig ein, beim Öffnen derselben erfolgen sie nur schwach, oder sie unterbleiben ganz, ja wenn man den electrischen Strom von dem dicken Fleische des einen Schenkels in dasselbe des anderen leitet, so tritt bei der Anwendung hinreichender Ströme während des Schliefsens eine ungemein kräftige Erschütterung ein, beim Öffnen ist eine solche nicht bemerkbar, aber doch sehr schwach.

Bisher wurden Ströme gebraucht, die von metallischen Electromotoren herrührten; ein nach *Galvani's* Methode präparirter Frosch kann aber, nach *Nobili*, selbst als Electromotor dienen, und mit einem homogenen Metalle oder einem feuchten Leiter in Zuckungen versetzt werden. Dieser Strom geht von den Füfsen des Frosches zum Rückenmark, ist sehr schwach, hält höchstens eine Viertelstunde an, und bewirkt bei schwachen

Individuen nur beim Schliefsen der Kette, bei starken hingegen sowohl beim Öffnen als beim Schliefsen Zuckungen; nur wenige Frösche zucken blofs beim Öffnen. Dafs diese Zuckungen nicht von einem Rückströmen der Electricität in dem Augenblicke der Unterbrechung der Kette herrühren, hat zwar schon *Marianini* bewiesen, *Nobili* zeigt aber auch die Unstatthaftigkeit dieser Annahme, indem, wenn sie die rechte Ursache bezeichnete, vielmehr beim Öffnen als beim Schliefsen der Kette die Zuckung eintreten müfste, nicht aber umgekehrt, wie es die Erfahrung nachweiset. Bei diesem Strome spielen die Muskeln der unteren Extremitäten die Rolle des negativen, der Cruralnerv hingegen die des positiven Electromotors, und wirken als solche länger, als die Erregbarkeit des Thieres dauert. Daher kommt es, dafs ein Multiplicator, nach *Nobili's* Construction, selbst im Kreise unempfindlich gewordener Frösche noch das Daseyn eines electrischen Stromes anzeigt, ferner dafs ein frisch präparirter Frosch mit einem lange vorher zugerichteten und bereits für die electrische Erregung unempfänglichen, mit den Extremitäten zu einem Kreise verbunden, in Zuckungen geräth, sobald beide in derselben Richtung mit einander verbunden sind, hingegen keine Spur davon blicken lassen, wenn sie einander entgegengesetzt sind. Im ersten Falle unterstützen sich nämlich die beiden Ströme, und bewirken natürlich in dem empfindlicheren Organe eine Zuckung, im letzteren wirken sie einander entgegen, und neutralisiren sich gegenseitig.

Nobili meint, die Endursache dieser Ströme im Frosche selbst liege in einer Temperaturdifferenz zwischen Nerv und Muskel, der Strom sey also ein thermo-electrischer, und leitet diese Differenz von einer Ungleichheit der Verdünstung der Flüssigkeit dieser beiden Or-

gane ab. Da der Muskel eine gröfsere Masse hat als der Nerv, mithin langsamer austrocknet als dieser, so mufs jener die Rolle des warmen, dieser die des kalten Leiters spielen.

Es ist merkwürdig, dafs bei der Einwirkung eines electrischen Stromes auf Frösche manches Individuum in eine Art Starrkrampf mit Convulsionen verfällt, bei anderen hingegen eine völlige Erschlaffung eintritt. In beiden Zuständen zucken die Glieder, nur erscheinen diese Zuckungen im ersten Falle mehr als Verzerrungen, im letzten mehr als Zusammenziehungen. Jene Convulsionen kann man auch künstlich herbeiführen, indem man die Kette schnell genug hinter einander öffnet und wieder schliefst, so dafs die von einer Berührung herrührende Contraction nicht vor Eintritt der durch die folgende erzeugten verschwinden kann, und so der gewöhnlich auf die Contraction folgenden Abspannung keine Zeit gestattet wird.

Nobili glaubt, durch diese Erfahrungen geleitet, näher in die Natur des Starrkrampfes einzugehen, und ein Heilmittel dieses schrecklichen Übels in der Electricität zu finden. Ein Nerv verliert seine Fähigkeit, in Zuckungen versetzt zu werden, durch einen continuirlichen electrischen Strom, ja solche Zuckungen sind selbst nur ein vorübergehender Starrkrampf. Man hat demnach beim Eintritt dieser, von einer übermäfsigen Exaltation des Nerves herrührenden, Krankheit nur die Erregbarkeit des Nerves durch einen continuirlichen Strom herabzusetzen. Anders müfste man bei Lähmungen verfahren, die in einem Mangel an Erregbarkeit der Nerven ihren Grund haben, und demnach bei diesen einen Strom mit Unterbrechungen anwenden.

B. Akustik.

Über die Empfindlichkeit des Gehörorgans. Von *F. Savart.*

(Ann. de Chim. et de Phys. Aug. 1830.)

Der tiefste Ton, den wir noch vernehmen können, zählt 30 Schwingungen für die Secunde, und sollte auch diese Angabe nicht ganz richtig seyn, so ist doch der Fehler nur gering; darüber sind die Physiker einig. Rücksichtlich der Grenze der Vernehmbarkeit hoher Töne, dem eigentlichen Gegenstande dieser Untersuchung, herrscht jedoch nicht dieselbe Übereinstimmung. *Chladni* nimmt als Grenze einen Ton von 12000 Schwingungen, *Biot* den einer offenen Pfeife von 10 Linien Länge, der also 8192 Schwingungen für die Secunde hat. *Wollaston* gesteht, dafs der höchste Ton, den er noch habe vernehmen können, der einer zolllangen Pfeife sey, da er aber nicht sagt, ob diese Pfeife offen oder gedeckt, und von welchem Durchmesser sie gewesen sey, so kann man über die Zahl der Schwingungen dieses Tones nichts bestimmen. An einer Stelle sagt er jedoch, dafs die höchsten vernehmbaren Töne von Schwingungen erzeugt werden, die eine sechs- bis siebenhundert Mal gröfsere Geschwindigkeit als die an der entgegengesetzten Grenze hätten; was also auf 18 — 20000 Schwingungen die Secunde hinauskäme. Kurz die ganze Geschichte der Physik, so viel weist das Gesagte nach, kennt keinen einzigen genauen Versuch über diesen Gegenstand, und seit *Sauveur* ist die Akustik in dieser Beziehung um nichts vorgeschritten.

Die Bedingungen zur Lösung dieser Frage lassen sich auf zwei zurückführen: die genaue Bestimmung der Anzahl der Schwingungen und die Erzeugung äufserst

hoher und doch hinreichend intensiver Töne. Mittelst cylindrischer, an beiden Enden freier, in Longitudinalschwingungen versetzter Stäbe kann man beiden Erfordernissen genügen. Denn die Gesetze dieser Art Bewegung sind genau bekannt und die Anzahl der Schwingungen daher leicht auszumitteln, und andererseits braucht man nur Körper von einer grofsen Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalls, wie z. B. Glas oder Stahl, zu wählen, um auch bei einer geringen Länge sie noch bequem in Schwingungen versetzen und den Schall vernehmen zu können. Auf diese Weise hat *Savart* gefunden, dafs die meisten Menschen den Ton eines Glascylinders von 3 Millim. im Durchmesser und 159 Millim. in der Länge noch deutlich vernehmen, obgleich er ungefähr 31000 Schwingungen für die Secunde zählt. Bei Cylindern von noch kleinerem Durchmesser und ungefähr 150 Millim. Länge, die also 33000 Schwingungen für die Secunde gaben, vernahm bald *Savart* den Ton, bald nicht, je nachdem das Ohr in einem Momente empfänglicher als im andern, oder — wie er bescheiden äufsert — die Geschicklichkeit beim Behandeln des Stabes verschieden gewesen ist.

Auch bei in Transversalschwingungen versetzten Stahlstäben, obgleich die Intensität des Tones noch geringer und die Behandlung noch schwieriger ist, waren Töne von 30 — 32000 Schwingungen noch vernehmbar. Obgleich man bemerken mufs, dafs weil diese kleinen Stäbe mit einem ihrer Enden in eine Schraubzange eingezwängt waren, und folglich ihre Länge nicht mit Sicherheit ausgemittelt werden konnte, diese Zahlen nur als Annäherungen zu betrachten sind, wenn auch eben nicht viel von der Wahrheit abgehen wird.

Noch schwieriger wird es, die Anzahl der Schwingungen zu bestimmen, wenn man kleine Luftsäulen auf

die Art, wie in den Orgelpfeifen, in Bewegung zu setzen sucht. Das einzige Mittel, dessen man sich da mit Erfolg bedienen kann, ist, Röhren von ähnlicher Gestalt zu gebrauchen, um das Gesetz, dafs die Anzahl der Schwingungen gleichartiger Luftmassen den homologen Abmessungen verkehrt proportionirt sey, in Anwendung bringen zu können. Allein da die Öffnungen (Mundlöcher) ebenfalls den Dimensionen proportionirt bleiben müssen, und bei der Kleinheit der Pfeifen diese Bedingung durchaus nie mit Vollkommenheit hergestellt werden wird, so kann man bei diesem Verfahren die Zahl der Schwingungen nie über 20000 die Secunde steigen lassen, da über diese Grenze die Schwingungen, wo noch vernehmbar, doch immer unter einander vergleichbar bleiben.

Aus diesen ersten Versuchen scheint hervorzugehen, dafs das menschliche Ohr Töne, die über 32000 Schwingungen die Secunde zählen, nicht mehr vernehmen könne. Allein da man, um zu dieser Grenze zu gelangen, Körper von geringen Abmessungen, folglich kleinen Schwingungen und geringer Intensität des Schalles anwenden mufs, so bleibt noch immer unentschieden, ob der Ton darum unvernehmbar wird, weil er zu *schwach*, oder darum, weil er zu *schnell* ist.

Zur Lösung dieser Frage bediente sich *Savart* eines bald schneller, bald langsamer gedrehten, gezähnten Rades, dessen Zähne nach einander an einen kleinen Körper, z. B. an eine Karte oder eine dünne Holzplatte, der auf einer festen Unterlage ruhte, stofsen mufsten. Auf diese Weise erhielt man Töne, deren Höhe oder Tiefe, wie bei der Sirene *Cagniard-Latours*, von der gröfseren oder geringeren Zahl der in einer bestimmten Zeit vollbrachten Stöfse abhing, und wo man durch Vergröfserung des Durchmessers des Rades, unter Beibe-

haltung derselben Zähnezahl, die Intensität des Schalls und Reinheit der Töne vermehren, und die höchsten Töne der musikalischen Leiter ohne Abbruch der Intensität hervorbringen konnte.

Das erste Rad hatte 24 Centim. im Durchmesser und 360 Zähne, das zweite 48 Centim. im Durchmesser und 100 Zähne, das dritte 82 Centim. und 720 Räder. Mit dem letztern erhielt man vernehmbare Töne, auch wenn die Zahl der Stöfse 24000 überstieg, was also 48000 einfachen Schwingungen entspricht; und obgleich die Intensität des Schalles, die noch bei 12 — 15000 Stöfsen die Secunde bedeutend stark war, von da aus schnell zu sinken begann, so konnte doch der Punct, wo der Ton ganz unvernehmbar geworden wäre, mit *Savart's* Apparat nicht bestimmt werden, indem das Rad, welches dazu diente, das gezähnte in Bewegung zu setzen, keinen hinreichend grofsen Halbmesser hatte, um die entsprechende Drehungsgeschwindigkeit hervorbringen zu können.

Das Vermögen, so hohe Töne zu vernehmen, kommt ferner — gegen *Wollaston's* Ausspruch — allen Personen zu; wenigstens besafsen es alle, die *Savard's* Versuchen beiwohnten. Dadurch will er aber nicht die von *Wollaston* zu Gunsten seiner Meinung angeführten Thatsachen zweifelhaft machen, nur müssen sie auf eine andere Art erklärt werden. Es kann nämlich ein hoher Ton von bestimmter Intensität von einigen Personen noch vernommen werden, von andern nicht; allein der Grund hiervon liegt nicht in dem Grade seiner Höhe, sondern in dem Grade seiner Intensität.

Aus *Savart's* Versuchen ging ferner hervor, dafs, wenn man fortfahren würde, den Durchmesser des gezähnten Rades und die Drehungsgeschwindigkeit bei gleich bleibender Zahl der Zähne zu vermehren, und

dadurch den Ton immer höher und doch zugleich einen vom andern getrennt, und daher genugsam intensiv erhielte *), man Töne hervorbringen könnte, die weit über 24000 Stöfse die Secunde zählten, und dennoch vernehmbar wären; allein bis jetzt wurden die Versuche, gröfstentheils wegen des hohen Kostenaufwandes, nicht weiter hinaufgetrieben.

Da die Anzahl der mittelst des Rades von 82 Centimeter im Durchmesser hervorgebrachten Schwingungen so grofs war, und der erzeugte Ton die bisher angenommene Grenze der vernehmbaren Töne so weit überschritt, so handelte es sich vor Allem 1) um genaue Bestimmung der Umläufe des gezähnten Rades, und 2) um Ausmittelung des Umstandes, ob nicht etwa auch der stofsende Körper in eine schwingende Bewegung gerathe, während welcher er z. B. nur je den zweiten, dritten u. s. w. Zahn treffen, und die andern auslassen könnte.

Die erste Schwierigkeit betreffend, ist, an der Axe (dem Wellbaume) des Rades einen Zähler anzubringen, bei grofser Geschwindigkeit nicht recht thunlich; besser ist es, die Zahl der Umläufe durch den Ton eines andern gezähnten Rades von geringerem Durchmesser und einer 30—40 Mal geringeren Anzahl Zähne zu bestimmen. Da dieser Ton viel tiefer als der des grofsen

*) Der hier erwähnte Einfluſs der Vergröfserung des Durchmessers auf die Intensität des Schalles läfst sich durch einen einfachen Versuch nachweisen. Man construire ein durchbrochenes Rad mit einer grofsen Anzahl geradliniger Radien, und erzeuge einen Schall durch successive, gegen diese Radien ausgeübten Stöfse. Je weiter der stofsende Körper vom Mittelpuncte weg gegen das Ende der Radien geschoben wird, desto intensiver ist der Schall.

Rades ist, so ist es leicht, seinen Einklang auf einem Monochorde hervorzurufen, die entsprechende Anzahl der Schwingungen, und hieraus die der Umläufe des grofsen Rades zu berechnen.

Die zweite Schwierigkeit löst sich auf doppelte Art. Entweder man bringt auf derselben Axe eine Anzahl gezähnter Räder an, von demselben Durchmesser und derselben Dicke, deren Zähnezahl aber in einfachen, harmonischen Verhältnissen unter einander stehen, und sieht, ob bei gleicher Drehungsgeschwindigkeit der durch den Stofs der Zähne dieser Räder an verschiedene kleine Körper hervorgebrachte Accord wirklich der sey, der sich aus den Zahlen der Zähne ergibt; oder, was noch einfacher ist, man läfst senkrecht auf die Ebene des Rades mittelst eines Rohres von hinlänglich kleinem Durchmesser einen Luftstrom auf die Zähne des Rades fallen, aus welcher Anordnung eine der Sirene *Cagniard-Latours* analoge Wirkung entspringen wird, dafs sich nämlich durch den Stofs, den die aus der Röhre dringende Luft, so oft der Zwischenraum der Zähne ihr freien Ausgang aus der sonst durch die Zähne verdeckten Öffnung gestattet, gegen die äufsere Luft ausübt, ein Schall erzeugen wird. Dieser Schall mufs genau dem durch den Stofs der Zähne gegen einen dünnen Körper erzeugten entsprechen, falls wirklich dieser Körper jeden Zahn berührt, keinen ausläfst. Beide diese Methoden wurden nun angewendet, und beide gaben das gewünschte Resultat. Räder, deren Zähne im Verhältnifs von 200 : 250 : 300 : 400 zu einander standen, gaben den reinsten Accord, eben so wurde durch die successiven Luftstöfse und den Stofs des Rades an den dünnen Körper derselbe Ton erzeugt; man konnte also sicher seyn, dafs der Körper keinen Zahn auslasse.

Die Frage über die Grenze der Vernehmbarkeit der

Töne hängt auch mit einer andern enge zusammen, nämlich wie lange ein Ton andauern muſs, um als ein ausgehaltener und mit andern Tönen vergleichbarer erscheinen zu können; denn ein sehr hoher Ton, der dennoch mit andern soll verglichen werden können, muſs oder kann als das Resultat einer Folge von Klängen oder Tönen betrachtet werden, die nur ein Moment dauern, und doch, jeder für sich, einen Eindruck auf das Gehörorgan hervorbringen würden.

Die letzterwähnten Mittel zur Tonerzeugung sind auch ganz zur Lösung dieser Frage geeignet. Der Ton z. B., den ein Rad mit 1000 Zähnen und einem Umlauf in der Secunde hervorbringt, bleibt — wie auch die Erfahrung bestätiget — derselbe, wenn man alle Zähne der einen halben Peripherie wegnimmt, denn noch immer werden, wie vorher, in einer halben Secunde 500 Stöſse gemacht; nur folgt auf den Ton eine halbe Secunde völliger Stille, wenn anders der auf das Organ gemachte Eindruck mit der Ursache, die ihn hervorgebracht hat, vergeht. Wirklich verhielt es sich so; man konnte was immer für eine Zahl Zähne wegnehmen, der Ton blieb derselbe, nur war er durch eine gröſsere oder geringere Stille, je nach der Zahl der weggenommenen Zähne, unterbrochen. *Savart* verfertigte sich einen Apparat mit beweglichen Zähnen, nahm alle Zähne weg bis auf zwei, und doch blieb der Ton ungeändert, wie man sich leicht durch das Antönen seines Einklangs *(unison)* überzeugte. Aus diesem Versuche geht hervor: 1) daſs zwei auf einander folgende Stöſse, folglich vier Schwingungen hinreichen, einen vergleichbaren Ton zu bilden; 2) daſs der Zeitraum zwischen den beiden Stöſsen die Höhe des Tones bestimmt, z. B. zwei Stöſse, die in einem doppelt so groſsen Zeitraum auf einander folgen, geben die nächst niedere Octave, die in einem drei Mal kleineren

die Quinte der nächst höheren Octave, u. dgl. m.; 3) dafs die zur Vernehmbarkeit des Tones nöthige Dauer desselben einzig und allein von dem Zeitraume zwischen den zwei ihn bildenden Stöfsen abhängt, und dafs folglich diese Zeit desto kürzer, je höher der Ton ist. Da wir also gefunden haben, dafs unser Ohr noch einen von 10000 Stöfsen (20000 einfachen Schwingungen) erzeugten Ton zu vernehmen im Stande sey, so folgt daraus, dafs dieses Organ noch alle Einzelnheiten eines Phänomens, das blofs $^1/_{5000}$ einer Secunde dauerte, vernehmen könne. Doch mufs bemerkt werden, dafs diese Folgerung vielleicht nicht gar so richtig ist, da es doch auch geschehen kann, dafs die in dem letzt getroffenen Zahne hervorgebrachte Erschütterung noch einige Zeit nach dem Stofse fortdauere; allein jeden Falls ist diese Zeit, wenn die sich stofsenden Körper, wie im gegenwärtigen Falle, geringe Dimensionen haben, äufserst klein.

Läfst man auf der Peripherie des Rades nur einen Zahn, so gibt der bei jedem Umlauf eintretende Eine Stofs einen Ton, dessen Höhe oder Tiefe in gar keinem Zusammenhange mit dem bei zwei oder mehreren Zähnen erhaltenen steht. Er bleibt stets derselbe, was auch die Drehungsgeschwindigkeit sey, was natürlich daher rührt, dafs immer dieselben zwei Körper stets in denselben Dimensionen an einander stofsen. Nur mufs man berücksichtigen, dafs wenn die Zahl der Umläufe des Rades 32 die Secunde übersteigt, die periodische Wiederkehr des Stofses des Zahnes einen eigenen, anhaltenden Ton erzeugt, der mit der Zahl der Umläufe immer an Höhe zunimmt.

Da also ein einziger Stofs für sich einen vernehmbaren Schall oder Klang erzeugt, und andererseits, wie wir oben gesehen haben, das Ohr noch Töne vernehmen kann, die aus ungefähr 24000 Stöfsen die Secunde

hervorgehen, so könnte man daraus folgern, daſs ein Ton oder Klang, der nur $^1/_{24000}$ einer Secunde dauert, vernehmbar, wenn auch nicht mehr vergleichbar ist; allein auch hier muſs berücksichtiget werden, daſs die Bewegung auch nach dem Stoſse fortdauern, folglich in der Bestimmung der Dauer des Tones ein Irrthum eingetreten seyn kann.

Auch verdient hier die Bemerkung einen Platz, daſs die Dauer des Phänomens, das die Schallempfindung hervorbringt, wohl von der Dauer der Empfindung selbst unterschieden werden muſs; denn der auf ein Organ gemachte Eindruck überdauert die Ursache, die ihn hervorgebracht hat. *Savart* bemühte sich nun die Zeit zu finden, um welche die Empfindung länger als die sie erzeugende Ursache währt, und die gezähnten Räder bieten wiederum ein leichtes Mittel, das Problem zu lösen.

Nehmen wir also an, daſs man einem Rade von gleichförmiger und bekannter Drehungsgeschwindigkeit einen Zahn nehme; nothwendig muſs daraus, wenn die Empfindung anders nicht auch nach dem Aufhören der erzeugenden Ursache besteht, eine Unterbrechung des Tones entstehen, und selbst die Zeit, um welche die Empfindung ihren Grund überdauert, muſs aus der Zahl der Zähne entnommen werden können, die man bis zur Wahrnehmung einer Unterbrechung wegnehmen muſs. *Savart* wiederholte derlei Versuche zu verschiedenen Malen; stets gewann er die Überzeugung, daſs der Eindruck länger als die Ursache desselben dauere, allein nie war es ihm möglich zu einer genauen Bestimmung zu gelangen; denn da der Eindruck allmählich erlischt, so kann man, wenn er bereits sehr schwach geworden ist, nie mit Sicherheit angeben, ob er noch bestehe oder nicht. Auch meint *Savart*, dürfte die Empfänglichkeit seines Gehörorgans nicht stets dieselbe gewesen seyn, denn einige Male konnte er mehr, andere Male durfte er nur weniger Zähne wegnehmen, ehe eine Unterbrechung des Schalles eintrat. Auch stimmten die bei *Savart's* Versuchen Anwesenden in ihren Beurtheilungen durchaus nicht überein.

Sicher ist, daſs wenn ein Ton als ausgehalten erscheinen soll, der Eindruck eines jeden Stoſses mit einer bestimmten Intensität bis zum Gelangen des Eindru-

ckes des nächsten Stofses zu unserem Ohre andauern mufs, denn sonst würde man den durch jeden einzelnen Stofs erzeugten Klang gesondert vernehmen. Wenn man also einem Rade mit wenig Zähnen eine drehende Bewegung von anfänglich kleiner, dann aber stets wachsender Geschwindigkeit mittheilt, so unterscheidet man zuerst deutlich die von jedem Stofse der einzelnen Zähne gegen einen kleinen Körper erzeugten Töne von einander, dann beginnt man einen Ton zu hören, den man zerrissen nennen könnte, wenn man so sagen darf, und der dadurch entsteht, dafs das Ende eines Eindruckes mit dem Beginne des nächsten zusammenfliefst, wenn endlich die Stöfse mit gröfserer Schnelligkeit einander folgen, so wird der Ton sehr rein und erlangt viel Intensität; allein diese Intensität nimmt wieder ab und der Ton verschwindet endlich ganz, wenn die Geschwindigkeit sehr grofs wird, ohne Zweifel, weil da die Stöfse nicht mehr rein hervorgebracht werden. Mit einem Worte, zur Empfindung eines vollen und anhaltenden Tones ist es unerläfslich, dafs die auf das Gehörorgan geschehenden Eindrücke bis auf eine bestimmte Grenze in einander fliefsen. Diefs ist wahrscheinlich die Ursache, warum man nach Mafsgabe, als man höhere Töne erzeugen will, den Durchmesser des Rades vergröfsern mufs; man thut da nämlich nichts anderes, als man vermindert die Dauer eines Schlages; im Gegentheile scheint es aufser Zweifel, dafs man noch tiefere Töne als von 30 — 32 Schwingungen die Secunde erzeugen könnte, wenn man ein Mittel wüfste, Erschütterungen hervorzubringen, deren Eindruck über $^1/_{16}$ Secunde währte.

Zum Schlusse diene die Bemerkung, dafs die mittelst eines gezähnten Rades hervorzubringenden Töne mit gutem Erfolge zur Bestimmung der Umläufe der Wellbäume einer grofsen Anzahl Maschinen, so wie zur Prüfung der Regelmäfsigkeit ihres Ganges, angewendet werden dürften.

Meteorologische Beobachtungen. September 1830.

Der Beobachtungsort liegt 101.7 W. F. über dem mittlern Spiegel der Donau.

Tag.	Um 8 Uhr früh.			Um 3 Uhr Nachmittag.			Um 10 Uhr Abends.			Witterung.
	Barometer o° R.	Thermometer.	Wind.	Barometer o° R.	Thermometer.	Wind.	Barometer o° R.	Thermometer.	Wind.	
	Paris. Z.	Grad R.		Paris. Z.	Grad R.		Paris. Z.	Grad. R.		
1	27.786	11.0	WNW. schw.	27.762	16.0	NW. schw.	27.772	11.5	NW. schw.	Sonne mit Wolken.
2	27.768	12.5	WNW. schw.	27.730	16.0	NW. schw.	27 647	11.6	S. schwach.	Sonne mit Wolken.
3	27.527	11.0	NW. still.	27.419	19.0	N. still.	27.383	15.0	NNW. still.	Sonne mit Wolk. u. Reg.
4	27.314	13.0	NW. schw.	27.336	14.7	NW. schw.	27.310	10.0	WNW. schw.	Trüb und Regen.
5	27.279	11.7	NW. stark.	27.336	13.2	W. mittelm.	27.402	8 9	W. schwach.	Sonne mit Wolken.
6	27.433	10.4	W. schwach.	27.397	15.5	S. mittelm.	27.405	11.9	SO. schwach.	Sonne mit Wolken.
7	27.420	10.0	WNW. schw.	27.405	10.0	W. schwach.	27.412	9.0	W. schwach.	Trüb und Regen.
8	27.406	10.0	W. schwach.	27.407	14.0	NW. schw.	27.421	9.0	NW. schw.	Sonne mit Wolken.
9	27.373	9.2	NNW. schw.	27.295	9.0	WNW. schw.	27.278	8.0	WNW. schw.	Trüb und Regen,
10	27.295	10.0	WNW. mitt.	27.373	15.0	WNW. schw.	27.424	10.5	W. schwach.	Sonne mit Wolken.
11	27.448	10.0	W. still.	27.415	18.0	SO. schwach.	27.323	12 0	SO. schwach,	Sonne mit Wolken.
12	27.262	11.0	SO. schwach.	27.246	9.0	W. mittelm.	27.218	8.0	W. stark.	Trüb und Regen.
13	27.145	9.4	W. schwach.	27.110	11.6	W. mittelm.	27.108	8.5	W. mittelm.	Trüb und Regen.
14	27.123	8.0	W. stark.	27.207	11.0	WNW. mitt.	27.306	9.0	WNW. schw.	Trüb und Regen.
15	27.376	10.6	W. still.	27.501	13.0	NW. schw.	27.563	9.0	WNW. schw.	Sonne mit Wolken.
16	27.559	8.5	SW. still.	27 592	15.0	SSW. still.	27.626	11.0	SW. still	Sonne mit Wolken.
17	27.637	12.0	S. still.	27.639	18.0	OSO. schw.	27.549	13 0	SO. mittelm.	Sonne mit Wolken.
18	27.470	12.2	OSO. mitt.	27.399	18.0	OSO. mitt.	27.368	14.0	SO. schwach.	Sonne mit Wolken.
19	27.535	13.0	W. schwach.	27.535	16.0	W. schwach.	27.545	12.0	WSW. still.	Sonne mit Wolken.
20	27.535	11.0	WNW. schw.	27.414	16.0	SSW. still.	27.367	11.5	W. still.	S. m. W., Gewit. Morg.
21	27.321	12.0	WNW. schw.	27.230	18.0	SO. mittelm.	27.121	12 0	SO. stark.	Sonne mit Wolken.
22	27.048	12.0	S. stark	27.058	15.0	SO. stark.	27.186	10.0	SW. schw.	Trüb und Regen.
23	27.350	9.0	W. still.	27.440	12.0	WNW. stark.	27.544	9 0	W. still.	Sonne mit Wolken.
24	27.670	10.0	W. schwach.	27.635	16.0	W. still.	27.605	10.0	W. still.	Sonne mit Wolken.
25	27.507	9.0	NW. schw.	27.465	7.0	NW. mitt.	27.505	6.0	NW. schw.	Trüb und Regen.
26	27.544	8.0	NW. schw.	27.609	8.0	WNW. mitt.	27.688	6.0	NW. stark.	Trüb und Regen.
27	27.808	7.0	NW. mittelm.	27.859	9.0	WNW. schw.	27.859	7.8	WNW. schw.	Trüb und Regen.
28	27.822	9.2	NW. schw.	27.722	15.0	NW. still.	27.631	9 8	SO. schwach.	Sonne mit Wolken.
29	27.622	10.0	SO. schwach.	27.550	13.0	SO. mittelm.	27.519	9.5	S. schwach.	Sonne mit Wolken.
30	27.513	10.0	S. still.	27.505	14 0	S. still.	27.536	10.0	S. still.	Sonne mit Wolken.
Mittel	27.463	10.36		27.453	13.83		27.452	10.12		

Meteorologische Beobachtungen. October 1830.

Der Beobachtungsort liegt 101.7 W. F. über dem mittlern Spiegel der Donau.

Tag.	Um 8 Uhr früh.			Um 3 Uhr Nachmittag.			Um 10 Uhr Abends.			Witterung.
	Barometer o° R.	Thermometer.	Wind.	Barometer o° R.	Thermometer.	Wind.	Barometer o° R.	Thermometer.	Wind.	
	Paris. Z.	Grad R.		Paris. Z.	Grad R.		Paris. Z,	Grad R.		
1	27.603	11.0	WNW. still.	27.622	13.4	WNW. still.	27.698	10.0	WNW. still.	Son. m. W., Morgenreg.
2	27.717	10.0	WNW. schw.	27.709	14.4	N. still.	27.715	10.0	N. still.	Sonne m. W. und Nebel.
3	27.710	10.2	N. still.	27.724	12.2	N. schwach.	27.758	9.5	N. still.	Sonne m. W. und Nebel.
4	27.767	10.0	NW. still.	27.757	13.2	WNW. still.	27.726	9.8	NW. still.	Sonne m. W. und Nebel.
5	27.690	10.5	WNW schw.	27.633	12.0	NNW. still.	27.581	8.5	WNW. still.	Sonne, Wolken, Regen.
6	27.618	6.0	WNW. mitt.	27.627	12.0	WNW. schw.	27.677	6.0	WNW. stark.	Hagel (Morg. 2 U.), S. W.
7	27.622	7.0	WNW. mitt.	27.628	9.0	WNW. stark.	27.672	7.0	WNW. stark.	Trüb, Regen.
8	27.751	8.0	WNW. mitt.	27.789	9.0	NW. mitt.	27.792	7.0	WNW. mitt.	Sonne mit Wolken.
9	27.839	7.0	WNW. mitt.	27.840	10.0	WNW. schw.	27.879	7.5	WNW. mitt.	Sonne, Wolken, Regen.
10	27.806	8.4	W. stark.	27.785	8.2	W. mittelm.	27.774	7.5	NW. mittelm.	Trüb, Regen.
11	27.750	7.8	NW. schw.	27.711	10.7	N. schwach.	27.666	6.5	WNW. schw.	Sonne mit Wolken.
12	27.632	8.0	WNW. schw.	27.751	6.4	NW. schw.	27.709	4.5	NW. schw.	Trüb und Regen.
13	27.831	2.0	NW. schw.	27.867	6.0	WNW. schw.	27.866	2.8	NW. schw.	Sonne mit Wolken.
14	27.876	3.2	WNW. schw.	27.861	6.0	N. schwach.	27.866	2.7	NW. still.	Sonne mit Wolken.
15	27.816	4.0	WNW. schw.	27.752	8.3	WNW. still.	27.747	5.0	WNW. still.	Sonne mit Wolken.
16	27.703	5.0	WNW. schw.	27.720	8.0	NW. schw.	27.799	6.0	NW. schw.	Sonne mit Wolk. u Reg.
17	27.830	7.0	NW. schw.	27.862	9.0	NW. schw.	27.896	6.5	NW. still.	Sonne mit Wolken.
18	27.943	5.4	WNW. schw.	27.890	11.0	SO. schwach.	27.896	5.5	W. still.	Heiter.
19	27.916	2.0	WSW. schw.	27.893	9.0	S. schwach.	27.863	4.4	S. still.	Heiter.
20	27.919	3.0	S. schwach.	27.915	10.4	OSO. schw.	27.912	4.2	SO. schwach.	Sonne mit Wolken.
21	27.988	2.0	NNW. schw.	27.987	7.0	NNW. still.	28.023	3.1	NNW. still.	Sonne mit Wolken.
22	28 033	2.0	NNW. schw	28.030	9.0	WNW. still.	27.973	3.9	NNW. still.	Sonne mit Wolken.
23	27 948	3.0	WNW. schw.	27.887	8.5	SW. still.	27 817	6 8	W. mittelm.	dto. und dichter Nebel.
24	27.828	9.0	WNW. schw.	27.875	9.0	NW. schw.	27.876	6.8	WNW. schw.	Son. m. W., Morgenreg.
25	27.886	6.0	N. schwach.	27.856	10·0	SO. schwach.	27 716	5.0	SO. schwach.	Sonne mit Wolken.
26	27.516	5.0	SW. schw.	27.418	10.0	S. schwach.	27.351	5.2	SW. schw.	Trüb und Regen.
27	27.560	4.0	WNW. mitt.	27.713	6.0	WNW. mitt.	27.731	4 5	WNW. mitt.	Sonne mit Wolken.
28	27.687	7.2	WNW. stark.	27.621	8.0	WNW. schw.	27.509	6 0	SW. mittelm.	Sonne mit Wolken.
29	27 344	9.3	WNW. stark	27.172	13 0	W. mittelm.	27 274	6.8	W. mittelm.	Sonne mit Wolk. u. Reg.
30	27.289	7.0	W. schwach.	27.312	7.2	W. schwach.	27.416	4.6	WNW. mitt.	Trüb, Regen.
31	27 416	2.0	NW. schw.	27.637	6.0	WNW. mitt.	27.660	2.5	WNW. schw.	Sonne mit Wolken.
Mittel	27.737	5.11		27.737	9.42		27.737	5.97		

Meteorologische Beobachtungen. November 1830.

Der Beobachtungsort liegt 101.7 W. F. über dem mittlern Spiegel der Donau.

Tag.	Um 8 Uhr früh.			Um 3 Uhr Nachmittag.			Um 10 Uhr Abends.			Witterung.
	Barometer o° R.	Thermometer.	Wind.	Barometer o° R.	Thermometer.	Wind.	Barometer 6° R.	Thermometer.	Wind.	
	Paris. Z.	Grad R.		Paris. Z.	Grad R.		Paris. Z.	Grad R.		
1	27.534	5.4	WNW. stark.	27.651	10.0	WNW. schw.	27.662	5.0	WNW. mitt.	Sonne mit Wolken.
2	27.596	9.0	WNW. stark.	27.599	11.2	WNW. stark.	27.659	8.8	WNW. schw.	Sonne mit Wolken.
3	27.710	8.0	WNW. still.	27.782	12 5	SO schwach.	27.745	5.0	SO. mittelm.	Sonne mit Wolken.
4	27.781	3.0	SO. schwach.	27.769	8.2	SW. still.	27.761	4.0	SW. schwach.	Sonne mit Wolken.
5	27.810	3.0	SW. still.	27.820	6.0	SSW. still.	27.819	2.0	SW. schw.	Trüb.
6	27.784	1.5	SO. schwach.	27.741	6.0	SSO. schw.	27.716	2.0	SO. schwach.	Trüb.
7	27.574	3.2	SO. schwach.	27.455	9.4	S. mittelm.	27.377	5.2	SO. schwach.	Sonne mit Wolken.
8	27.511	2.4	SO. schwach.	27.499	6.0	SO. schwach.	27 518	3.0	SO. schwach.	Sonne mit Wolken.
9	27.536	3.2	SO. still.	27.541	7.0	SO. schwach.	27.600	4.0	SO. schwach.	Trüb.
10	27.628	4.4	WNW. schw.	27.599	10.0	WNW. schw.	27.585	4.5	WNW. still.	Sonne mit Wolken.
11	27.591	7.2	WNW. still.	27.603	9.0	WNW. schw.	27.577	5.8	WNW. schw.	Sonne mit Wolken.
12	27.555	7.2	WNW. schw.	27.600	6.2	WNW. schw.	27.680	4.0	WNW. schw.	Trüb u. Reg. Nachts heit.
13	27.807	3.3	NW. schw.	27.717	6.0	N. schwach.	27.708	4.5	N. schwach.	Sonne mit Wolken.
14	27.696	5.2	N. still.	27.640	7.0	SSO. schw.	27.646	4.0	SO. schwach.	Trüb,
15	27.574	5.0	SO. schwach.	27.617	9.0	SO. schwach.	27.665	3.5	SO. still.	Sonne m. Wolk. u. Nebel
16	27.712	4.0	SO. still.	27.632	7.0	SO. mittelm.	27.565	4.0	SO. schwach.	Sonne m. Wolk. u. Nebel
17	27.441	5.2	SO still.	27.350	10.0	SO. schwach.	27.314	5 6	SO. schwach.	Sonne mit Wolken.
18	27.421	6.0	S. still.	27.481	7.2	W. still.	27.502	4.8	W. schwach.	Trüb und Regen.
19	27.508	6.2	WNW. schw.	27.557	6.2	WNW. mitt.	27.634	4.0	WNW. schw.	Trüb und Regen.
20	27.665	5.0	WNW. schw.	27.642	6.0	WNW. schw.	27.643	3.5	WNW. schw.	Sonne mit Wolken.
21	27.651	3.4	WNW. stark.	27.637	6.0	WNW. mitt.	27.694	2.0	WNW. mitt	Sonne mit Wolken.
22	27.646	2.0	WNW. schw.	27.622	5.0	NW. schw.	27.572	2.5	WNW. schw.	Sonne mit Wolken.
23	27.491	6.0	W. stark.	27.523	4.0	NW. schw.	27.565	1.5	NW. schw.	dto. Nachts Schnee.
24	27.649	1.8	NW. schw.	27.714	4.2	N. mittelm.	27.741	1.0	NW. mittelm.	Trüb.
25	27.727	2.2	NNW. schw.	27.710	3.0	NW. schw.	27.712	0.5	NW. schw.	Trüb u. schw. Schnee.
26	27.682	1.0	N. schwach.	27.622	0.0	N. stark.	27.585	— 1.0	N. mittelm.	Trüb, Nachts Schnee.
27	27.565	0.0	NW. schw.	27.545	1.0	N. schwach.	27.470	— 0.8	N. schwach.	Trüb,
28	27.560	0.0	NW. schw.	27.596	2.0	SO. still.	27.656	0.5	SO. mittelm.	Trüb.
29	27.659	1.2	SO. stark.	27.640	2.0	SO. stark.	27.682	0	SO. stark.	Trüb, stürmisch.
30	27.672	1.2	SO. stark.	27.613	2.0	OSO. stark.	27.621	— 0.2	SO. mittelm.	Trüb
Mittel	27.625	3.87		27.617	6.31		27.622	3.11		

ZEITSCHRIFT

FÜR

PHYSIK UND MATHEMATIK.

I.

Notiz über den rhomboëdrischen Wismuthglanz;

von

W. Haidinger.

Neuere bergmännische Arbeiten in der an mineralogischen Schätzen so reichen Umgegend von Schemnitz haben kürzlich bestimmbare Varietäten einer metallischen Species geliefert, die früher von den Mineralogen theils übersehen, theils unvollständig beschrieben worden war.

Es ist dieſs das von Herrn Bergrath *Wehrle* unter der Benennung des prismatischen Wismuthglanzes in *Schweigger's* Journal *) aufgeführte Tellur-Wismuth. Ich war so glücklich, auf meiner letzten Reise nach Steiermark im vorigen Herbste, vom Herrn Professor *Anker* einige deutliche Krystalle zu bekommen, an denen ich jedoch sogleich erkannte, daſs ihre Formen in das rhomboëdrische System gehören. Die systematische Benennung ändert sich hierdurch in die des *rhomboëdrischen Wismuthglanzes.*

Als Grundgestalt der Krystallreihe glaube ich ein Rhomboëder von 81° 2′ (Fig. 3) annehmen zu müssen, obwohl sich die demselben entsprechenden Flächen noch

*) 1830, Nro. 8, S. 482.

nicht an den beobachteten Krystallen gefunden haben. Seine Axe ist $= \sqrt{7.56}$.

Die Krystalle zeigen gewöhnlich die Formen von Combinationen der zwei Rhomboëder $R + 1$ (f), dessen Axenkante 66° 40′ (Fig. 4), und $R + 2$ (m), dessen Axenkante 63° 10′ (Fig. 5) beträgt, mit der Fläche o, welche die Grenze der Reihe der Rhomboëder ist, und senkrecht auf deren Axe steht. Die in Fig. 6 abgebildeten Krystalle sind oft sehr kurz in der Richtung der Axe, und da die Rhomboëderflächen übrigens auch eine starke horizontale Streifung haben, und die Flächen f nur unter 105° 15′, die m aber gar nur unter 97° 46′ gegen o geneigt sind, so ähneln sie regelmäfsigen sechsseitigen Prismen. Manchmal sind sie auch platt gedrückt, und dieses Verhältnifs insbesondere hat Veranlassung gegeben, dafs man sie für Formen des prismatischen Systems gehalten hat. Diese Krystalle, vorzüglich aber die Fig. 5, kommen gar selten einzeln vor, sondern sie sind regelmäfsig mit andern, von gleicher Form, verbunden, wie diefs Fig. 6 dargestellt ist. An jeder Fläche des Rhomboëders f in einem Individuo liegt eine Fläche f eines andern, und zwar so, dafs die Kante des Grundrhomboëders in je zwei Krystallen gleiche Lage hat. Die Zusammensetzungsfläche steht also senkrecht auf der Axenkante von R. Es ist genau dasselbe Verhältnifs, wie unter andern am Rothgiltigerze *), wo sich auch die Zusammensetzung an allen drei Axenkanten von R zugleich zeigt. Auf dieses, bei der gegenwärtigen Species sehr gewöhnliche Vorkommen hinweisend, schlage ich für dieselbe den Trivialnamen *Tetradymit* vor, von τετράδιμος, vierfach.

Die Neigung von o gegen o′, oder gegen o″ des

*) *Mohs's* Grundrifs, Fig. 134.

andern Individuums ist = 95°. Aus diesem Winkel, der jedoch auch nur annähernd hat bestimmt werden können, sind die übrigen Winkel und Abmessungen berechnet.

Zugleich mit der Form erkannte ich aber auch den Habitus eben derjenigen Species, welche in *Mohs's* Grundrifs *) als eine von jenen Arten beschrieben ist, welchen man in Ungarn gemeiniglich den Namen *Molybdänsilber* beilegt. Auch die übrigen Eigenschaften der nun entdeckten Varietäten stimmen gut mit den von *Mohs* erwähnten überein. Dergleichen sind: die sehr vollkommene Theilbarkeit senkrecht auf die Axe; die Biegsamkeit der Blättchen, welche man durch dieselbe erhält; die Farbe — zwischen zinnweifs und stahlgrau —; die Härte von 1.5 in *Mohs*, ich fand mit Hrn. *Partsch* für die neuen Varietäten 2.0. Dieser Unterschied dürfte jedoch daher rühren, dafs die frühern Versuche mit reinen eingewachsenen Massen, die spätern aber mit Krystallen angestellt wurden, die auf der Oberfläche mit einer härtern Haut überzogen sind, von der man sie nur schwer reinigen kann. *Mohs* gibt das eigenthümliche Gewicht zu 7.408 an; damit stimmt *Wehrle's* Angabe von 7.807 freilich nicht, wohl aber das Resultat, welches Hr. Professor *Baumgartner* erhielt, nämlich 7.514.

Auch das chemische Verhalten stimmt überein. *Mohs* gibt nämlich »vor dem Löthrohre die Reaction von »Schwefel, Tellur und Wismuth« an, Stoffe, die auch Hr. Bergrath *Wehrle*, und zwar in folgenden Zahlenverhältnissen gefunden hat:

Wismuth . . .	60.0,
Tellur	34.6,
Schwefel . . .	4.8.

*) Theil 2, S. 662.

Die neuen Varietäten des Tetradymits sind zu Schoubkau bei Schernowitz, unweit Schemnitz, gefunden worden, und zwar durch Regen aus einer Lettenkluft in Trachytkonglomerat ausgewaschen, auf welche seitdem ein Versuchbau unternommen worden ist. Die Krystalle in mannigfaltigen Gruppirungen sind in diesen Letten eingewachsen. Der Fundort der von *Mohs* beschriebenen Varietät des Tetradymits ist gegenwärtig unbekannt, doch wird die aufmerksame Untersuchung irgend einer alten Sammlung gewifs denselben in Ungarn oder Siebenbürgen bestimmen. Der Tetradymit ist dort in graulichweifsem Quarz eingewachsen, und von gediegenem Gold und Kupferkies begleitet.

Zusatz *). Der Tetradymit oder rhomboëdrische Wismuthglanz findet sich mit gediegenemGolde und goldhältigem Schwefelkies (dem sogenannten Schwitzgolde) in hornsteinartigen Quarz eingesprengt auf der Gregorii Nazianzeni-Grube im Gebirge Feritsel, unweit Pojana, im siebenbürgischen Golddistricte, wahrscheinlich in Grünstein-Porphyr, und wurde bisher mit dem gediegenen Tellur verwechselt. — Zum Tetradymit wird wohl auch das von *Born* (*Catalogue de la Coll. de Mlle de Raab, T. II., p.* 453) und *Estner* (Mineralogie, III. Bd., S. 243) erwähnte Wasserblei gehören, welches zu Kakova bei Rhimaszombath im Gömorer Comitate mit gediegen Gold auf graulichem Quarz in Chloritschiefer eingebrochen hat, und als grofse Seltenheit nur in sehr wenig Sammlungen anzutreffen ist.

*) Vom *P. Partsch.*

II.

Naturhistorische und chemische Untersuchung des prismatoidischen Wismuthglanzes *);

vom

Bergrath und Prof. *Wehrle* in Schemnitz.

Dieses Mineral wurde vor beiläufig sechs Monaten in den k. Probiergaaden zu Schemnitz zur Untersuchung auf Blei und Silber eingesendet, weil man es für Bleiglanz hielt, und zugleich einen Silbergehalt desselben hoffte.

Die gewöhnliche Probe mit schwarzem Flufs gab indessen statt Blei ein sprödes Metallkorn, welches dem Wismuth ähnlich war, aber eine weifsere Farbe und einen körnigen Bruch zeigte; mit Blei angesotten, und dieses abgetrieben, lieferte dasselbe kein Silber.

Mein Freund und ehemaliger Schüler, jetzt königl. Probiers-Adjunct, Herr *Karl Kowarz*, dem das Vorkommen des Wismuths in dieser Gegend und dessen abweichendes Verhalten auffiel, hatte die Gefälligkeit, mich auf dieses neue Mineral aufmerksam zu machen, und veranlafste dadurch die Auffindung des Tellurs in demselben; denn als dieses Mineral vor dem Löthrohre untersucht wurde, verrieth die Färbung der Flamme alsogleich das Daseyn vom Tellur, welches eine genauere Untersuchung später bestätigte.

Dafs es in einer Lettenkluft der Grünstein-Formation zu Schoubkau nächst Schernowitz vorkomme, habe

*) Dem vorhergehenden Aufsatze gemäfs *rhomboëdrischer Wismuthglanz*, oder, nach der trivialen Benennung, *Tetradymit.* (B.)

ich bei der Anzeige dieses Minerals im Jahrbuche der Chemie und Physik von *Schweigger Seidel* 1830, achten Hefte, pag. 482 bereits angeführt, aber meine Hoffnung, dafs es daselbst in gröfserer Menge vorkommen, und eine reiche Quelle des noch immer seltenen Tellurs werden würde, hat sich leider nicht bestätigt, indem es nun ganz verschwunden ist. Die abgeriebenen Stücke und Gerölle, welche in diesen Letten zu finden sind, dürften wohl hinlänglich beweisen, dafs diese Lagerstätte eine secundäre sey, und berechtigen zu der Hoffnung, dafs man es in der Umgebung nochmals finden werde,

Zuerst fand man es in Körnerform und in undeutlichen krystallinischen, mit weifsem Letten gemengten Massen, unter welchen sich vorzüglich vierseitige prismatische Gestalten auszeichneten, welche auch die Ansicht begründeten, dafs dieses Mineral in prismatischen Formen krystallisire.

Später fanden sich zwar ausgezeichnetere Individuen, wie aus Fig. 7 bis 13 ersichtlich ist, welche aber die in der Anzeige gemachte Beschreibung dieses Minerals nicht ganz bestätigen.

Fig. 7, 12 und 13 stellt die Krystalle in natürlicher Gröfse, Fig. 8, 9, 10 und 11 aber in doppelter Gröfse dar. Fig. 7, 12 und 13 lassen sich als Combinationen des prismatischen Systems betrachten, und zwar Fig. 7, *a* und *b*, als zusammengesetzte Gestalt, deren Individuen aus $P+\infty$ und $\breve{P}+\infty$ bestehen, Fig. 12 und 13 aber als Combinationen von $P+\infty$ und $P-\infty$, oder bei Annahme einer andern Hauptaxe als $\bar{P}r$ mit $\breve{P}r+\infty$. Da die Theilbarkeit bei Fig. 7 wie bei Fig. 12 parallel der Fläche *c* Statt findet, so erscheint dieselbe prismatoidisch, wenn die Fläche *c* (Fig. 12 und 13) nicht $P-\infty$, sondern $\breve{P}r\,\infty$ angehört.

Betrachtet man dagegen die Gestalten Fig. 8, 9, 10

und 11, deren Winkeln einander sämmtlich gleich und 120° sind, so wird es sehr wahrscheinlich, dafs diese Gestalten dem rhomboëdrischen Systeme zugehören, und eigentlich Combinationen von $R-\infty$ mit $R+\infty$ sind, daher die Gestalten Fig. 7, 12 und 13 eigentlich als unvollkommene und durch unverhältnifsmäfsige Vergröfserung zweier paralleler Flächen gebildete Formen betrachtet werden müssen.

Ist diese Ansicht richtig, so gehören diese höchst unvollkommenen Gestalten dieses Minerals nicht in das prismatische, sondern in das rhomboëdrische System, und in so fern mufs die gemachte, die krystallographischen Verhältnisse dieses Minerals betreffende, Angabe berichtigt werden.

Der Charakter der Combinationen ist dirhomboedrisch, wie zum Theil aus Fig. 10 ersichtlich ist.

Die gewöhnlichen Combinat. sind $R-\infty$. $R+\infty$ und $R-\infty$. $R+n$.

Die Theilbarkeit ist ausgezeichnet axotom.

Der Bruch ist nicht wahrnehmbar, die Bruchfläche zart gestreift.

Die Farbe ist licht bleigrau, auf frischen Theilungsflächen stark ins Zinnweifse ziehend, oft eisenschwarz angelaufen.

Der Glanz, vorzüglich auf den Theilungsflächen, stark und metallisch.

In dünnen Blättchen gemein biegsam.

Härte = 2.2, Gewicht = 7.500. Die pyramidalen Gestalten gaben in der Regel nur ein sp. Gew. = 7.200. Die Ursache liegt in den hohlen Räumen, welche sie einschliefsen, von welchen man sich bald überzeugen kann, wenn man dieselben parallel ihren Theilungsflächen theilt. Diese Räume bilden oft ein deutliches *u.* Jedes Stück, dessen spec. Gew. man bestimmen will,

mufs daher getheilt und auf den Theilungsflächen sorgfältig untersucht werden. Die Bestimmung des spec. Gewichtes fand bei 14° *R.* Statt.

Erhitzt man dieses Mineral in einer geschlossenen Glasröhre, so verflüchtiget sich etwas Tellur in Gestalt eines weifsen Dampfes, und in der Nähe der erhitzten Stelle condensiren sich kleine, metallisch glänzende Tropfen.

Vor dem Löthrohre, auf Kohle erhitzt, schmilzt es leicht, und verbreitet einen deutlichen Schwefel- und Selengeruch; zugleich entwickeln sich weifse Dämpfe, welche die Kohle nächst dem Korne gelb, von diesem entfernt aber weifs beschlagen.

Die Löthrohrflamme wird blau gefärbt, und man erhält ein glänzendes Metallkorn, welches sich beim Erkalten mit einer röthlichen Haut überzieht, übrigens spröde, im Bruche silberweifs und körnig ist.

Salpetersäure löset das Mineral leicht und mit Rücklassung gelber Flocken, welche sich als Schwefel erweisen, auf, nur unreine Stücke hinterlassen zugleich etwas Kieselerde.

Versetzt man die Auflösung mit schwefeligsaurem Ammoniak, so setzt sich in Kurzem ein schwarzer Niederschlag ab; versetzt man dieselbe zuerst mit reinem, und dann mit schwefelwasserstoffsaurem Schwefelammoniak, so bildet sich ein schwarzer Niederschlag; scheidet man diesen durch das Filtrum ab, und versetzt die Flüssigkeit mit Salzsäure, so setzt sich abermals ein schwarzer Niederschlag ab, der im schwefelwasserstoffsauren Ammoniak löslich ist.

Aus diesem Verhalten geht deutlich hervor, dafs dieses Mineral aus Schwefel, Tellur und Wismuth, nebst Spuren von Selen besteht.

Quantitative Untersuchung.

40 Gran dieses Minerals wurden in reiner Salpetersäure gelöst; die Auflösung erfolgte leicht und mit Entwickelung von Salpetergas; als dieselbe abfiltrirt wurde, blieb auf dem Filtrum, nebst einer Schwefelkugel, noch ein weifses Pulver zurück: erstere verflüchtigte sich auf einem Platinlöffelchen vollständig, sie wog 0.75 Gran; das weifse Pulver blieb, geglüht, unverändert zurück, und wog 0.160 Gr.; mit Kali in einem silbernen Tiegel geschmolzen, löste es sich vollständig auf, und wurde diese Kaliverbindung durch Salzsäure im Übermafs versetzt, zur Trockne abgedampft, und neuerdings in mit Salzsäure säuerlich gemachtem Wasser aufgelöst, so blieb 0.150 eines weifsen Pulvers zurück, welches demnach als Kieselerde betrachtet werden mufs.

Die saure, vom Schwefel und der Kieselerde getrennte Auflösung wurde mit verdünnter Salpetersäure, und dann mit saurer salpetersaurer Barytlösung versetzt, der erhaltene weifse Niederschlag Tags darauf auf dem Filtrum gesammelt, und zuerst mit Salpetersäurehältigem Wasser, dann mit reinem Wasser wohl ausgesüfst, getrocknet und geglüht; er betrug 6.916 Gr., welche 1.21 Schwefel entsprechen, und in Verbindung mit obiger 0.75 Gr. wiegender Schwefelkugel 1.96 Gr. ausmacht.

Nun wurde die Flüssigkeit, um den überschüssigen Baryt zu fällen, mit verdünnter Schwefelsäure, dann mit reinem, und endlich mit schwefelwasserstoffsaurem Schwefelammoniak im Übermafs versetzt, und mit demselben 24 Stunden in Digestion erhalten.

Nach dieser Zeit wurde das gebildete Wismuth-Sulfurid auf dem Filtrum gesammelt, mit einem schwefelwasserstoffsauren Schwefelammoniak haltenden Wasser wohl ausgewaschen, und bis zur vollständigen Zerlegung mit Salpetersäure erhitzt, nach erfolgter Abschei-

dung des Schwefels aber mit kohlensaurem Ammoniak bei einer Temperatur von 80° *R.* gefällt, und das ausgeschiedene Wismuthoxyd erst nach zwölf Stunden abfiltrirt.

Nachdem dieses getrocknet und im Platintiegel ausgeglüht wurde, betrug das Gewicht desselben 26.46 Gr., welches 23.79 Wismuthmetall entspricht.

Die schwefelwasserstoffsaure Schwefelammoniakhältige, von dem Wismuth-Sulfurid getrennte Flüssigkeit wurde, bis sie etwas sauer reagirte, mit Chlorwasserstoffsäure versetzt, das ausgeschiedene Tellur-Sulfurid gesammelt, gewaschen, und mit concentrirter Chlorwasserstoffsäure zerlegt; die tellurhältige Flüssigkeit mit schwefeligsaurem Ammoniak versetzt, die freie Säure aber vorsichtig mit reinem Ammoniak neutralisirt, weil sonst immer etwas Tellur in der Auflösung blieb.

Das gefällte Tellur gesammelt, getrocknet, und endlich bis zum beginnenden Schmelzen erhitzt, wog 13.89 Gr. 40 Gran dieses Minerals lieferten demnach

Wismuth . . .	23.790,
Tellur	13.890,
Schwefel . . .	1.960,
Kieselerde . . .	0.160,
	39,800,

also enthalten 100 Theile desselben

Wismuth	59.47,
Tellur	34.72,
Schwefel	4.90,
Siliciumoxyd . .	0.40,
	99.49.

Da aber das Siliciumoxyd offenbar mechanisch beigemengt ist, so gibt die Rechnung für 100 Theile dieses Minerals eigentlich:

Wismuth	59.84,
Tellur	35.24,
Schwefel	4.92,

letzterem schon die Spur von Selen zugerechnet, dessen Menge nicht bestimmbar ist.

Diese Zusammensetzung entspricht aber sehr nahe der Formel $BiS + BiTe^2$, und es dürfte daher dieses Mineral in chemischer Hinsicht am nächsten den Arsenik-Schwefelmetallen stehen, welche ebenfalls aus zwei negativen und einem positiven Metalle zusammengesetzt sind.

In naturhistorischer Hinsicht gehört es offenbar unter die Glanze; schwieriger wird es zu entscheiden, in welches Geschlecht dieser Ordnung es gerechnet werden solle.

Nimmt man blofs auf die naturhistorischen Eigenschaften dieses Minerals Rücksicht, so gehört es zu Folge der Farbe, der Härte und der Schwere am nächsten zum Bleiglanz.

Dafs der hexaëdrische Bleiglanz, als die einzige Species, welche man bis jetzt kennt, in tessularen Formen krystallisirt, kann die Ausschliefsung einer andern ihm sehr verwandten Species nicht bedingen, denn es kann aufser dem hexaëdrischen Bleiglanze auch ein rhomboëdrischer oder prismatischer Bleiglanz existiren, so wie es nebst dem tetraëdrischen Kupferglanze auch einen prismatischen und einen prismatoidischeu gibt, das ist, Krystallisation allein kann irgend ein Mineral nicht von einer Ordnung noch von einem Geschlechte ausschliefsen, wenn diefs nicht durch andere Merkmale geschieht.

In das Geschlecht Tellurglanz kann es, ohne die Charakteristik desselben zu erweitern, nicht gestellt werden, da es Farbe, Härte und Schwere ausschliefsen;

gleiche Gründe gestatten nicht dessen Vereinigung mit dem Molybdänglanze.

Von dem Geschlechte Wismuthglanz wird das beschriebene Mineral durch das grofse spec. Gewicht ausgeschlossen, selbst dann, wenn die Grenzen im Charakter des Wismuthglanzes erweitert werden, weil das spec. Gewicht des Wismuthglanzes von Rezbanya nur 6.519 beträgt, und diese Erweiterung, welche Herr Prof. *Mohs* pag. 579 empfiehlt, daher nicht hinreichen würde, das beschriebene Mineral einzuschliefsen, dessen spec. Gewicht, nach mehrmaligen wiederholten Untersuchungen, 7.500 beträgt; würde man aber die Grenzen im Charakter des Wismuthglanzes so weit erweitern, so würde die Charakteristik des Blei- und des Wismuthglanzes gar keine Verschiedenheit darbieten. Das grofse spec. Gewicht dieses Körpers gestattet nicht dessen Einordnung zum Antimonglanz-Geschlechte, und eben diese Eigenschaft, so wie auch die Farbe, schliessen es von dem Melanglanz-, Kupferglanz- und dem Silberglanz-Geschlechte vollständig aus.

Es bleibt daher nichts anders übrig, als dieses Mineral, weil es, obwohl in seinen naturhistorischen Eigenschaften sehr ausgezeichnet, nicht in die aufgestellten Geschlechter der Ordnung Glanze pafst, entweder in den Anhang zu dem sogenannten Molybdänsilber zu verweisen, von welchem es sich aber, wie in der Folge gezeigt wird, wesentlich unterscheidet, oder es, ohne Rücksicht auf dessen Bestandtheile, welche die naturhistorische Methode ohnehin nicht beachtet, dem verwandtesten Geschlechte, das ist, dem Bleiglanze zu unterordnen, oder endlich es, sammt dem sogenannten Molybdänsilber, einem neuen Geschlechte zuzuweisen.

Sowohl das erste als das letzte scheint aber nicht rathsam, denn es ist kein Grund vorhanden, ein ausge-

zeichnetes, in allen seinen naturhistorischen Eigenschaften bekanntes Mineral im Anhange aufzuführen, und eine Vermehrung der Geschlechter dürfte nur dann nöthig seyn, wenn ausgezeichnete naturhistorische Eigenschaften solche gebieten.

In Anbetracht des Umstandes, dafs durch die Erweiterung der Grenzen im Charakter des Wismuthglanzes dieser selbst zerstört würde, dürfte die Aufnahme dieses Fossils in das Geschlecht des Bleiglanzes, unter dem Namen: »rhomboëdrischer Bleiglanz,« den Vorzug verdienen, welches zu entscheiden der Verfasser übrigens gerne geübtern Krystallographen und Systematologen überläfst.

Die gröfste naturhistorische Ähnlichkeit besitzt dieses Mineral mit jenem, welches Herr Prof. *Mohs* im zweiten Bande seines Grundrisses, pag. 662, im Anhange zum Molybdänsilber beschreibt, dessen Fundort aber nicht näher angezeigt ist; es unterscheidet sich von demselben nur durch gröfsere Härte. Da dem Verfasser weder der Ort, wo dieses Mineral vorgekommen, bekannt ist, noch demselben etwas davon zu Gebote steht, so konnte es auch mit demselben nicht verglichen werden.

In chemischer Hinsicht ist es mit dem prismatischen Wismuthglanz von Rezbanya ganz gleich; denn als dieses Mineral, welches in Beziehung auf Farbe, Glanz, Härte und Vorkommen auffallend mit dem beschriebenen übereinstimmt, untersucht wurde, zeigte sich alsogleich, dafs es auch dieselben qualitativen sowohl als auch quantitativen Bestandtheile enthalte, und dafs es in dieser Beziehung ganz von dem Wismuthglanze von Riddarhyttan in Westmanland abweiche, welches nach Herrn *Heinrich Rose* aus 80.98 Th. Wismuth und 18.72 Schwefel, oder nach der Formel BiS^2 zusammengesetzt ist.

Die Untersuchung wurde ganz nach der oben beschriebenen Weise geleitet, daher dieselbe hier nicht wiederholt wird. Der aufgefundene Unterschied bestand nur in der gröfseren Siliciumoxydmenge, welche in den reinsten Stücken des Rezbanyaer Wismuthglanzes immer 8 pCt. überstieg, und bis 18 pCt. wechselte.

Die abweichende Menge des Siliciumoxydes, die Körnerform, in welcher es zurückbleibt, wenn gröfsere Stücke des Wismuthglanzes der Einwirkung der Säuren ausgesetzt wurden, lassen keinen Zweifel übrig, dafs auch hier dasselbe mechanisch beigemengt ist; nimmt man aber das achtfache spec. Gewicht des Minerals von Schoubkau, und addirt demselben das spec. Gewicht des rhomboëdrischen Quarzes zu, so erhält man nach erfolgter Division durch 9 ziemlich nahe das spec. Gew. des Rezbanyaer Wismuthglanzes, welches sich demnach als ein inniges Gemenge des Minerals von Schoubkau mit dem rhomboëdrischen Quarze betrachten läfst.

Herr Professor *v. Mohs* stellt aber das Wismuthglanz von Rezbanya ins prismatische System; dem Verfasser sind keine regelmäfsigen Gestalten dieses Minerals zugekommen, um solche mit den vorliegenden, im ersten Augenblicke sich auch als prismatisch dargebotenen, genau vergleichen zu können. Sollte die Verschiedenheit dieser zwei sich naturhistorisch sehr nahe verwandten Mineralien wirklich erwiesen werden, so würden sich dieselben, da sie ganz gleiche Bestandtheile enthalten, gleich dem hexaëdrischen Eisenkiese zu dem prismatischen Eisenkiese verhalten.

Herr *Heinrich Rose* hat nachgewiesen, dafs der Wismuthglanz aus Schweden kein Tellur, dagegen aber 18.72 Schwefel enthalte. Der Wismuthglanz von Rezbanya enthält nur 4.92 Schwefel und 35.24 Tellur, das spec. Gew. desselben mufs also auch gröfser als jenes

des schwedischen seyn, was die Erfahrung ebenfalls bestätiget; es können demnach zwei in ihren naturhistorischen sowohl als chemischen Eigenschaften sehr abweichende Mineralien nicht vereinigt bleiben, sondern der Rezbanyaer Wismuthglanz mufs von dem schwedischen als wesentlich verschieden getrennt, und mit dem beschriebenen Mineral von Schoubkau vereinigt werden.

Es verdient hier bemerkt zu werden, dafs durch chemische Untersuchung die beobachteten naturhistorischen Eigenschaften eines Individuums berichtigt werden, denn nur durch Auflösung des Rezbanyaer Wismuthglanzes in Säuren wird die mechanische Beimengung des rhomboëdrischen Quarzes in demselben, und die durch diesen bedingte Unrichtigkeit des spec. Gewichtes desselben erwiesen.

Schon *Selb* hat im Taschenbuche der Mineralogie, neunten Bandes, pag. 451, nachgewiesen, dafs der Wismuthglanz von Johann Georgenstadt dem Wismuthkupfererze angehöre; ob der Wismuthglanz von Altenberg, Schneeberg in Sachsen, jener von Joachimsthal in Böhmen, von Radruth in Kornwall, und von dem beresofskischen Gebirge in Siberien blofs Wismuth-Sulfurid, wie jener von Riddarhyttan in Schweden, oder aber auch Tellur, wie jener von Schoubkau und Rezbanya enthalte, ob es endlich wirklich einen Wismuthglanz gebe, welcher, wie *Sage* angibt, 60 Wismuth und 40 pCt. Schwefel, also BiS^6 enthalte, ist demnach noch zu untersuchen.

Der Verfasser mufs sich auf die Untersuchung des sogenannten Molybdänsilbers von Deutsch-Pilsen beschränken, da demselben die Wismuthglanze aus den besagten Gegenden nicht zu Gebote stehen.

Untersuchung des sogenannten Molybdänsilbers von Deutsch-Pilsen.

Die königl. bergakademische Mineralien-Sammlung besitzt ein kleines Stückchen dieses seltenen Minerals, und es war daher möglich, es mit dem oben beschriebenen genau zu vergleichen, und zugleich dessen chemische Zusammensetzung zu erforschen.

Es wird zwar angegeben, dafs *Klaproth* dasselbe bereits untersuchte, und solches aus 95 pCt. Wismuth und 5 pCt. Schwefel zusammengesetzt gefunden habe.

Da aber dieses Mineral wirklich Tellur enthält, welches *Klaproth* wohl erkannt haben würde, so bezweifelt der Herr geheime Rath von *Leonhard* mit vielem Grunde, dafs dieser verdienstvolle Chemiker dieses Mineral wirklich zerlegt habe.

Das vorliegende Exemplar ist ein Theilungsstück, aus welchem sich dessen Grundgestalt, welche Hr. Prof. *v. Mohs* für rhomboëdrisch erklärte, durchaus nicht wahrnehmen läfst.

Die Theilbarkeit ist ausgezeichnet und monotom; überdiefs besitzt dieses Mineral noch eine, obwohl unvollkommene, Theilbarkeit, welche senkrecht auf der erstern zu stehen scheint.

Die Farbe ist licht stahlgrau, und selbst auf ganz frischen Theilungsflächen in's Röthliche spielend; vergleicht man dieselbe mit jener des oben beschriebenen Minerals von Schoubkau, so findet man sie wesentlich verschieden.

Der Glanz ist metallisch und stark, mit dünnen Blättchen ist es elastisch biegsam.

Die Härte ist = 2.5, und das Mineral von Schoubkau wird von demselben ausgezeichnet geritzt.

Das spec. Gew. ist nach mehrmaligen Versuchen und bei 14° *R.* = 8.440. *Breithaupt* gibt es = 8.0 an.

Vor dem Löthrohre verbreitet es einen sehr schwachen Schwefel- und Selengeruch, schmilzt übrigens leicht mit Entwickelung eines weifsen Dampfes, welcher in der Nähe des Kornes die Kohle gelb, von diesem entfernt dieselbe weifs beschlägt.

Die Löthrohrflamme wird ausgezeichnet blau gefärbt.

In Salpetersäure löset es sich leicht auf, und hinterläfst gelbe Flocken, welche aber beim anhaltenden Kochen gänzlich verschwinden.

Versetzt man die erzeugte Auflösung mit Chlorwasserstoffsäure, so entsteht ein weifser käsiger Niederschlag, welcher am Sonnenlichte schwarz wird; theilt man der Auflösung schwefeligsaures Ammoniak zu, so setzt sich in kurzer Zeit metallisches Tellur ab.

Zu Folge dieser vorläufigen Untersuchung enthält das sogenannte Molybdänsilber Wismuth, Tellur, Silber und Schwefel, nebst Spuren von Selen.

Quantitative Untersuchung.

11.6 Gr. dieses Minerals wurden in Salpetersäure gelöst, sie liefsen 0.11 Schwefel zurück, welcher, auf einem Platinlöffel erhitzt, vollständig abbrannte.

Die Auflösung wurde mit Chlorwasserstoffsäure versetzt. Das gefällte Silberchlorid, gesammelt und getrocknet, wog 0.330 Gr., welches 0.24 Gr. metallischem Silber entspricht; zur gröfsern Sicherheit wurde das Filtrum sammt dem Silberchlorid in eine Bleiplatte gewickelt, und letzteres auf einem Treibscherben abgetrieben. Das Silberkorn, welches auf diese Art erhalten wurde, wog 0.22 Gr.

Die Flüssigkeit wurde nun mit einer verdünnten, mit etwas Chlorwasserstoffsäure sauer gemachten Baryumchloridlösung versetzt, und Tags darauf abfiltrirt. Der erhaltene schwefelsaure Baryt wog 1.20, und ent-

spricht 0.16 Schwefel, welcher demnach in Verbindung mit dem obigen 0.27 Gr. beträgt.

Zur Fällung des überschüssig zugesetzten Baryts wurde nun die Flüssigkeit mit verdünnter Schwefelsäure, und als keine Fällung mehr erfolgte, mit reinem Ammoniak, endlich mit schwefelwasserstoffsauremSchwefelammoniak im Übermafs versetzt, und mit demselben durch längere Zeit in Digestion erhalten, um das gebildete Tellur-Sulfurid vollständig aufzulösen, hierauf das Wismuth-Sulfurid gesammelt, mit Salpetersäure zerlegt, mit kohlensaurem Ammoniak gefällt, getrocknet und ausgeglüht; es wog 8.00 Gran, und entspricht 7.19 Wismuth.

Aus der schwefelwasserstoffsauren Schwefelammoniaklösung wurde das Tellur-Sulfurid durch Chlorwasserstoffsäure gefällt, durch eine gleiche Säure, welcher etwas Salpetersäure zugetheilt wurde, zerlegt, und das Tellur mittelst schwefeligsaurem Ammoniak metallisch gefällt; es wog, bis zum beginnenden Schmelzen getrocknet, 3.45 Gr., woraus hervorgeht, dafs 11.6 Gr. des sogenannten Molybdänsilbers von Deutsch-Pilsen

Wismuth = 7.19,
Tellur = 3.45,
Silber = 0.24, und
Schwefel = 0.27,

nebst Spuren von Selen enthalten, aus welchen Daten die Rechnung für 100 Theile

Wismuth 61.15,
Tellur 29.74,
Silber . . . . . 2.07, und
Schwefel . . . . 2.33, oder

1 Atom Wismuth-Sulfurid = 17.73,
1 Atom Silber-Telluret = 3.28, und
1 Atom Wismuth-Telluret = 75.09

gleich $BiS + AgTe + BiTe$ ergibt.

Das Molybdänsilber enthält demnach allerdings Silber, und ist sowohl durch die chemische Zusammensetzung als auch durch die naturhistorischen Eigenschaften von dem Wismuthglanze und von dem beschriebenen Mineral von Schoubkau wesentlich verschieden, obwohl es dem letzten am meisten verwandt ist, und daher im naturhistorischen Systeme an dasselbe gereiht werden mufs.

Das Molybdänsilber dem Wismuthglanze zu unterordnen, wie diefs Herr Prof. *Haidinger* gethan hat, dürfte nur die analoge chemische Zusammensetzung, nicht aber dessen naturhistorische Eigenschaften gestatten, indem das spec. Gewicht fast um 2.000 abweicht, und daher dasselbe ausschliefset.

Da Herr Prof. *Berzelius* auch das Molybdänsilber Borns untersuchte, und in demselben weder einen Schwefel noch einen Silbergehalt fand, so wird es wahrscheinlich, dafs zu Deutsch-Pilsen (Börseny) nächst Gran in Ungarn mehrere tellurhältige Mineralien vorkamen, deren genauere Untersuchung vielleicht bald möglich wird, da der seit vielen Jahren aufgelassene Bau daselbst seit einigen Monaten neuerdings aufgenommen wurde.

III.

Über Sonnenuhren;

von

J. J. Littrow.

Obschon dieser Gegenstand an sich selbst und in Beziehung auf die analytischen Entwickelungen, zu welchen er Veranlassung gibt, sehr interessant ist, so scheint er doch seit Langem einer ohne Zweifel ganz unverdienten Vernachlässigung Preis gegeben zu seyn. Mir wenigstens ist nicht bekannt, dafs man bei der Untersuchung derjenigen Linien, welche das Ende des Schattens auf den Uhrflächen beschreibt, über die gegen den Horizont senkrechten Ebenen herausgegangen wäre, und noch viel weniger scheint man sich mit der analytischen Bestimmung der Sonnenuhren auf krummen Flächen beschäftiget zu haben. Das Folgende soll ein Versuch seyn, diese Versäumnisse nachzuholen.

Nehmen wir an, dafs in irgend einem gegebenen Puncte einer krummen Fläche, deren Gleichung ebenfalls gegeben ist, eine gerade Linie parallel mit der Weltaxe befestiget sey. Wir wollen diesen Punct für den Durchschnitt von drei unter sich senkrechten Coordinaten x, y, z annehmen, und jene gerade Linie, den Stil der Uhr, in die Axe der z legen, so dafs also die Ebene der xy die des Äquators ist. Denkt man sich durch den Stil eine Ebene gelegt, die immer durch den Mittelpunct der Sonne geht, so wird diese Ebene senkrecht auf dem Äquator stehen, und daher die Ebene eines Stundenkreises seyn. Da aber der Schatten des Stiles, wenn er von der Sonne beschienen wird, ganz in diesen Stundenkreis fällt, so wird auch die gesuchte

Schattenlinie der Uhrfläche der Durchschnitt derselben mit jener Stundenebene seyn. Hat man daher die Gleichung der Stundenebene zwischen denselben bereits angeführten Coordinaten, so werden diese beiden Gleichungen, der Stundenebene und der Uhrfläche, zusammen genommen die gesuchten Gleichungen der verschiedenen Schattenlinien seyn, d. h. ihrer Projectionen in den drei coordinirten Ebenen der xy, xz und yz.

Da aber diese krummen Schattenlinien, als durch den Schnitt einer Ebene mit einer Fläche entstanden, ebenfalls ebene Curven von einfacher Krümmung seyn müssen, so wird man, ihre Gestalt einfacher zu übersehen, nicht sowohl ihre Projectionen in den coordinirten Ebenen, als vielmehr sie selbst in der schneidenden Ebene des Stundenkreises aufsuchen. Diese erhält man aber sehr leicht, wenn man in den beiden erwähnten Gleichungen zwischen x, y und z die Gröfsen $x = t \cos. s$, $y = t \sin. s$ und $z = u$ substituirt, wo s der gegebene Stundenwinkel der Sonne, und t, u die senkrechten Coordinaten der Schattenlinie sind, so dafs t von dem Fufspuncte des Stiles im Anfange der Coordinaten und in dem Durchschnitte der Stundenebene mit dem Äquator, u aber in der Ebene des Stundenkreises senkrecht auf t genommen wird. Diese Betrachtungen, durch die Analyse ausgedrückt, werden uns eine vollständige Kenntnifs dieser Schattenlinien, ihrer Gestalt und Lage nach, geben. Es wird dann noch übrig seyn, das Ende dieser Schattenlinien aufzusuchen, und die verschiedenen krummen Linien zu bestimmen, welche dieses Schattenende auf der Uhrfläche sowohl während dem Laufe eines Tages, dessen Sonnendeclination gegeben ist, als auch für jeden einzelnen gegebenen Stundenwinkel während dem Laufe eines ganzen Jahres beschreibt. Ist r die Länge des Stils, und ρ die Entfernung des Schatten-

endes von dem Fufspuncte des Stiles, so wird die gerade Linie das Ende des Schattens in der Uhrfläche geben, welche durch das freie Ende des Stiles und durch den Mittelpunct der Sonne geht. Da sich aber die Sonne während einem Tage um die ganze Peripherie ihres Parallelkreises um den Stil bewegt, so wird sich auch jene gerade, durch die Sonne gehende Linie, um das freie Ende des Stiles, als um einen festen Punct bewegen, und während dieser Bewegung mit dem Stile selbst immer denselben Winkel bilden, vorausgesetzt, dafs die Declination der Sonne während einem Tage unveränderlich ist, d. h. mit andern Worten: jene Gerade wird täglich die Oberfläche eines Kegels beschreiben, dessen Spitze in dem freien Ende des Stils, und dessen Axe dieser Stil selbst seyn wird. Die Oberfläche dieses Kegels wird die Uhrfläche in einer krummen Linie, im Allgemeinen von doppelter Krümmung schneiden, und man wird diese krumme Linie erhalten, wenn man die Gleichung der Uhrfläche und die des Kegels als coexistirend betrachtet. Dieser Kegel wird ferner auch die Stundenebene in einer Curve von einfacher Krümmung, oder genauer in einer geraden Linie schneiden, da die den Kegel schneidende Stundenebene immer durch die Axe des Kegels geht, und man wird diese gerade Linie erhalten, wenn man die beiden Gleichungen des Kegels und der Stundenebene zusammen betrachtet. Die Oberfläche dieses Kegels wird endlich auch die Schattenlinien schneiden, und da diese Schattenlinien, nach dem Vorhergehenden, die Durchschnitte der Stundenebene mit der Uhrfläche sind; so wird man den Durchschnittspunct des Kegels mit der Schattenlinie erhalten, wenn man alle drei Gleichungen, der Uhrfläche, der Stundenebene und des Kegels, zugleich Statt haben läfst. Sucht man nämlich aus diesen drei Gleichungen die Werthe

von x, y und z durch die gegebenen Gröfsen des Problemes, so wird die Distanz ρ dieses gemeinschaftlichen Durchschnittspunctes der drei genannten Flächen gleich

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

seyn, und diese Gröfse ρ wird zugleich die Distanz des Schattenendes für jede Schattenlinie von dem Fufspuncte des Stiles seyn. Dieser Ausdruck von ρ wird, der Natur des Problemes zu Folge, eine Function des Stundenwinkels s der Sonne, der Declination δ der Sonne und der Polhöhe φ des Ortes der Oberfläche der Erde seyn, an welchem man die Uhr errichtet hat, und er wird überdiefs noch mehrere constante Gröfsen enthalten können, welche von der Gestalt und Lage der gewählten Uhrfläche abhängen. Dieses vorausgesetzt, wird man diesen Ausdruck $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ als die Gleichung einer Curve zwischen zwei Polarcoordinaten, z. B. ρ und s, betrachten können, und indem man in ihr der Gröfse s nach und nach alle Werthe von o bis 360 gibt, wird man alle die Puncte der Uhrfläche bestimmen, durch welche während dem Laufe eines Tages, an welchem die Sonne eine bestimmte Declination δ hat, das Ende des Schattens geht. Wiederholt man diese Bestimmungen für alle Werthe von δ von $+23\,{}^1/_2$ bis $-23\,{}^1/_2$ Grad, so wird man die Uhrfläche ganz mit diesen auf einander folgenden Curven der täglichen Bewegung des Schattenendes überziehen. Betrachtet man aber jene Gleichung als eine für die Gleichung einer Curve zwischen den Polarcoordinaten ρ und δ, so wird man z. B. für den Mittag, wo $s = o$ ist, die Curve auf der Uhrfläche erhalten, die das Schattenende des wahren Mittags während einem ganzen Jahre durchläuft, und wenn man auch diese Bestimmung für alle Werthe von s von o bis 360 wiederholt, so wird man eine Anzahl von aufeinan-

der folgenden Curven erhalten, welche das vorher betrachtete System von Curven schneiden, und mit ihnen zusammen betrachtet eine Art von Netz bilden werden, welches den ganzen Theil der Uhrfläche bedecken wird, der von dem Schatten des Stiles erreicht werden kann. Setzt man endlich für die einzelnen Stunden 1^h, 2^h, 3^h, . . . nicht $s = 15^0, 30^0, 45^0, \ldots$, sondern diese Winkel $\pm$ der Zeitgleichung der gegebenen Tage, so wird man die Schattenlinien und alle bisher betrachteten krummen Linien für die sogenannte mittlere Sonnenuhr erhalten, die man bisher nur für vertical stehende Uhrebenen, und auch in diesen nur für den mittleren mittägigen Schatten ausgeführt hat.

Die Anwendung der bisher angeführten Betrachtungen bietet keine andere Schwierigkeit dar, als die, welche aus dem Geschäfte der Elimination folgen. Der Zustand unserer Analyse erlaubt uns nur selten, diese Elimination auf Gleichungen anzuwenden, die über den zweiten Grad gehen. Indessen darf man, wenn einmal für jeden speciellen Fall, z. B. die drei Gleichungen für das Schattenende gefunden sind, das Problem als aufgelöst betrachten, so wie man in der Mechanik jede Aufgabe als aufgelöst ansieht, wenn die die Auflösung enthaltende Differenzialgleichung der zweiten Ordnung gegeben ist. Die Integration dieser Gleichungen geht die Mechanik unmittelbar eben so wenig ab, als die Elimination jener die Gnomonik angeht, und es ist in beiden Fällen blofs die Sache der Analyse, die von der Wissenschaft innerhalb ihren Grenzen gegebene Auflösung jedes Problems auf dem Gebiete der reinen Mathematik weiter zu führen.

Gehen wir nun zu der Ausführung der vorhergehenden allgemeinen Darstellung über, und wählen wir zuerst zur Uhrebene irgend eine willkürlich gegen den

Horizont und gegen den Meridian geneigte Ebene. Ist n die Neigung dieser Ebene gegen den Horizont, und ist k der Winkel ihres Durchschnittes im Horizonte mit der ebenfalls horizontalen Mittagslinie, der Winkel n von Nord nach Süd bis 90°, und der Winkel k von Süd nach West bis 360° gezählt, so hat man bekanntlich für die Gleichung dieser Uhrebene

$$z = \xi \text{ tang.} n \text{ sin.} k + v \text{ tang.} n \cos. k, \quad . \quad \text{(I.)}$$

wo ξ in der Mittagslinie und ξv im Horizonte, also z auf dem Horizonte senkrecht steht. Der Anfang dieser Coordinaten ist in dem Fufspuncte des Stils, der der Weltaxe parallel vorausgesetzt wird, also in einem Puncte der Uhrebene selbst genommen. Da die Stundenebene senkrecht auf dem Äquator steht, und mit der Ebene des Meridians den Winkel s bildet, so ist ihre Gleichung, wie man leicht findet,

$$z = \xi \text{ tang.} \varphi - v \frac{\text{Cotang.} s}{\cos. \varphi} \quad . \quad . \quad . \quad \text{(II.)}$$

Beide Gleichungen, zusammen betrachtet, geben nach dem Vorhergehenden die Schattencurve auf der Uhrebene, die also hier, wie die Gleichungen zeigen, eine gerade Linie ist. Um diese Gerade zu fixiren, denke man sich eine durch die Mittagslinie im Horizonte senkrecht stehende Ebene, die die Uhrebene in einer andern Geraden schneiden wird, welche wir die *Mittagslinie der Uhrebene* nennen wollen. Da für diese Linie, die man immer leicht durch die bekannten practischen Verfahren finden kann, die Gröfse v verschwindet, so sind ihre Gleichungen

$$v = 0 \quad \text{und}$$
$$z = \xi \text{ tang.} n \text{ sin.} k.$$

Da sonach die Gleichungen der Schattenlinie und der Mittagslinie der Uhr bekannt sind, so läfst sich auch

der Winkel finden, welchen diese beiden Linien im Fufspuncte des Stiles unter sich bilden. Nennt man ψ diesen Winkel, so erhält man

$$\text{Cotang.}\,\psi = \frac{\sin. n \cos. k\,(\sin. n \sin.\varphi \sin. k + \cos. n \cos.\varphi)}{\sin. n \cos.\varphi \sin. k - \cos. n \sin.\varphi} + \frac{(\cos.^2 n + \sin.^2 n \sin.^2 k)\,\text{Cotang.}\,\varsigma}{\sin. n \cos.\varphi \sin. k - \cos. n \sin.\varphi}.$$

Wir wollen nun auch die Gleichung des Kegels suchen, der durch die Umdrehung der geraden Linie entsteht, die immer durch das freie Ende des Stils und durch den Mittelpunct der Sonne geht. Da die Spitze dieses Kegels durch den Endpunct des Stiles geht, dessen Länge r ist, und da seine Axe, der Stil selbst, mit dem Horizonte den Winkel $180 - \varphi$, und mit jeder seiner Seitenlinien den Winkel $90 + \delta$ bildet, so erhält man, wenn man das bekannte, zuerst von *Monge* gegebene Verfahren für die conischen Flächen anwendet, für die Gleichung dieses Kegels den Ausdruck

$$\xi^2 (\sin.^2\delta - \cos.^2\varphi) + \zeta^2 (\sin.^2\delta - \sin.^2\varphi) - 2\xi\zeta \sin.\varphi \cos.\varphi + (v^2 - r^2) \cos.^2\delta + 2r (\xi \cos.\varphi + \zeta \sin.\varphi) \cos.^2\delta = 0. \text{ (III.)}$$

Um das Ende der Schattenlinie zu finden, soll, dem Vorhergehenden gemäfs, die Gröfse ξ, ψ und ζ aus den drei Gleichungen I., II. und III. durch Elimination gefunden werden. Diese Elimination geht hier allerdings an, da die gegebenen Gleichungen nun des zweiten Grades sind. Da sie aber doch, wie schon ihr Anblick zeigt, auf sehr umständliche Entwickelungen führen, so wird es angemessener seyn, die bisher gebrauchten Coordinaten ξ, v, ζ auf die bereits oben erwähnten x, y und z zurückzuführen, die mit diesen denselben Anfangspunct haben, wo aber z in der Linie des Stiles, und xy in der Ebene des Äquators liegen, der auf dem Stile senkrecht steht. Zwar wird durch diese Änderung der

Coordinaten die Gleichung der Uhrebene nicht leicht einfacher werden, da die Lage derselben gewöhnlich gegen den Horizont, nicht gegen den Äquator gegeben wird. Allein die beiden andern Gleichungen der Stundenebene und des Lichtkegels werden offenbar einfacher werden, da sich beide unmittelbar auf den Äquator beziehen. Ja selbst die Gleichung der Uhrebene wird eine einfachere Gestalt annehmen, wenn man die auf den Horizont sich beziehenden Gröfsen n und k, wodurch die Lage der Uhrebene bestimmt wurde, auf zwei andere Gröfsen β und γ bringt, welche die Lage der Uhrebene gegen den Äquator ausdrücken. Ist nämlich β der Winkel der Mittagslinie der Uhrebene mit dem aus dem Fufspuncte des Stiles auf den Horizont herabgelassenen Verticale, und ist γ die Neigung der Uhrebene gegen den Meridian, so hat man

$$\sin.\beta \sin.\gamma = \cos.n \quad \text{und}$$
$$\cos.\beta \sin.\gamma = \sin.n \sin.k;$$

und mit diesen Werthen erhält man, wie man leicht sieht, für die Uhrebene die Gleichung

$$z = -x \text{ tang.}(\varphi+\beta) - \frac{y \text{ Cotang.}\gamma}{\cos.(\varphi+\beta)}, \quad \text{(I′.)}$$

und eben so für die Stundenebene

$$y = x \text{ tang.}s, \quad \text{(II′.)}$$

und endlich für den Lichtkegel

$$x^2 + y^2 = (z-r)^2 \text{ Cotang.}^2\delta \quad \text{(III′.)}$$

Die Gleichungen I′. und II′., zusammen genommen, gaben die Schattenlinien. Setzt man in ihnen $y = 0$, so erhält man die Gleichungen der Mittagslinie der Uhr, oder

$$y = 0,$$
$$z = -x \text{ tang.}(\varphi+\beta).$$

Nennt man daher wieder ψ den Winkel der Schat-

tenlinie mit der Mittagslinie der Uhr, so erhält man aus den vier vorhergehenden Gleichungen

$$\text{tang.}\,\psi = \frac{\cos.(\varphi+\beta)}{\sin.(\varphi+\beta)\cos.\gamma + \sin.\gamma\,\text{Cotang.}\,\varsigma}$$

übereinstimmend mit dem oben gefundenen Werthe von ψ.

Eliminirt man aus den Gleichungen I′., II′., III′. je zwei der drei Gröfsen x, y und z, so erhält man, nach dem Vorhergehenden, den Ort für den Endpunct der Schattenlinie. Da es für die Ausübung bequemer seyn wird, diese Gröfsen x, y, z nicht durch den Stundenwinkel s der Sonne, sondern unmittelbar durch den Stundenwinkel ψ der Uhr selbst auszudrücken, so wird man, dem letzten Ausdrucke von tang. ψ zu Folge, statt der Gleichung II′. die folgende setzen:

$$y = \frac{x\sin.\gamma}{\cos.(\varphi+\beta)\,\text{Cotang.}\,\psi - \sin.(\varphi+\beta)\cos.\gamma}.$$

Nimmt man dann die angezeigte Elimination vor, und setzt der Kürze wegen

$$Q = \sin.(\varphi+\beta) + \cos.(\varphi+\beta)\cos.\gamma\,\text{tang.}\,\psi + \text{tg.}\delta\,.\sqrt{[\cos.(\varphi+\beta) - \sin.(\varphi+\beta)\cos.\gamma\,\text{tg.}\psi]^2 + \sin.^2\gamma\,\text{tg.}^2\psi}$$

so erhält man

$$\frac{x}{r} = \frac{\sin.(\varphi+\beta)\cos.\gamma\,\text{tang.}\,\psi - \cos.(\varphi+\beta)}{Q},$$

$$\frac{y}{r} = -\frac{\sin.\gamma\,\text{tang.}\,\psi}{Q},$$

$$\frac{z}{r} = \frac{\cos.(\varphi+\beta)\cos.\gamma\,\text{tang.}\,\psi + \sin.(\varphi+\beta)}{Q},$$

wodurch der Ort des Schattenendes auf der Uhrebene für jeden Winkel ψ oder für jede einzelne Schattenlinie gegeben ist. Nennt man dann ρ die Entfernung dieses Punctes von dem Fufspuncte des Stils, oder ist ρ die gesuchte Länge des Schattens, so hat man

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

oder

$$\rho = \frac{r}{Q \cos. \psi}.$$

Das Vorhergehende enthält alles, was man von Sonnenuhren auf gegebenen Ebenen verlangen kann, da die Bestimmung und Verzeichnung der durch die letzte Gleichung gegebenen Curven und des ganzen oben erwähnten Netzes der Uhrebene keine weitere Schwierigkeit, als die Mühe der Ausführung, haben kann. Setzt man z. B., um die Eigenschaft der von dem Schattenende beschriebenen Curve näher zu kennen, in der letzten Gleichung

$$X = \rho \cos. \psi, \quad Y = \rho \sin. \psi \quad \text{und} \quad \rho^2 = X^2 + Y^2,$$

so erhält man für die Gleichung der täglichen Curve des Schattenendes

$$\begin{aligned} & Y^2 (\cos.^2(\varphi+\beta) \cos.^2\gamma - \sin.^2\delta) \\ + & X^2 (\sin.^2(\varphi+\beta) - \sin.^2\delta) \\ + & 2XY \sin.(\varphi+\beta) \cos.(\varphi+\beta) \cos.\gamma \\ - & 2r \cos.^2\delta \,(Y \cos.(\varphi+\beta) \cos.\gamma + X \sin.(\varphi+\beta)) \\ + & r^2 \cos.^2\delta = 0, \end{aligned}$$

welches die Gleichung einer Linie der zweiten Ordnung, und zwar einer Ellipse, Hyperbel oder Parabel ist, wenn $\cos.^2(\varphi+\beta) \sin.^2\gamma$ gröfser oder kleiner, oder so grofs als $\cos.^2\delta$ ist.

Wendet man die vorhergehenden allgemeinen Ausdrücke auf die verschiedenen bisher gewöhnlichen Uhren an, so erhält man folgende einfache Resultate.

Horizontaluhren.

Für sie ist $n = 0$, $k = 90$ und $\beta = \gamma = 90$, also

$$\text{tang.}\,\psi = -\sin.\varphi \,\text{tang.}\, s,$$

wie bekannt.

Ferner ist

$$\frac{\rho}{r} = \frac{1}{\cos.\psi \cos.\varphi + \text{tang.}\,\delta \sqrt{1 - \cos.^2\psi \cos.^2\varphi}},$$

und die krumme Linie, welche das Ende des Schattens an jedem Tage beschreibt, eine Ellipse, Hyperbel oder Parabel, wenn $\varphi + \delta$ gröfser oder kleiner, oder gleich $90°$ ist. Für den Kreis ist $\varphi = 90$.

Geneigte Mittagsuhren.

Für sie ist $k = 90$, $\beta = 90 - n$ und $\gamma = 90$, also

$$\text{tang.}\,\psi = \sin.(n - \varphi)\,\text{tang.}\,s,$$

$$\frac{\rho}{r} = \frac{1}{\cos.\psi \cos.(n-\varphi) + \text{tang.}\,\delta \sqrt{1 - \cos.^2\psi \cos.^2(n-\varphi)}},$$

und die tägliche Curve des Schattenendes eine Ellipse, Hyperbel oder Parabel, wenn δ gröfser, kleiner, oder so grofs als $90 - n + \varphi$ ist. Für den Kreis ist $n - \varphi = 90$.

Für verticale Mittagsuhren setzt man in diesen Ausdrücken $n = 90°$.

Verticale Morgen- und Abenduhren.

Für sie ist $n = 90$, $k = 0$, $\beta = \gamma = 0$, also $\psi = 90 - \varphi$, oder die Schattenlinien mit dem Stile parallel, und $\rho = r$.

Äquinoctialuhren.

Für sie ist $n = 90 + \varphi$, $k = 90$, $\beta = 360 - \varphi$, $\gamma = 90$, also

$$\psi = s \quad \text{und} \quad \rho = r\,\text{Cotang.}\,\delta,$$

und die von dem Schattenende an jedem Tage beschriebene Curve immer ein Kreis. Für Polaruhren endlich ist $n = \varphi$, $k = 90$, $\beta = 90 - \varphi$, $\gamma = 90$, und daher

$$\psi = 0 \quad \text{und} \quad \rho = r.$$

Ganz eben so, wie hier für eine gegen den Horizont und gegen den Meridian schief liegende Ebene ge-

zeigt ist, wird man nun auch für jede andere krumme Uhrfläche verfahren; nur wird man hier, statt dem Winkel ψ, die Gleichungen der krummen Schattenlinien selbst, entweder durch ihre Projectionen in den coordinirten Ebenen, oder durch ihren Ort in der die Uhrfläche schneidenden Stundenebene zwischen den oben erwähnten Coordinaten t und u angeben. Wählen wir, um dieses durch ein Beispiel zu erläutern, einen Cylinder als Uhrfläche, dessen Basis ein Kreis des Halbmessers a, und dessen Axe auf dem Horizonte senkrecht steht. Solche Uhrflächen bieten z. B. viele unserer Thürme und andere Gebäude dar. — Die Gleichung der Oberfläche dieses Cylinders zwischen den sich auf den Äquator beziehenden Coordinaten x, y, z ist, wie man leicht findet,

$$z\cos.\varphi\,(z\cos.\varphi - 2a) + x\sin.\varphi\,(x\sin.\varphi - 2a) + 2xz\sin.\varphi\cos.\varphi + y^2 = 0 \quad . \quad (A)$$

Setzt man in diesem Ausdrucke

$$x = t\cos.s, \quad y = t\sin.s \quad \text{und} \quad z = u,$$

so erhält man

$$(u\cos.\varphi + t\sin.\varphi\cos.s)^2 - 2a\,(u\cos.\varphi + t\sin.\varphi\cos.s) + t^2\sin.^2 s = 0$$

für die Gleichung der Schattencurve in der Ebene des Stundenkreises. Diese krumme Linie, welche den Schatten des Stiles auf der Oberfläche des senkrechten Cylinders für jeden Stundenwinkel s erzeugt, ist also immer eine Ellipse, und man wird die Aufeinanderfolge dieser Ellipsen erhalten, wenn man in der letzten Gleichung nach der Reihe s gleich 0, 15°, 30°, . . . setzt. Für den mittägigen Schatten hat man

$$u\cos.\varphi + t\sin.\varphi = 2a,$$

eine gerade Linie, da hier der Schatten des Stils mit

der Seitenlinie des Cylinders, die durch den Fufspunct des Stils geht, zusammenfällt. Für $\varphi = 90°$ geht die vorhergehende Gleichung der Schattencurve in

$$t - 2a \cos. s$$

über, welches die bekannte Polargleichung des Kreises ist. Für die Bewohner der beiden Pole steht nämlich der Stil parallel mit der Axe des Cylinders, da ihr Horizont mit dem Äquator zusammenfällt.

Um nun auch den Ort des Endpunctes des Schattens auf dem Cylinder zu erhalten, wird man die Gleichung (A) der Uhrfläche mit der Gleichung $y = x$ tang. s der Stundenebene, und überdiefs mit der Gleichung des oben erwähnten Kegels verbinden. Diese Gleichung des Kegels ist hier

$$x = (z - r) \cos. s \text{ Cotang. } \delta.$$

Eliminirt man aus diesen drei Gleichungen je zwei der drei Coordinaten x; y, z, so erhält man

$$z - r = \frac{M(a - r \cos. \varphi) + \sqrt{M^2 a^2 + N}}{M^2 + \sin.^2 \varsigma \text{ Cotang.}^2 \delta},$$

wo der Kürze wegen

$$M = \cos. \varphi + \sin. \varphi \cos. s \text{ Cotang. } \delta \quad \text{und}$$
$$N = r(2a - r \cos. \varphi) \cos. \varphi \sin.^2 s \text{ tang.}^2 \delta$$

gesetzt worden ist. Kennt man so den Werth von z, so erhält man auch y und x aus

$$y = (z - r) \sin. s \text{ Cotang. } \delta,$$
$$x = (z - r) \cos. s \text{ Cotang. } \delta,$$

wodurch daher der Ort des Schattenendes auf der Fläche des Cylinders gegeben ist. Die Entfernung ρ des Schattenendes von dem Fufspuncte des Stiles ist dann

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad \text{oder}$$
$$\rho = \sqrt{(z - r)^2 \text{ Cotang.}^2 \delta + z^2},$$

und dieser Ausdruck ist zugleich die Gleichung zwi-

schen den Polarcoordinaten ρ und s, oder ρ und δ für diejenigen Curven, welche das Schattenende für eine constante Declination während dem Laufe eines Tages, oder für einen constanten Stundenwinkel während dem Laufe eines ganzen Jahres auf der krummen Oberfläche des Cylinders beschreibt.

IV.

Analytische Optik;

von

L. Schleiermacher,

Grofsherzogl. Hessisch. Oberfinanzrath in Darmstadt.

(Fortsetzung.)

Glieder der zweiten Ordnung.

6) Beschäftigen wir uns zuerst mit den Gliedern der zweiten Ordnung, welche in den Gleichungen des gebrochenen Strahles vorkommen. Für ein beliebiges z sind diese Gleichungen nach Nro. 5:

$$\left.\begin{aligned} y_i &= Y_i - z_i\left[\left(\frac{Y-f}{g}\right)_i + \left(Y\Delta\frac{1}{g} - \Delta\frac{f}{g}\right)_i\right] \\ &\quad - \left(\frac{z-g}{g}\right)_i\left[\Delta Y + \left(\frac{Y-f}{g}\right)Z\right]_i, \\ x_i &= X_i - z_i\left[\frac{X_i}{g_i} + X_i\Delta\frac{1}{g_i}\right] \\ &\quad - \left(\frac{z-g}{g}\right)_i\left[\Delta X + \frac{XZ}{g}\right]_i, \end{aligned}\right\} \quad (a)$$

welche auch unter die Form gebracht werden können:

$$\left.\begin{aligned} y_i &= f_i - g_i\left(Y\Delta\tfrac{1}{g} - \Delta\tfrac{f}{g}\right)_i \\ &\quad -(z-g)_i\begin{cases}\left(\tfrac{Y-f}{g}\right)_i + \left(Y\Delta\tfrac{1}{g} - \Delta\tfrac{f}{g}\right)_i \\ +\tfrac{1}{g_i}\left[\Delta Y + \left(\tfrac{Y-f}{g}\right)Z\right]_i\end{cases} \\ x_i &= -g_i X_i \Delta\tfrac{1}{g_i} \\ &\quad -(z-g)_i\begin{cases}\tfrac{X_i}{g_i} + X_i\Delta\tfrac{1}{g_i} \\ \quad +\tfrac{1}{g_i}\left[\Delta X + \tfrac{XZ}{g}\right]_i\end{cases}\end{aligned}\right\} \quad (b)$$

Sie reduciren sich auf

$$\left.\begin{aligned} y_i &= f_i - g_i\left(Y\Delta\tfrac{1}{g} - \Delta\tfrac{f}{g}\right)_i \\ &\qquad -(z-g)_i\left(\tfrac{Y-f}{g}\right)_i, \\ x_i &= -g_i X_i \Delta\tfrac{1}{g_i} - (z-g)_i\tfrac{X_i}{g_i},\end{aligned}\right\} \quad (c)$$

wenn $(z-g)_i$ als eine Gröfse von der Ordnung der Abweichungen angenommen wird.

Nach Nro. 4 hat man

$$\frac{f_i}{g_i} = \frac{V_i\varphi_1}{\nu_i},$$

$$Y_i = \frac{1}{V_i}(Y_1' + K_i\varphi_1),$$

$$X_i = \frac{X_1}{V_i},$$

$$Z_i = \frac{X_1^2 + (Y_1' + K_i\varphi_1)^2}{2V_i^2 a_i};$$

es bleibt daher nur noch übrig,

$$\Delta\tfrac{1}{g}, \quad \left(Y'\Delta\tfrac{1}{g} - \Delta\tfrac{f}{g}\right), \quad \Delta Y \text{ und } \Delta X$$

zu finden.

7) Um $\Delta \frac{1}{g}$ zu entwickeln, fange ich mit der Berechnung des Werthes von $\mathfrak{G}$ an, welcher durch die Formel (d) von Nro. 2 gegeben ist; und da jene Gröfse, eben so wie $\mathfrak{Z}$, zur zweiten Ordnung gehört, so kann man alle deutsche Buchstaben mit lateinischen verwechseln. Bezeichnet man daher durch G denjenigen Werth, welchen $\mathfrak{G}$ erhält, wenn man nur die Gröfsen der zweiten Ordnung berücksichtigt, so wird

$$G = (k+h)(t-w) - \frac{k}{n}\left(\frac{u}{2} - w\right) - \frac{Z}{g^2}.$$

Die Gröfsen, welche in diesem Ausdrucke vorkommen, sind durch die Formeln (b) und (c) von Nro. 2 gegeben, und man erhält daraus

$$\frac{1}{g} = k + h - \frac{k}{n},$$

$$\frac{1}{a} = k + h,$$

$$Z = \left(\frac{k+h}{2}\right) 2aZ,$$

$$l = \frac{1}{n^2}\left[k^2 . 2aZ + 2kYhb + h^2 b^2\right],$$

$$m = -kh . 2aZ - 2hYhb + h^2 b^2,$$

$$i = m - (k+h)Z - \frac{kYhb}{n^2} - \frac{h^2 b^2}{n^2}$$

$$= -\left[\frac{(k+h)^2}{2} + kh\right] 2aZ - \left(2h + \frac{k}{n^2}\right) Yhb + \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right) h^2 b^2,$$

$$u = m - l$$

$$= -\left(kh + \frac{k^2}{n^2}\right) 2aZ - 2\left(h + \frac{k}{n^2}\right) Yhb + \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right) h^2 b^2,$$

$$w = u - (k+h)^2\, 2aZ$$
$$= -\left[(k+h)^2 + kh + \frac{k^2}{n^2}\right] 2aZ$$
$$- 2\left(h + \frac{k}{n^2}\right) Yhb + \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right) h^2 b^2,$$
$$\frac{Z}{g^2} = \left(\frac{k+h}{2}\right)\left[k + h - \frac{k}{n}\right]^2 2aZ$$
$$= \left[\frac{(k+h)^3}{2} - (k+h)^2 \frac{k}{n} + \frac{(k+h)}{2}\frac{k^2}{n^2}\right] 2aZ,$$

welche Werthe in dem vorhergehenden Ausdrucke von G substituirt werden müssen. Setzt man aufserdem zur Abkürzung, da die grofsen Buchstaben A, B u. s. w. nicht mehr gebraucht werden,

$$\left.\begin{aligned} A &= -\left(\frac{n-1}{2n^3}\right) k^2 (k - nh) \\ &= -\left(\frac{n-1}{2n^3}\right)\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{c}\right)^2 \left(\frac{1}{a} - \left(\frac{n+1}{e}\right)\right), \\ B &= -\left(\frac{n-1}{n^2}\right) k (k - nh) \\ &= -\left(\frac{n-1}{n^2}\right)\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{c}\right)\left(\frac{1}{a} - \left(\frac{n+1}{c}\right)\right), \\ C &= -\left(\frac{n^2-1}{2n}\right) k = -\left(\frac{n^2-1}{2n}\right)\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{c}\right), \end{aligned}\right\} \quad (a)$$

so ist das Resultat jener Substitution

$$G = -\left[A\, 2aZ + BY\frac{hb}{n} + C\left(\frac{hb}{n}\right)^2\right]. \quad (b)$$

Bezieht man diese Formel auf die i^{te} Fläche, und substituirt statt Z_i, Y_i und $\left(\frac{hb}{n}\right)_i$ ihre Werthe, welche am Ende von Nro. 6 gegeben sind, wenn man bemerkt, dafs

$$\left(\frac{hb}{n}\right)_i = \left(\frac{b}{nc}\right)_i = \frac{f_i}{g_i} = \frac{V_i \varphi_i}{v_i}$$

ist, so erhält man

$$G_i = -\frac{V_i^2}{v_i}\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{Av}{V^4}\right)_i (X_1^2 + Y_1^2) \\ + \left(\frac{2AvK}{V^4} + \frac{B}{V^2}\right)_i Y_1 \varphi_1 \\ + \left(\frac{AvK^2}{V^4} + \frac{BK}{V^2} + \frac{C}{v}\right)_i \varphi_1^2 .\end{array}\right\} \quad (c)$$

Ich gehe nun zu der Gleichung (c) von Nro. 2 über. Behält man nur die Glieder der zweiten Ordnung bei, so hat man

$$\frac{1}{\mathfrak{g}} = \frac{1}{g} + \Delta\frac{1}{g},$$
$$\frac{1}{\mathfrak{c}} = \frac{1}{c} + \Delta\frac{1}{c},$$
$$\mathfrak{k} + \mathfrak{h} = \frac{1}{a} = k + h,$$
$$\frac{\mathfrak{k}}{n} = \frac{1}{n}\left[\frac{1}{a} - \frac{1}{c} - \Delta\frac{1}{c}\right] = \frac{k}{n} - \frac{1}{n}\Delta\frac{1}{c},$$
$$\mathfrak{G} = G.$$

Substituirt man diese Werthe, und bemerkt, dafs

$$\frac{1}{g} = k + h - \frac{k}{n}$$

ist, so nimmt die allegirte Gleichung die Gestalt an:

$$\Delta\frac{1}{g} = \frac{1}{n}\Delta\frac{1}{c} + G \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (d)$$

Man hat eben so

$$\Delta\frac{1}{g_,} = \frac{1}{n_,}\Delta\frac{1}{c_,} + G_,,$$

und vermöge der zweiten Formel (g) von Nro. 2:

$$\Delta\frac{1}{c_,} = \frac{g^2}{c_,^2}\Delta\frac{1}{g},$$

Hierdurch verwandelt sich die vorhergehende Gleichung, wenn man sie auf die i^{te} Fläche bezieht, in die folgende endliche Differenzengleichung:

$$\Delta\frac{1}{g_i} = \frac{g_{i-1}^2}{n_i c_i^2}\Delta\frac{1}{g_{i-1}} + G_i \quad . \quad . \quad . \quad (e)$$

Das Integral dieser Gleichung, nach der Formel (r) von Nro. 3 genommen, ist

$$\Delta\frac{1}{g_i} = \left[\frac{g_i^2-1}{n_i c_i^2}\right]^{i-1}\left\{\frac{g_o^2}{n_1 c_1^2}\Delta\frac{1}{g_0} + \sum_m^i{}^1 \frac{G_m}{\left[\frac{g_{m-1}^2}{n_m c_m^2}\right]^{m-1}}\right\}$$

$$= \frac{1}{[n_i]^i}\left[\frac{g_i^2-1}{c_i^2}\right]^{i-1}\left\{\frac{g_o^2}{c_1^2}\Delta\frac{1}{g_0} + \sum_m^i{}^1 \frac{G_m\,[n_m]^m}{\left[\frac{g_{m-1}^2}{c_m^2}\right]^{m-1}}\right\}$$

Die Formeln (i) von Nro. 2 und (g) von Nro. 4 geben aber

$$\frac{g_o^2}{c_1^2}\Delta\frac{1}{g_o} = \Delta\frac{1}{c_1},$$

$$[n_i]^i = \nu_i,$$

$$\left[\frac{g_{i-1}}{c_i}\right]^{i-1} = V_i.$$

Hierdurch wird das vorhergehende Integral

$$\Delta\frac{1}{g_i} = \frac{V_i^2}{\nu_i}\left[\Delta\frac{1}{c_1} + \sum_1^i \frac{G_m\,\nu_m}{V_m^2}\right] \quad . \quad . \quad (f)$$

Die Constante $\Delta\frac{1}{c_1}$ ist $= 0$, wenn der Punct $b_1\ c_1$ ein wirklicher leuchtender Punct ist, dessen Entfernung sich nicht verändert. Da aber derselbe einem schon vorher gebrochenen Lichtstrahle angehören kann, die optischen Werkzeuge auch oft zur Betrachtung von Gegenständen gebraucht werden, welche sich in verschiedenen Entfernungen befinden, so behalte ich nicht nur jene Constante, sondern auch diejenigen, welche in der Folge vorkommen werden, bei. Es bleibt jetzt nur noch übrig, statt G_m seinen Werth zu substituiren. Setzt man zur Abkürzung

$$\left.\begin{aligned} L^{(m)} &= \left(\frac{A\nu}{V^4}\right)_m, \\ M^{(m)} &= \left(\frac{2A\nu K}{V^4} + \frac{B}{V^2}\right)_m, \\ N^{(m)} &= \left(\frac{A\nu K^2}{V^4} + \frac{BK}{V^2} + \frac{C}{\nu}\right)_m \end{aligned}\right\} \quad \text{(g)}$$

so gibt der Ausdruck (c)

$$G_m = -\frac{V_m^2}{\nu_m}\left[L^{(m)}\left(X_1^2 + Y_1^2\right) + M^{(m)} Y_1 \varphi_1 + N^{(m)} \varphi_1^2\right].$$

Da in der Folge die von $m = 1$ bis $m = i$ genommenen Summen der mit dem oberen Index (m) versehenen Coefficienten häufig vorkommen, so werde ich zur Abkürzung diese Summen mit denselben Buchstaben und dem unteren Index i bezeichnen, wonach z. B.

$$L_i = \Sigma_1^i L^{(m)}$$

bedeutet. Hierdurch erhält man, wenn man den vorhergehenden Werth von G_m in dem Integrale (f) substituirt:

$$\Delta \frac{1}{g_i} = \frac{V_i^2}{\nu_i}\left\{\begin{aligned} &\Delta \frac{1}{c_1} - L_i\left(X_1^2 + Y_1^2\right) \\ &- M_i Y_1 \varphi_1 - N_i \varphi_1^2 . \end{aligned}\right\} \quad \text{(h)}$$

8) Zur Entwickelung von $\left(Y\Delta \frac{1}{g} - \Delta \frac{f}{g}\right)$ ist es zuerst nöthig, die Gleichung (h) von Nro. 2 zu betrachten, nämlich

$$\frac{f_1}{g_1} = \frac{g}{n_1 c_1} \cdot \frac{f}{g} - \frac{g}{n_1 c_1} \frac{f}{g} \frac{n_1 \mathfrak{G}_1}{\mathfrak{k}_1} .$$

Mit Vernachlässigung der Gröfsen der dritten Ordnung ist

$$\frac{f_1}{g_1} = \frac{f_1}{g_1} + \Delta \frac{f_1}{g_1},$$
$$\frac{f}{g} = \frac{f}{g} + \Delta \frac{f}{g},$$

$$\frac{g}{c_,} = 1 - \frac{d}{c_,} = 1 - \frac{d}{c_,} - d\Delta\frac{1}{c_,} = \frac{g}{c_,} - d\Delta\frac{1}{c_,},$$

$$\frac{g}{n_, c_,}\,\frac{f}{g}\,\frac{n_, \mathfrak{G}_,}{\mathfrak{k}_,} = \frac{g}{n_, c_,}\,\frac{f}{g}\,\frac{n_, G_,}{k_,},$$

Substituirt man diese Werthe in der vorhergehenden Gleichung, so gibt die Vergleichung der zur zweiten Ordnung gehörigen Gröfsen:

$$-\Delta\frac{f_,}{g_,} = \frac{-g}{n_, c_,}\Delta\frac{f}{g} + \frac{d}{n_,}\frac{f}{g}\Delta\frac{1}{c_,} + \frac{g}{n_, c_,}\frac{f}{g}\frac{n_, G_,}{k_,}. \quad \text{(a)}$$

Nach Nro. 7 ist aber

$$\Delta\frac{1}{c_,} = \frac{g^2}{c_,^2}\Delta\frac{1}{g},$$

folglich

$$-\Delta\frac{f_,}{g_,} = \frac{-g}{n_, c_,}\Delta\frac{f}{g} + \frac{d}{n_,}\frac{g^2}{c_,^2}\frac{f}{g}\Delta\frac{1}{g} + \frac{g}{n_, c_,}\frac{f}{g}\frac{n_, G_,}{k_,}. \quad \text{(b)}$$

Die Gleichung (e) von Nro. 7 gibt

$$Y_,\Delta\frac{1}{g_,} = \frac{g^2}{n_, c_,^2}\,Y_,\Delta\frac{1}{g} + Y_, G_,.$$

Hieraus erhält man, wenn man in dem von $\Delta\frac{1}{g}$ abhängigen Gliede statt $Y_,$ seinen Werth

$$Y_, = \frac{c_,}{g}\,Y - \frac{fd}{g}$$

substituirt, welcher aus den Formeln (a) von Nro. 4 folgt,

$$Y_,\Delta\frac{1}{g_,} = \frac{g}{n_, c_,}\,Y\Delta\frac{1}{g} - \frac{d}{n_,}\frac{g^2}{c_,^2}\frac{f}{g}\Delta\frac{1}{g} + Y_, G_,.$$

Die Summe dieser Gleichung und der vorhergehenden (b), auf die i^{te} Fläche bezogen, ist

$$\left(Y\Delta\frac{1}{g} - \Delta\frac{f}{g}\right)_i = \frac{g_{i-1}}{n_i c_i}\left(Y\Delta\frac{1}{g} - \Delta\frac{f}{g}\right)_{i-1} + Y_i G_i + \frac{g_{i-1}}{n_i c_i}\left(\frac{f}{g}\right)_{i-1}\frac{n_i G_i}{k_i}. \quad \text{(c)}$$

Integrirt man diese endliche Differenzengleichung

nach der Formel (r) von Nro. 3, und bemerkt, dafs nach den Ausdrücken (i) von Nro. 2 und (g) von Nro. 4

$$\frac{g_0}{c_1}\left(Y\Delta\frac{1}{g}-\Delta\frac{f}{g}\right)_0=\left(Y\Delta\frac{1}{c}-\Delta\frac{b}{c}\right)_1$$
$$=(\acute{Y}_1+K_1\varphi_1)\,\Delta\frac{1}{c_1}-\Delta\varphi_1,$$
$$[n_i]^i=\nu_i,$$
$$\left[\frac{g_{i-1}}{c_i}\right]^{i-1}=V_i$$

ist, so erhält man

$$\left.\begin{aligned}&\left(Y\Delta\frac{1}{g}-\Delta\frac{f}{g}\right)_i=\\ &=\frac{V_i}{\nu_i}\left\{\begin{aligned}&(\acute{Y}_1+K_1\varphi_1)\,\Delta\frac{1}{c_1}-\Delta\varphi_1\\ &+\Sigma_m^i\frac{\nu_m}{V_m}\left[Y_mG_m+\frac{g_{m-1}}{n_mc_m}\left(\frac{f}{g}\right)_{m-1}\frac{n_mG_m}{k_m}\right]\end{aligned}\right.\end{aligned}\right\}\quad(d)$$

Die Formeln von Nro. 4 geben aber

$$Y_m=\frac{1}{V_m}(\acute{Y}_1+K_m\varphi_1),$$
$$\frac{g_{m-1}}{n_mc_m}\left(\frac{f}{g}\right)_{m-1}=\frac{V_m\varphi_1}{\nu_m}.$$

Hierdurch wird das vorhergehende Integral

$$\left.\begin{aligned}&\left(Y\Delta\frac{1}{g}-\Delta\frac{f}{g}\right)_i=\\ &=\frac{V_i}{\nu_i}\left\{\begin{aligned}&(\acute{Y}_1+K_1\varphi_1)\,\Delta\frac{1}{c_1}-\Delta\varphi_1\\ &+\Sigma_1^i\left[\frac{\nu_mG_m}{V_m^2}(\acute{Y}_1+K_m\varphi_1)+\frac{n_mG_m\varphi_1}{k_m}\right]\end{aligned}\right.\end{aligned}\right\}\quad(e)$$

Es bleibt jetzt nur noch übrig, statt $\frac{\nu_mG_m}{V_m^2}$ und $\frac{n_mG_m}{k_m}$ ihre Werthe zu substituiren. Vermöge der Formeln (a) von Nro. 7 ist aber

$$\frac{n_mA_m}{k_m}=\frac{B_m}{2}.$$

Mit Berücksichtigung dieses Werthes erhält man daher durch den Ausdruck (c) von Nro. 7:

$$\frac{\nu_m G_m}{V_m^2}(\acute{Y}_1 + K_m\varphi_1) = -\left(\frac{A\nu}{V^4}\right)_m (X_1^2 + \acute{Y}_1^2)\,\acute{Y}_1$$
$$-\left[\left(\frac{A\nu K}{V^4}\right)_m (X_1^2 + \acute{Y}_1^2) + \left(\frac{2A\nu K}{V^4} + \frac{B}{V^2}\right)_m \acute{Y}_1^2\right]\varphi_1$$
$$-\left(\frac{3A\nu K^2}{V^4} + \frac{2BK}{V^2} + \frac{C}{\nu}\right)_m \acute{Y}_1\varphi_1^2$$
$$-\left(\frac{A\nu K^3}{V^4} + \frac{BK^2}{V^2} + \frac{CK}{\nu}\right)_m \varphi_1^3,$$
$$\frac{n_m G_m}{k_m}\varphi_1 = -\left(\frac{B}{2V^2}\right)_m (X_1^2 + \acute{Y}_1^2)\,\varphi_1$$
$$-\left(\frac{BK}{V^4} + \frac{nB}{k\nu}\right)_m \acute{Y}_1\varphi_1^2$$
$$-\left(\frac{BK^2}{2V^2} + \frac{nBK}{k\nu} + \frac{V^2 nC}{\nu^2 k}\right)_m \varphi_1^3.$$

Gebraucht man die Bezeichnungen (g) von Nro. 7, und setzt noch aufserdem

$$\left.\begin{aligned}
D_m &= \left(\frac{nB}{k} + C\right)_m \\
&= -\left(\frac{n-1}{2n}\right)_m [(n+3)k - 2nh]_m \\
&= -\left(\frac{n-1}{2n}\right)_m \left[\frac{n+3}{a} - \frac{3(n+1)}{c}\right]_m, \\
E_m &= \left(\frac{nC}{k}\right)_m = -\left(\frac{n^2-1}{a}\right)_m, \\
O^{(m)} &= \left(\frac{3A\nu K^2}{V^4} + \frac{3BK}{V^2} + \frac{D}{\nu}\right)_m, \\
P^{(m)} &= \left(\frac{A\nu K^3}{V^4} + \frac{3BK^2}{2V^2} + \frac{DK}{\nu} + \frac{EV^2}{\nu^2}\right)_m,
\end{aligned}\right\} \quad (f)$$

so geben die vorhergehenden Ausdrücke

$$\frac{\nu_m G_m}{V_m^2}(\acute{Y}_1 + K_m\varphi_1) + \frac{n_m G_m \varphi_1}{k_m} =$$
$$= -L^{(m)}(X_1^2 + \acute{Y}_1^2)\,\acute{Y}_1 - M^{(m)}\frac{(X_1^2 + 3\acute{Y}_1^2)}{2}\varphi_1$$
$$- O^{(m)}\acute{Y}_1\varphi_1^2 - P^{(m)}\varphi_1^3.$$

Durch Substitution dieser Werthe und durch die Anwendung der in Nro. 7 eingeführten Bezeichnung bekommt das Integral (e) die Gestalt

$$\left(Y\Delta\frac{1}{g}-\Delta\frac{f}{g}\right)_i=\frac{V_i}{v_i}\left\{\begin{array}{l}(\acute{Y}_1+K_1\varphi_1)\,\Delta\frac{1}{c_1}-\Delta\varphi_1\\ -L_i\,(X_1^2+\acute{Y}_1^2)\,\acute{Y}_1\\ -M_i\,\frac{(X_1^2+3\acute{Y}_1^2)}{2}\varphi_1\\ -O_i\,\acute{Y}_1\varphi_1^2-P_i\,\varphi_1^3.\end{array}\right\}\quad(g)$$

9) Ich gehe endlich zur Entwickelung der dritten und vierten Formel (g) von Nro. 2. Diese Formeln entstehen aus denen (f) derselben Nummer, wenn man x, y und z mit $\mathfrak{X}_1$, $\mathfrak{Y}_1$, und $(\mathfrak{Z}_1-d)$ verwechselt, und da bei der Entwickelung

$$\mathfrak{X}_1=X_1+\Delta X_1,$$
$$\mathfrak{Y}_1=Y_1+\Delta Y_1,$$
$$\mathfrak{Z}_1=Z_1$$

gesetzt werden mufs, so hat man, um von den Formeln (f) zu den Formeln (g) überzugehen:

$$x=X_1+\Delta X_1,$$
$$y=Y_1+\Delta Y_1,$$
$$z=Z_1-d,$$
$$z-g=Z_1-(d-g)=Z_1-c_1.$$

Die Ausdrücke (a) von Nro. 6, welche die Entwickelungen der Formeln (f) von Nro. 2 sind, geben aber

$$y=Y-z\left[\left(\frac{Y-f}{g}\right)+\left(Y\Delta\frac{1}{g}-\Delta\frac{f}{g}\right)\right]-\left(\frac{z-g}{g}\right)\left[\Delta Y+\left(\frac{Y-f}{g}\right)Z\right],$$

$$x=X-z\left[\frac{X}{g}+X\Delta\frac{1}{g}\right]-\left(\frac{z-g}{g}\right)\left[\Delta X+\frac{XZ}{g}\right].$$

Substituirt man daher die vorhergehenden Werthe, vergleicht die Gröfsen der zweiten Ordnung und bezieht ΔY_i und ΔX_i auf die i^{te} Fläche, so erhält man die folgenden Differenzengleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
\Delta Y_i &= \frac{c_i}{g_{i-1}} \Delta Y_{i-1} + d_{i-1} \left(Y \Delta \frac{1}{g} - \Delta \frac{f}{g} \right)_{i-1} \\
&\quad + \left(\frac{Y-f}{g} \right)_{i-1} \left(\frac{c_i}{g_{i-1}} Z_{i-1} - Z_i \right), \\
\Delta X_i &= \frac{c_i}{g_{i-1}} \Delta X_{i-1} + d_{i-1} X_{i-1} \Delta \frac{1}{g_{i-1}} \\
&\quad + \frac{X_{i-1}}{g_{i-1}} \left(\frac{c_i}{g_{i-1}} Z_{i-1} - Z_i \right).
\end{aligned}\right\} \quad (a)$$

Der Ausdruck (g) von Nro. 8, auf die $(i-1)^{te}$ Fläche bezogen, kann unter die Form gebracht werden:

$$\left(Y \Delta \frac{1}{g} - \Delta \frac{f}{g} \right)_{i-1} =$$

$$= \frac{V_{i-1}}{\nu_{i-1}} \left\{ \begin{aligned} &(Y'_1 + K_1 \varphi_1) \Delta \frac{1}{c_1} - \Delta \varphi_1 \\ &- \sum_{\mu}^{(i-1)} \left\{ \begin{aligned} &L^{(\mu)} (X_1^2 + Y_1^2) Y'_1 \\ &+ M^{(\mu)} \left(\frac{X_1^2 + 3 Y_1^2}{2} \right) \varphi_1 \\ &+ O^{(\mu)} Y'_1 \varphi_1^2 + P^{(\mu)} \varphi_1^3. \end{aligned} \right. \end{aligned} \right.$$

Durch diesen Werth erhält die erste Gleichung (a) dieselbe Gestalt wie die Gleichung (s) von Nro. 3, wenn man setzt:

$$p_{i-1} = \frac{c_i}{g_{i-1}},$$

$$r_{i-1} = \frac{V_{i-1} d_{i-1}}{\nu_{i-1}} \left[(Y'_1 + K_1 \varphi_1) \Delta \frac{1}{c_1} - \Delta \varphi_1 \right]$$
$$+ \left(\frac{Y-f}{g} \right)_{i-1} \left(\frac{c_i}{g_{i-1}} Z_{i-1} - Z_i \right),$$

$$s_{i-1} = -\frac{V_{i-1}\, d_{i-1}}{v_{i-1}},$$

$$t_\mu = L^{(\mu)}(X_1^2 + Y_1'^2)\, Y_1' + M^{(\mu)}\frac{(X_1^2 + 3Y_1'^2)}{2}\varphi_1 + O^{(\mu)} Y_1' \varphi_1^2 + P^{(\mu)}\varphi_1^3.$$

Integrirt man daher jene Gleichung nach der Formel (u) von Nro. 3, und bemerkt, dafs mit Berücksichtigung der in Nro. 4 gegebenen Werthe

$$[p_{i-1}]^{i-1} = \frac{1}{V_i},$$

$$\Delta Y_1 = \Delta(Y_1' + K_1\varphi_1),$$

$$\Sigma_m^{(i-1)}\frac{V_m V_{m+1}\, dm}{v_m} = \Sigma_m^{i}\frac{V_{m-1} V_m\, dm_{-1}}{v_{m-1}} = -(K_i - K_1),$$

$$\Sigma_1^{(i-1)}\frac{r_m}{[p_m]^m} = -(K_i - K_1)\left[(Y_1' + K_1\varphi_1)\Delta\frac{1}{c_1} - \Delta\varphi_1\right] + \Sigma_m^{(i-1)} V_{m+1}\left(\frac{Y-f}{g}\right)_m\left(\frac{c_{m+1}}{g_m}Z_m - Z_{m+1}\right),$$

$$\Sigma_m^{(i-1)}\frac{s_\mu}{[p_\mu]^\mu} = K_i - K_m$$

ist, so erhält man

$$\Delta Y_i = \frac{1}{V_i}\left\{\begin{array}{l} \Delta(Y_1' + K_1\varphi_1) \\ -(K_i - K_1)\left[(Y_1' + K_1\varphi_1)\Delta\frac{1}{c_1} - \Delta\varphi_1\right] \\ +\Sigma_m^{(i-1)} V_{m+1}\left(\frac{Y-f}{g}\right)_m\left(\frac{c_{m+1}}{g_m}Z_m - Z_{m+1}\right) \\ +\Sigma_m^{(i-1)}(K_i - K_m)\left\{\begin{array}{l} L^{(m)}(X_1^2 + Y_1'^2)\, Y_1' \\ +M^{(m)}\left(\frac{X_1^2 + 3Y_1'^2}{2}\right)\varphi_1 \\ +O^{(m)} Y_1' \varphi_1^2 + P^{(m)}\varphi_1^3 \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Substituirt man statt Y_m und $\left(\frac{f}{g}\right)_m$ ihre Werthe aus Nro. 4, und bemerkt, dafs

$$V_{m+1} = \frac{V_m g_m}{c_{m+1}}$$

ist, so wird das von Z_m und Z_{m+1} abhängige Glied gleich

$$\frac{1}{V_i} \sum_m^{(i-1)} \left[Y_1' + \left(K_m - \frac{V_m^2 g_m}{v_m} \right) \varphi_1 \right] \left(\frac{Z_m}{g_m} - \frac{Z_{m+1}}{c_{m+1}} \right).$$

Entwickelt man nun die angedeutete Summe, so ist jedes Z, mit Ausnahme des ersten und letzten, in zwei auf einander folgenden Gliedern enthalten, welche man vereinigen kann. Aufserdem geben die Formeln der angeführten Nummer

$$K_{m-1} = K_m + \frac{V_{m-1} V_m d_{m-1}}{v_{m-1}},$$

$$\frac{1}{g_m} - \frac{1}{c_m} = \left(\frac{n-1}{n}\right)_m \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{c}\right)_m = \left(\frac{n-1}{n}\right)_m k_m;$$

der vorhergehende Ausdruck verwandelt sich daher in den folgenden:

$$\frac{1}{V_i} \left\{ \begin{array}{l} Z_1 \left(\frac{Y_1' + K_1 \varphi_1}{c_1} - \varphi_1 \right) - Z_i \left(\frac{Y_1' + K_i \varphi_1}{c_i} - \frac{n_i V_i^2 \varphi_1}{v_i} \right) \\ + \sum_m^{(i-1)} Z_m \left[\left(\frac{n-1}{n} \right)_m k_m (Y_1' + K_m \varphi_1) \right. \\ \qquad \left. + \left(\frac{n-1}{\nu} \right)_m V_m^2 \varphi_1 \right], \end{array} \right.$$

und man erhält endlich

$$\Delta Y_i = \frac{1}{V_i}\left\{\begin{array}{l} \Delta(\acute{Y}_1 + K_1\varphi_1) \\ -(K_i - K_1)\left[(\acute{Y}_1 + K_1\varphi_1)\,\Delta\frac{1}{c_1} - \Delta\varphi_1\right] \\ +Z_1\left(\frac{\acute{Y}_1 + K_1\varphi_1}{c_1} - \varphi_1\right) \\ -Z_i\left(\frac{\acute{Y}_1 + K_i\varphi_1}{c_i} - \frac{n_i V_i^2 \varphi_1}{\nu_i}\right) \\ +\sum_m^{(i-1)}\left\{\begin{array}{l} Z_m\left[\left(\frac{n-1}{n}\right)_m k_m(\acute{Y}_1 + K_m\varphi_1) \right. \\ \qquad \left. + \left(\frac{n-1}{\nu}\right)_m V_m^2\varphi_1\right] \\ +(K_i - K_m)\left\{\begin{array}{l} L^{(m)}(X_1^2 + \acute{Y}_1^2)\,\acute{Y}_1 \\ +M^{(m)}\left(\frac{X_1^2 + 3\acute{Y}_1^2}{2}\right)\varphi_1 \\ +O^{(m)}\acute{Y}_1\varphi_1^2 + P^{(m)}\varphi_1^3. \end{array}\right. \end{array}\right. \end{array}\right\} \quad (b)$$

Die zweite Gleichung (a) entsteht aus der ersten, wenn man Y und $\left(Y\Delta\frac{1}{g} - \Delta\frac{f}{g}\right)$ mit X und $X\Delta\frac{1}{g}$ verwechselt, und $\frac{f}{g} = 0$ setzt.

Um die Veränderungen zu bewirken, welche hierdurch in dem vorhergehenden Ausdrucke von ΔY_i entstehen, mufs man die Glieder unter dem Zeichen Σ, welche mit $(K_i - K_m)$ multiplicirt sind und sich auf $\left(Y\Delta\frac{1}{g} - \Delta\frac{f}{g}\right)$ beziehen, mit den correspondirenden Gliedern von $X\Delta\frac{1}{g}$ verwechseln, welche nach Nro. 7 sind:

$$L^{(m)}(X_1^2 + \acute{Y}_1^2)\,X_1 + M^{(m)}X_1\acute{Y}_1\varphi_1 + N^{(m)}X_1\varphi_1^2.$$

In allen übrigen Gliedern dagegen mufs man $\acute{Y}_1$ mit X_1 verwechseln und $\varphi_1 = 0$ setzen. Dieſs gibt

$$\Delta X_i = \frac{1}{V_i}\left\{\begin{array}{l} \Delta X_1 - (K_i - K_1)\, X_1\, \Delta\frac{1}{c_1} \\ + \left(\frac{Z_1}{c_1} - \frac{Z_i}{c_i}\right) X_1 \\ + \sum_m^{(i-1)}\left\{\begin{array}{l} Z_m \left(\frac{n-1}{n}\right)_m k_m\, X_1 \\ + (K_i - K_m)\left\{\begin{array}{l} L^{(m)}\,(X_1'^2 + Y_1'^2)\, X_1 \\ + M^{(m)}\, X_1\, Y_1'\, \varphi_1 \\ + N^{(m)}\, X_1\, \varphi_1^2 . \end{array}\right. \end{array}\right. \end{array}\right\} \quad (c)$$

Die vorhergehenden Werthe von ΔY_i und ΔX_i reichen hin, um den von ΔZ_i zu finden. In der That, wenn man die Gleichung (a) von Nro. 2 unter die Gestalt bringt

$$\mathfrak{Z} = \frac{\mathfrak{X}^2 + \mathfrak{Y}^2 + \mathfrak{Z}^2}{2a},$$

und statt $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ und $\mathfrak{Z}$ ihre Werthe substituirt, nämlich

$$\mathfrak{X} = X + \Delta X,$$
$$\mathfrak{Y} = Y + \Delta Y,$$
$$\mathfrak{Z} = Z + \Delta Z = \frac{X^2 + Y^2}{2a} + \Delta Z,$$

so entsteht daraus

$$\Delta Z = \frac{Z^2 + 2X\Delta X + 2Y\Delta Y}{2a}$$
$$= \frac{1}{2a}\left[\left(\frac{X^2 + Y^2}{2a}\right)^2 + 2X\Delta X + 2Y\Delta Y\right] \ldots . \quad (d)$$

Auch geben die Werthe von ΔY_i und ΔX_i diejenigen der Grössen $\left[\Delta Y + \left(\frac{Y-f}{g}\right) Z\right]$ und $\left[\Delta X + \frac{XZ}{g}\right]$, welche in den Gleichungen des gebrochenen Strahles vorkommen, wenn man zu den ersteren die aus Nro. 4 genommenen Werthe von $\left(\frac{E-f}{g}\right) Z$ und $\frac{XZ}{g}$ addirt. Man hat

$$\left(\frac{Y-f}{g}\right)_i Z_i = \frac{Z_i}{V_i}\left(\frac{Y_1' + K_i\varphi_1}{g_i} - \frac{V_i^2\varphi_1}{\nu_i}\right).$$

Der Ausdruck (b) von ΔY_i enthält das Glied

$$\Delta Y_i = \ldots \frac{Z_i}{V_i}\left[-\left(\frac{\acute{Y}_1 + K_i\varphi_1}{c_i}\right) + \frac{n_i V_i^2 \varphi_1}{\nu_i}\right].$$

Diese beiden Glieder vereinigen sich, wenn man die Ausdrücke von ΔY_i und $\left(\frac{Y-f}{g}\right)_i Z_i$ zusammen addirt, und geben das correspondirende Glied von

$$\left[\Delta Y + \left(\frac{Y-f}{g}\right) Z\right]_i =$$

$$= \ldots \frac{Z_i}{V_i}\left[\left(\frac{n-1}{n}\right)_i k_i(\acute{Y}_1 + K_i\varphi_1) + \left(\frac{n-1}{\nu}\right)_i V_i^2 \varphi_1\right],$$

welches unter das Zeichen Σ gesetzt werden kann. Hierdurch erhält man

$$\left[\Delta Y + \left(\frac{Y-f}{g}\right) Z\right]_i =$$

$$= \frac{1}{V_i}\left\{\begin{array}{l} \Delta(\acute{Y}_1 + K_1\varphi_1) \\ -(K_i - K_1)\left[(\acute{Y}_1 + K_1\varphi_1)\,\Delta\frac{1}{c_1} - \Delta\varphi_1\right] \\ + Z_1\left(\frac{\acute{Y}_1 + K_1\varphi_1}{c_1} - \varphi_1\right) \\ + \sum_m^i Z_m\left[\left(\frac{n-1}{n}\right)_m k_m(\acute{Y}_1 + K_m\varphi_1) + \left(\frac{n-1}{\nu}\right)_m V_m^2\varphi_1\right] \\ + \sum_m^{(i-1)}(K_i - K_m)\left\{\begin{array}{l} L^{(m)}(X_1^2 + \acute{Y}_1^2)\,\acute{Y}_1 \\ + M^{(m)}\left(\frac{X_1^2 + 3\acute{Y}_1^2}{2}\right)\varphi_1 \\ + O^{(m)}\,\acute{Y}_1\,\varphi_1^2 + P^{(m)}\varphi_1^3. \end{array}\right. \end{array}\right\} \text{(e)}$$

Durch die oben angegebenen Verwechslungen verwandelt sich dieser Ausdruck unmittelbar in den von $\left[\Delta X + \frac{XZ}{g}\right]$, und es entsteht daraus

$$\left[\Delta X + \frac{XZ}{g}\right]_i =$$

$$= \frac{1}{V_i}\left\{\begin{array}{l} \Delta X_1 - (K_i - K_1)\, X_1 \Delta \frac{1}{c_1} + \frac{Z_1 X_1}{c_1} \\ + \sum_m^i Z_m \left(\frac{n-1}{n}\right)_m k_m X_1 . \\ + \sum_m^{(i-1)} (K_i - K_m) \left\{\begin{array}{l} L^{(m)} (X_1^2 + Y_1^2) X_1 \\ + M^{(m)} X_1 Y_1 \varphi_1 \\ + N^{(m)} X_1 \varphi_1^2 . \end{array}\right. \end{array}\right\} \quad \text{(f)}$$

(Die Fortsetzung folgt.)

V.

Über die ebenen Curven, welche ihren Evoluten ähnlich sind;

von

A. v. Ettingshausen.

1.

Nachdem die grofsen Geometer *Huyghens, Tschirnhausen, Jakob Bernoulli* entdeckt hatten, dafs die gemeine Cykloide, die Epicykloiden und die logarithmischen Spirallinien durch Abwickelung ähnlicher Curven erzeugt werden, bot sich natürlicher Weise die Frage dar, ob diese Eigenschaft den genannten Curven ausschliefsend zukomme, oder ob noch andere mit derselben Eigenschaft begabte krumme Linien möglich seyen.

Bereits vor einem Jahrhundert hat *Kraft* im zweiten Bande der ältern Petersburger Commentarien die Beantwortung dieser Frage versucht. Er gelangt daselbst zu dem Resultate, dafs nur die logarithmischen

Spirallinien durch Abwickelung ähnlicher und in übereinstimmender Lage erscheinender Curven entstehen können, und dafs die Ähnlichkeit bei derjenigen Spirale, deren charakteristischer Winkel *) die Hälfte eines Rechten ist, in Gleichheit übergehe; dafs ferner nur die Cykloide eine mit ihr identische und in umgekehrter Stellung befindliche Evolute zulasse, so wie nur die Epicykloiden blofs ähnliche und verkehrt liegende Evoluten besitzen.

Im zwölften Bande derselben Commentarien hat sodann *Euler* das umfassendere Problem betrachtet, für eine Reihe von Curven, deren jede folgende die Evolute der vorhergehenden ist, die erste Curve dergestalt zu bestimmen, dafs sie einer beliebigen der folgenden, oder, mit andern Worten, ihrer Evolute von beliebiger Ordnung ähnlich wird. Er bestätigt da, in Betreff der Ähnlichkeit der Curven mit ihren Evoluten erster Ordnung, *Kraft's* Sätze. In einem lange Zeit nachher geschriebenen Aufsatze *(Nova Acta Acad. Petrop. T. I.)* hat *Euler* dieses Problem wieder vorgenommen, und die zur Auflösung desselben dienende Analyse mehr entwickelt, wobei die Ausdrücke »directe« und »verkehrte Ähnlichkeit« in einem anderen Sinne gebraucht werden, als es in dem früheren Aufsatze geschehen ist. An den früher gefundenen Resultaten wurde jedoch, der Hauptsache nach, nichts abgeändert.

Indessen haben die genannten Mathematiker die Aufgabe, von der hier die Rede ist, nicht in gröfstmöglichster Allgemeinheit behandelt, sondern wenigstens, was die Curven betrifft, die ihren Evoluten in überein-

*) So nenne ich hier, der Kürze wegen, den unveränderlichen Winkel, unter welchem die Tangenten einer logarithmischen Spirale gegen die vom Pole zu den Berührungspuncten gezogenen Geraden geneigt sind.

stimmender Lage ähnlich seyn sollen, eine kleine Nachlese übrig gelassen, welche den Gegenstand des gegenwärtigen Aufsatzes ausmacht. Beide Geometer binden sich nämlich an die keinesweges nöthige Beschränkung, dafs die Puncte der abgewickelten und durch Abwickelung erzeugten Curve, welche rücksichtlich der Ähnlichkeit dieser Curven einander homolog sind, auch rücksichtlich der Abwickelung zusammen gehören. In der That stimmt die von mehreren neuern Schriftstellern gemachte Bemerkung, dafs nicht blofs jene logarithmische Spirale, deren charakteristischer Winkel die Hälfte eines Rechten beträgt, sondern überhaupt jede andere logarithmische Spirale mit ihrer Evolute identisch ist, mit *Kraft's* und *Euler's* Sätzen nicht überein. Es verlohnt sich daher der Mühe, die noch vorhandene Lücke auszufüllen, und in gehöriger Allgemeinheit zu untersuchen, welche Curven ihren Evoluten ähnlich sind. Der vorliegende Aufsatz hat hiebei zunächst zwar nur die unmittelbaren Evoluten im Auge; am Schlusse desselben soll aber auch der Weg zur allgemeinen Auflösung des von *Euler* betrachteten Problems angedeutet werden.

2.

Es bezeichne r den zu dem Endpuncte des Bogens s einer ebenen Curve gehörenden Krümmungshalbmesser, und ω einen der zwei Nebenwinkel, welche r mit einer in der Ebene der Curve angenommenen fixen Geraden bildet; so ist, wenn man ω so wählt, dafs dieser Winkel an dem in das Auge gefafsten Curvenaste mit dem Bogen s zugleich wächst, bekanntlich

$$r = \frac{ds}{d\omega}.$$

Stellen r_1, s_1, ω_1 mit den so eben genannten gleich-

namige, einer zweiten Curve entsprechende Gröfsen vor, wobei zur Bestimmung des Winkels ω_1 eine eigene fixe Gerade dienen mag, so hat man in demselben Sinne

$$r = \frac{ds_1}{d\omega_1}.$$

Ist nun die zweite Curve die Evolute der ersten, und gehören die Endpuncte der Bogen s, s_1 in Bezug auf die Evolution zusammen, d. h. liegt der Endpunct des Bogens s in der zur zweiten Curve durch den Endpunct des Bogens s_1 geführten Tangente, so kann man, bei schicklicher Wahl des Anfangspunctes des Bogens s_1, $ds_1 = dr$ setzen, woraus, der Natur der Abwickelung gemäfs, bei schicklicher Wahl des Anfangspunctes des Bogens s, $d\omega_1 = d\omega$ folgt, so dafs die Gleichung

$$r_1 = \frac{dr}{d\omega}$$

besteht.

Es sey überdiefs die zweite Curve der ersten ähnlich, und der dem Winkel ω' entsprechende Endpunct des Bogens s' in der ersten Curve dem Endpuncte des Bogens s_1 in der zweiten homolog, so ergibt sich aus dem Begriffe der Ähnlichkeit, dafs wenn

$$d\omega' = \pm\, d\omega_1 = \pm\, d\omega$$

gesetzt wird, wobei die oberen oder die unteren Zeichen zu nehmen sind, je nachdem man auf der ersten Curve nach einerlei oder nach entgegengesetzten Richtungen fortschreiten mufs, um das eine Mal die Folge von Puncten zu treffen, welche in Hinsicht auf die Ähnlichkeit, und das andere Mal die Folge von Puncten, welche in Hinsicht auf die Abwickelung einer gegebenen Folge von Puncten auf der zweiten Curve correspondiren, d. h. je nachdem beide Curven einander direct oder verkehrt ähnlich erscheinen, die Gleichung

$$\pm \frac{ds_1}{ds'} = k ,$$

Statt findet, in welcher k eine unveränderliche positive Zahl vorstellt, deren Verhältnifs zur Einheit das Verhältnifs ausdrückt, in welchem die Dimensionen der zweiten Curve zu den homologen Dimensionen der ersten stehen.

Da der dem Endpuncte des Bogens s_1 zugehörige Krümmungshalbmesser $r' = \frac{ds'}{d\omega'}$ ist, so ergibt sich mit Rücksicht auf die gemachten Voraussetzungen, $r_1 = kr'$, also

$$\frac{dr}{d\omega} = kr' .$$

Offenbar kann r als eine Function des Winkels ω, deren Form von der Beschaffenheit der ersten Curve abhängt, betrachtet, also $r = F(\omega)$ und daher auch $r' = F(\omega')$ gesetzt werden. Nun ist, wegen $d\omega' = \pm d\omega$, nothwendig $\omega' = a \pm \omega$, wobei a eine beständige Gröfse bedeutet, daher $r' = F(a \pm \omega)$; man hat es also dem zu Folge, zur Bestimmung der Function $F(\omega)$, von welcher die Ausmittelung der ihren Evoluten ähnlichen Curven abhängt, mit der Gleichung

$$\frac{dF(\omega)}{d\omega} = kF(a \pm \omega)$$

zu thun, welche Gleichung, wie man sieht, in folgende zwei

$$\frac{dF(\omega)}{d\omega} = kF(a+\omega) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

$$\frac{dF(\omega)}{d\omega} = kF(a-\omega) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

zerfällt, deren erste auf die directe, und die zweite auf die verkehrte Ähnlichkeit beider Curven sich bezieht.

3.

Die Gleichung (2), mit deren Betrachtung hier der Anfang gemacht werden soll, läfst sich auf eine lineare Differenzialgleichung zweiter Ordnung zurückführen. Differenzirt man nämlich diese Gleichung, so erhält man

$$\frac{d^2 F(\omega)}{d\omega^2} = k \frac{dF(a-\omega)}{d\omega}.$$

Setzt man andererseits in der Gleichung (2) $a - \omega$ an die Stelle von ω, so wird

$$\frac{dF(a-\omega)}{d\omega} = -kF(\omega),$$

mithin ergibt sich

$$\frac{d^2 F(\omega)}{d\omega^2} + k^2 F(\omega) = 0.$$

Das allgemeinste Integral dieser Differenzialgleichung läfst sich unter der Form

$$F(\omega) = A \,.\, \text{sin.}(k\omega + B)$$

darstellen, worin A und B die beiden willkürlichen Constanten sind. Führt man dieses Ergebnifs in die Gleichung (2) ein, so erhält man zur Bestimmung von B die Gleichung

$$\text{sin.}\big(k(a-\omega) + B\big) = \text{cos.}(k\omega + B),$$

welcher man hinreichend Genüge leistet, wenn man

$$k(a-\omega) + B = \frac{\pi}{2} - (k\omega + B),$$

$$\text{d. h.} \quad B = \frac{\pi}{4} - \frac{ka}{2}$$

setzt, wobei π die allgemein angenommene Bedeutung hat.

Es ist demnach

$$F(\omega) = A \,.\, \text{sin.}\left(k\omega + \frac{\pi}{4} - \frac{ka}{2}\right)$$

die vollständige Auflösung der Gleichung (2), worin A unbestimmt bleibt.

Um die Natur der durch diese Auflösung angezeigten Curve auf dem kürzesten Wege zu erkennen, bedenke man, dafs wegen $r = F(\omega)$ und $s = \int F(\omega)\, d\omega$

$$r = A \sin.\left(k\omega + \frac{\pi}{4} - \frac{k\,a}{2}\right)$$

und $$s = C - \frac{A}{k} \cos.\left(k\omega + \frac{\pi}{4} - \frac{k\,a}{2}\right)$$

wird, wobei C eine neue Constante vorstellt, deren Werth von der Position des Anfangspunctes des Bogens s abhängt. Man hat also

$$r^2 + k^2 (s - C)^2 = A^2.$$

Diese Relation zwischen jedem Bogen der zu suchenden Curve und dem zugehörigen Krümmungshalbmesser ist bekanntlich, wenn k von der Einheit verschieden angenommen wird, je nachdem man $k < 1$ oder $k > 1$ seyn läfst, ein ausschliefsendes Eigenthum der Epi- und Hypo-Cykloiden, und dieselbe gehört für $k = 1$, in welchem Falle die Ähnlichkeit der Curve mit ihrer Evolute in Congruenz übergeht, der gemeinen Cykloide an. Übrigens lassen sich die Gleichungen dieser Curven in gewöhnlicher Form mit Hülfe des obigen Resultates für $F(\omega)$ sehr leicht herstellen, wenn man berücksichtiget, dafs für rechtwinklige Coordinaten x und y des dem Winkel ω zugehörigen Punctes der Curve, in so fern der fixe Schenkel dieses Winkels als Axe der x dient,

$$dx = F(\omega) \sin.\omega\, d\omega$$

und $$dy = F(\omega) \cos.\omega\, d\omega \quad \text{ist.}$$

Es ist also *Kraft's* Behauptung, dafs blofs die Epicykloiden ähnliche und die Cykloide eine mit ihr selbst identische und verkehrt liegende Evolute besitzt, vollkommen richtig.

4.

Die Gleichung (1), nämlich

$$\frac{dF(\omega)}{d\omega} = kF(\omega + a),$$

zeigt einen verschiedenen Charakter, je nachdem $a = 0$, oder a von der Nulle verschieden ist. Da aber der zweite Fall den ersten in sich enthält, so soll vor der Hand von der besonderen Annahme $a = 0$ abgesehen werden. Im Allgemeinen ist die Gleichung (1) sowohl als Differenzialgleichung, wie auch als Differenzengleichung zu betrachten, in welcher letzteren Beziehung a als Differenz der Variablen ω erscheint. Eine Gleichung dieser Art vertritt die Stelle eines Systems von Differenzialgleichungen zwischen einer Reihe veränderlicher Gröfsen und der denselben zu Grunde liegenden Variablen, und drückt das gemeinschaftliche Bildungsgesetz dieser Differenzialgleichungen aus. Die Auflösung einer solchen Gleichung läfst sich also durch die Integration eines Systems zugleich bestehender Differenzialgleichungen bewerkstelligen. Im vorliegenden Falle sind diese Differenzialgleichungen linear und von der ersten Ordnung; die Auflösung jeder derselben wird also durch eine Summe von Gröfsen von der Form $Ae^{B\omega}$, deren jede einzelne der ins Auge gefafsten Differenzialgleichung Genüge leistet, und gewissen besonderen Werthen der von ω nicht abhängenden Gröfsen A und B entspricht, verrichtet. Da die Anzahl der erwähnten Differenzialgleichungen unbeschränkt ist (denn die Reihe der Functionen von ω, deren Verbindung mit ω durch diese Gleichungen vor Augen gelegt wird, nämlich

$$\ldots\ldots F(\omega - 2a), F(\omega - a), F(\omega), F(\omega + a), F(\omega + 2a), \ldots\ldots$$

ist keiner Beschränkung unterworfen), so wird auch die Anzahl der Glieder, aus welchen ihre Auflösung zusam-

mengesetzt werden kann, unbegrenzt bleiben. Um die Beschaffenheit der Constanten A, B zu erkennen, setze man in der Gleichung (1) $Ae^{B\omega}$ an die Stelle von $F(\omega)$, so fällt A aus der Gleichung hinweg und wird demnach unbestimmt gelassen; B hingegen erscheint an die Gleichung

$$B = ke^{Ba} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

gebunden, in so fern nämlich die fixe Constante e die Grundzahl der natürlichen Logarithmen ist.

Die Gleichung (3) bietet, da die Zahl k ihrer Bedeutung zu Folge positiv ist, wenn man überdiefs die Potenz e^{Ba} in keinem andern Sinne nimmt, als welchen die Formel

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots$$

angibt, keinen reellen negativen Werth für B dar. Ist a negativ, so gestattet die Gleichung (3) einen reellen positiven Werth für B; ist a positiv, so läfst diese Gleichung in Bezug auf B entweder keine, oder zwei gleiche, oder zwei ungleiche reelle positive Auflösungen zu, je nachdem $ka > \frac{1}{e}$ oder $ka = \frac{1}{e}$ oder $ka < \frac{1}{e}$ ist. In allen diesen Fällen gibt es noch unzählige Paare correspondirender imaginärer Werthe für B. Nur, wenn $a = 0$ gesetzt wird, ist blofs ein Werth für B, nämlich $B = k$, möglich.

Setzt man, um reelle und imaginäre Werthe von B zugleich betrachten zu können,

$$B = p + q\sqrt{-1},$$

wobei p und q reelle Gröfsen, die Nulle mit eingeschlossen, vorstellen, so geht die Gleichung (3) in das System der zwei Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} p &= ke^{ap}\cos.aq, \\ q &= ke^{ap}\sin.aq, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

oder, wenn man lieber will, in die Gleichungen

$$\sqrt{\left(\frac{k\,e^{ap}}{p}\right)^2 - 1} = \text{tang.}\left[\alpha\sqrt{\left(\frac{k\,e^{ap}}{p}\right)^2 - 1}\right],$$

$$q = \sqrt{k^2 e^{2ap} - p^2}$$

über, deren reelle Auflösungen für p und q zu nehmen sind.

Die allgemeinste Auflösung der Gleichung (1) wird somit durch den Ausdruck

$$F(\omega) = \Sigma A e^{p\omega}(\cos. q\omega + \sqrt{-1}\,\sin. q\omega)$$

dargestellt, worin das Zeichen Σ anzeigt, dafs die Summe einer beliebigen Menge von Gliedern zu nehmen sey, welche aus der Form $A e^{p\omega}(\cos. q\omega + \sqrt{-1}\,\sin. q\omega)$ für eben so viele, den Gleichungen (4) Genüge leistende Werthe von p und q und für gänzlich willkürliche Werthe von A hervorgehen.

Nimmt man in obiger Summe je zwei Theile, welche sich, nebst der Verschiedenheit von A, nur in dem Zeichen des Radikals $\sqrt{-1}$ unterscheiden, zusammen, und stellt man, was offenbar erlaubt ist, die diesen Theilen zugehörigen Werthe der Constanten A durch $\frac{1}{2}A(\cos.\alpha + \sqrt{-1}\,\sin.\alpha)$ und $\frac{1}{2}A(\cos.\alpha - \sqrt{-1}\,\sin.\alpha)$ vor, so erhält der für $F(\omega)$ gefundene Ausdruck die Form

$$F(\omega) = \Sigma A e^{p\omega}\cos.(q\omega + \alpha),$$

wobei es hinreicht, die Summe Σ blofs auf die positiven der den Gleichungen (4) Genüge leistenden Werthe von q zu beziehen, und A, α gänzlich unbestimmt bleiben. In so ferne zur Auflösung der vorliegenden Aufgabe $F(\omega)$ als die Gröfse des dem Winkel ω entsprechenden Krümmungshalbmessers der zu suchenden Curve, welche ihrer Evolute direct ähnlich seyn soll, erscheint, können A, α blofs reelle Werthe erhalten.

5.

Die Natur der Curven, welche ihren Evoluten direct ähnlich sind, wird durch die Gleichung

$$r = \Sigma A e^{p\omega} \cos.(q\omega + \alpha) \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

hinreichend an den Tag gelegt. Es sind Spirallinien, welche nach der einen Richtung fortgesetzt sich ihrem Pole in unzähligen Windungen unendlich annähern, ohne denselben jemals zu erreichen. Wie der Ausdruck

$$s = \int F(\omega)\, d\omega$$
$$= C + \Sigma \frac{A e^{p\omega} (p \cos.(q\omega + \alpha) + q \sin.(q\omega + \alpha))}{p^2 + q^2},$$

worin C eine Constante bedeutet, lehrt, hat die Länge des von irgend einem Puncte der Curve gegen den Pol hin ohne Ende verfolgten Bogens eine bestimmte endliche Gröfse zur Grenze. Die rechtwinkeligen Coordinaten x, y des dem Winkel ω zugehörigen Punctes der Curve werden, in so ferne die Axe der x die Richtung des fixen Schenkels des Winkels ω hat, durch diesen Winkel mittelst der Formeln

$$x = \int F(\omega) \sin.\omega\, d\omega,$$
$$y = \int F(\omega) \cos.\omega\, d\omega$$

ausgedrückt, deren weitere Entwickelung keiner Schwierigkeit unterliegt.

Läfst man in den Gleichungen (4) $k = 1$ seyn, so erhält man mittelst der unter dieser Voraussetzung sich ergebenden Werthe von p und q die Curven, welche mit ihren Evoluten identisch sind, und in ähnlicher Lage erscheinen. Wie aus dem Resultate der obigen Analyse erhellet, gibt es unendlich viele Curven dieser Art, so dafs *Kraft* und *Euler* es nur mit einem einzigen der unzähligen möglichen Fälle zu thun hatten.

Dieser Fall ist gerade derjenige, dessen Betrachtung hier einstweilen bei Seite gesetzt wurde, jener

nämlich, für welchen a in die Nulle übergeht. Dadurch staltet sich die Gleichung (1) in eine gemeine Differenzialgleichung

$$\frac{dF(\omega)}{d\omega} = kF(\omega)$$

um, aus welcher durch Integration

$$F(\omega) = Ae^{k\omega}$$

folgt, wobei A die unbestimmte Constante ist. Dasselbe Resultat erhält man auch aus (5), weil für $a=0$ die Gröfsen p und q blofs die Werthe $p=k$ und $q=0$ anzunehmen vermögen, also die Summe Σ blofs ein Glied darbietet. Da hierbei $s = C + \frac{A}{k} e^{k\omega}$ wird, so hat man

$$r = k(s - C),$$

welche Gleichung einer logarithmischen Spirale gehört, deren charakteristischer Winkel der Cotangente k entspricht. Für $k=1$, den Fall der Gleichheit der Curve und ihrer Evolute, ist dieser Winkel die Hälfte eines Rechten. Dafs übrigens für $a=0$ die homologen Puncte beider Curven sowohl in Bezug auf die Ähnlichkeit, wie auch in Bezug auf die Evolution die nämlichen sind, fällt in die Augen.

Allein auch wenn a nicht verschwindet, jedoch in algebraischer Bedeutung, d. h. mit Rücksicht auf sein Zeichen, nicht gröfser als $\frac{1}{ke}$ ist, erhält man aus den Formeln (5) die logarithmische Spirallinie, wenn man, was unter dieser Voraussetzung angeht, $q=0$ nimmt und die Summe Σ, falls p zweier verschiedener Werthe fähig seyn sollte, auf eines der dafür sich darbietenden Glieder beschränkt. Der hierbei gebrauchte Werth von p ist die Cotangente des charakteristischen Winkels der logarithmischen Spirale. Ist hingegen p gegeben, so findet man den dazu gehörigen Werth von a durch die

Formel

$$a = \frac{1}{p} l \frac{p}{k},$$

in welcher l als Zeichen der natürlichen Logarithmen dient. Für $k = 1$ ergibt sich $a = \frac{1}{p} lp$. Zugleich sieht man hieraus, dafs jede logarithmische Spirale ihrer Evolute gleich ist, wie oben gesagt wurde.

6.

Es seyen nun

$$s, s_1, s_2, s_3, \ldots s_{n-1}, s_n$$

Bögen einer Folge ebener Curven;

$$r, r_1, r_2, r_3, \ldots r_{n-1}, r_n$$

seyen die den Endpuncten dieser Bögen zugehörigen Krümmungshalbmesser, und

$$\omega, \omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots \omega_{n-1}, \omega_n$$

die Winkel, welche die Richtungen dieser Krümmungshalbmesser mit fixen geraden Linien bilden, deren jede einer der Curven zugeordnet ist, so bestehen die Gleichungen

$$r_1 = \frac{ds_1}{d\omega_1}, \quad r_2 = \frac{ds_2}{d\omega_2}, \quad r_3 = \frac{ds_3}{d\omega_3}, \ldots r_n = \frac{ds_n}{d\omega_n}.$$

Ist jede der Curven die Evolute der nächst vorhergehenden, und gehören die Endpuncte der Bogen s, s_1, s_2, $\ldots$ s_n in Hinsicht auf die Abwickelung zusammen; setzt man ferner

$$d\omega_1 = d\omega_2 = d\omega_3 = \ldots = d\omega_n = d\omega,$$

so wird

$$ds_1 = \pm dr, \quad ds_2 = \pm dr_1, \quad ds_3 = \pm dr_2, \ldots$$
$$ds_n = \pm dr_{n-1},$$

mithin, wenn man $d\omega$ als constant betrachtet,

$$r_1 = \pm \frac{dr}{d\omega}, \quad r_2 = \pm \frac{d^2 r}{d\omega^2}, \quad r_3 = \pm \frac{d^3 r}{d\omega^3}, \quad \ldots$$

$$r_n = \pm \frac{d^n r}{d\omega^n}.$$

Läfst man die erste und letzte dieser Curven einander ähnlich seyn, und zwar die homologen Dimensionen beider im constanten Verhältnisse $1 : k$ stehen; setzt man ferner, wie in 2.,

$$r = F(\omega),$$

so ergibt sich, mit Hülfe der dort angestellten Betrachtung, zur Bestimmung der Function $F(\omega)$, die Gleichung

$$\pm \frac{d^n F(\omega)}{d\omega^n} = kF(a \pm \omega), \quad \ldots \quad (6)$$

worin a eine beständige Gröfse vorstellt. In derselben gilt linker Hand des Gleichheitszeichens das obere Zeichen, wenn der Krümmungshalbmesser r_n mit ω zugleich wächst, und das untere, wenn eine dieser Gröfsen wächst, während die andere abnimmt; auf der rechten Seite der Gleichung hingegen bezieht sich das obere Zeichen auf die directe, und das untere auf die verkehrte Ähnlichkeit beider Curven.

Ist n eine ungerade Zahl, so kann man durch Änderung des Sinnes, in welchem man den Winkel ω zählt, das Zeichen vor dem Differenzialquotienten $\frac{d^n F(\omega)}{d\omega^n}$ in das entgegengesetzte verwandeln, mithin der Gleichung (6) eine solche Form geben, dafs ihre linke Seite positiv erscheint; diefs geht aber nicht an, wenn n gerade ist, in welchem Falle diese Gleichung verschiedene Curven darbietet, je nachdem man den erwähnten Differenzialquotienten mit dem einen oder mit dem anderen Zeichen setzt. Betrachtet man k als eine Zahl, die sowohl positiv als negativ seyn kann, so läfst sich das Doppelzeichen auf der linken Seite der Gleichung (6) unter-

drücken, und diese Gleichung nimmt die Gestalt

$$\frac{d^n F(\omega)}{d\omega^n} = k F(a \pm \omega)$$

an.

Was die Gleichung

$$\frac{d^n F(\omega)}{d\omega^n} = k F(a - \omega)$$

betrifft, so folgt aus ihr, durch $n$maliges Differenziren

$$\frac{d^{2n} F(\omega)}{d\omega^{2n}} = k \frac{d^n F(a-\omega)}{d\omega^n}.$$

Dieselbe Gleichung gibt aber durch Vertauschung von ω mit $a - \omega$

$$\frac{d^n F(a-\omega)}{d\omega^n} = (-1)^n k F(\omega),$$

daher ist

$$\frac{d^{2n} F(\omega)}{d\omega^{2n}} = (-1)^n k^2 F(\omega).$$

Diese Gleichung, deren Integration übrigens keiner Schwierigkeit unterliegt, ist ein besonderer Fall der Gleichung

$$\frac{d^{2n} F(\omega)}{d\omega^{2n}} = K F(a + \omega)$$

für $a = 0$; woraus folgt, dafs Curven, welche ihren Evoluten n^{ter} Ordnung verkehrt ähnlich sind, direct ähnliche Evoluten $2n^{\text{ter}}$ Ordnung besitzen, so zwar, dafs die der Ähnlichkeit gemäfs homologen Puncte der Hauptcurve und der letztgenannten Evolute auch in Bezug auf die Abwickelung zusammen gehören.

Man hat es daher im Grunde nur mit der Gleichung

$$\frac{d^n F(\omega)}{d\omega^n} = k F(a + \omega)$$

für beide Zeichen der Constanten k zu thun. Aus den in 4. angeführten Gründen wird die allgemeine Auflösung derselben durch die Formel

$$F(\omega) = \Sigma A e^{B\omega}$$

ausgedrückt, worin das Summenzeichen Σ auf beliebig viele Paare der Werthe von A und B sich bezieht, deren erstere gänzlich willkürlich sind, letztere aber der Gleichung

$$B^n = k e^{Ba}$$

Genüge leisten müssen.

Setzt man

$$B = \rho (\cos.\theta + \sqrt{-1} \sin.\theta),$$

so hat man zur Bestimmnng von ρ und θ die Gleichungen

$$\rho^n \cos. n\theta = k e^{a\rho \cos.\theta} \cos.(a\rho \sin.\theta),$$
$$\rho^n \sin. n\theta = k e^{a\rho \cos.\theta} \sin.(a\rho \sin.\theta).$$

Der obige Ausdruck für $F(\omega)$ verwandelt sich hierdurch in

$$F(\omega) = \Sigma A e^{p\omega} \cos.(q\omega + \alpha),$$

wobei

$$p = \rho \cos.\theta \quad \text{und} \quad q = \rho \sin.\theta$$

ist, und A, α willkürliche Constanten bedeuten. Es steht also der vollständigen Bestimmung der verlangten Curve nichts mehr im Wege.

VI.

Über die Härte der Krystalle;

vom

Prof. *M. L. Frankenheim* in Breslau.

(Fortsetzung.)

17) An Krystallflächen, wo die Blätterdurchgänge weder rechtwinkelig geneigt noch gleichartig sind, fand ich Härteverhältnisse, wie sie sich aus dem Früheren vermuthen liefsen. Hier folgen Beispiele hierüber

Wenn man am Gyps den leichtesten Blätterdurchgang ins Auge faſst, so ist von den zwei auf die Seiten senkrechten und gegen einander fast durchgehends unter 113° geneigten Blätterdurchgängen die Theilungsfläche des leichteren meist gestreift, die des anderen minder leichten etwas muschelig. An beiden sind aber, wie schon früher gesagt, die auf dem leichtesten Blätterdurchgange senkrechten Richtungen viel weicher als die dazu parallelen. An der glänzendsten Fläche sind die auf dem leichtern Seitenblätterdurchgang senkrechten Richtungen am weichsten, aber die dem dritten Blätterdurchgang parallelen nur wenig härter. Die gröfste Härte herrscht in der Richtung, welche dem zweiten Blätterdurchgang fast parallel ist; nach der auf dem dritten senkrechten Richtung ist sie nur etwas geringer, so daſs die Richtungen der gröfsten und kleinsten Härte etwas ungewiſs, und die ganze Härte weniger regelmäſsig ist.

An den Prismen des salpeters. Kali ist der schwächere Blätterdurchgang den Flächen des Prisma, der stärkere dem abgestutzten spitzen Winkel parallel, und an allen Flächen der verticalen Zone ist in horizontaler

Richtung die Härte am geringsten. Dasselbe findet an den Prismen des chromsauren und phosphorsauren Bleies und des Borax Statt. Unter allen Körpern, die ich untersuchte, ist es der Cyanit allein, der an der Fläche des stärksten Blätterdurchganges nach den der Fläche des zweiten Blätterdurchganges parallelen Richtungen weicher ist als in der darauf senkrechten. Doch darüber mehr, wenn von der Natur der Blätterdurchgänge die Rede seyn wird.

An den Flächen des Mangan-Peroxydes, und zwar in der Richtung des leichtesten Blätterdurchgangs, welcher zur abgestutzten scharfen Kante des Prisma parallel ist, findet sich die gröfste Härte in horizontaler Richtung. Am schwefels. Natron mit transversalen Blätterdurchgängen findet sich die Härte am gröfsten parallel zum leichtesten longitudinalen Blätterdurchgange, an den Flächen des leichtesten Blätterdurchgangs aber sind die darauf senkrechten, d. i. die dem zweiten Blätterdurchgang parallelen Richtungen die härteren.

18) Ähnliches fand ich an einer grofsen Zahl minder regelmäfsiger Krystalle, so dafs es nicht zu bezweifeln ist, es seyen Härte und Blätterdurchgang von derselben Kraft abhängig. Die Richtungen der gröfsten und kleinsten Härte lassen sich aus der Lage der Blätterdurchgänge hinreichend genau bestimmen. Je mehr sich die Blätterdurchgänge an Deutlichkeit von einander scheiden, und unter je weniger schiefen Winkel sie gegen einander und gegen die zu prüfende Fläche geneigt sind, desto genauer werden die Richtungen der gröfsten und kleinsten Härte bestimmt. Unter je schieferem Winkel aber der Blätterdurchgang gegen die zu prüfende Fläche geneigt ist, desto weniger eignet er sich zur Bestimmung der Härte, und seine Wirkung, nach dem Kräftenparallelogramme zertheilt, scheint der zweier

Blätterdurchgänge zu gleichen, wovon der eine zur Fläche parallel, der andere darauf senkrecht ist.

19) Dieſs über den Härteunterschied an einer und derselben Fläche. Nun wollen wir zum andern Theile der Untersuchung übergehen, d. i. zu den Härteverhältnissen an verschiedenen Flächen desselben Krystalls. Alle Flächen, welche die Krystallographen für homolog annehmen, haben gleiche Härte, was nicht allein die Theorie lehrt, sondern auch die Erfahrung bestätiget; aber die Unterschiede sind an verschiedenen Flächen am gröfsten, und zwar gröfser als an derselben Fläche in verschiedenen Richtungen. Es ist aber auch die Beobachtung schwieriger, weil durch die Einwirkung der Luft und des atmosphärischen Wassers nicht allein der Grad der Härte, sondern auch ihr Verhältnifs so geändert wird, dafs einige Flächen zuweilen härter ausfallen, obwohl sie im natürlichen Zustande weicher als die andern sind. Und dieſs findet man nicht bloſs bei Salzen, welche wir an der Luft zerflieſsen und anschiessen sehen, sondern auch an solchen Körpern, von welchen man glaubte, dafs sie an der Luft gar keine Änderung erleiden, wie z. B. beim kohlensauren Kalk, beim Anhydrit, ja sogar beim Baryt wird die Härte der Oberfläche bedeutend geändert. Viele Beispiele davon findet man auch in Mineraliensammlungen, Häufig werden Krystalle gefunden, bei welchen von verschiedenen Flächen jene, welche z. B. den Flächen des schiefen Prisma parallel sind, viel mehr oder weniger verwittert sind, als die Abstumpfungsflächen der Kanten oder die Endflächen. Auch bezweifle ich nicht, dafs diese Unterschiede, genauer untersucht, gewisse Gesetze enthüllen dürften; doch hat sich damit so wie mit vielem anderen zur Erkenntnifs der Erscheinungen an Krystallen vielfach Geeignetem noch Niemand befafst.

20) Ich habe einige Versuche über die Kraft angestellt, durch welche die Oberflächen mit Hülfe schwacher Säuren oder Salzauflösungen angegriffen werden, und häufig sah ich dabei einige Flächen in Kurzem ihren Glanz verlieren, andere ihn länger beibehalten, die Kanten oder Flächen bald concav bald convex werden, und wenn der Krystall aufgelöst ward, einige Winkel ihre Schärfe beibehalten oder vermehren, andere hingegen in Kurzem sich abrunden. Da sich dabei immer dieselben Resultate ergeben, so kann kein anderer Grund vorhanden seyn, als ein Unterschied im Zusammenhange und der Härte, und es wäre der Mühe werth, zu untersuchen, in welchem Verhältnisse die chemische Wirkung zum Zusammenhange der Krystalle stehe. Die Versuche, welche *Daniell* an Krystallen und einigen Metallen angestellt und beschrieben hat *(Quarterly Journal of Science, London, Vol. I* u. *II.*, oder *Annales de Chimie et de Physique, II.* 287, u. *IV.* 33), obwohl merkwürdig, sind doch von anderer Art als jene, von welchen hier die Rede ist; denn es wurde von *Daniell* nicht die Einwirkung der Flüssigkeiten auf einzelne Krystallflächen, sondern auf zusammengesetzte Krystalle untersucht.

Einzelne Zusammensetzungsstücke von Krystallen hängen nicht nur mit geringerer Kraft zusammen als die Theile eines einfachen Krystalls, sondern sie bieten auch der auflösenden Flüssigkeit mehrere Zwischenräume dar, in welche sie leicht eindringen kann, so dafs die Krystalle nicht nur durch Auflösung der Theile, mittelst denen sie zusammenhängen, sondern auch, indem das Auflösungsmittel mit Gewalt in die feinsten Zwischenräume dringt, und wie ein Keil durch Capillaritätswirkung die feinsten Blätterdurchgänge trennt, in einzelne Krystalle zerfällt werden. Daher zerfallen

auch aus Körnern oder Fäden zusammengesetzte Körper mit Hülfe der Flüssigkeiten, obwohl sie nicht aufgelöst werden, dennoch in Körner und Fäden, sie mögen entweder unregelmäfsig oder nach dem Combinations- oder nach jenem Gesetze verbunden seyn, dafs alle kleinen fädenförmigen oder gekörnten Krystalle einen gröfseren Krystall bilden, wovon allein mir viele Beispiele vorkamen. Niemals sah ich einen Krystall von gleichförmigem Gefüge anders vernichtet werden, als durch eine von den Theilen der Oberfläche nach Innen zuschreitende Auflösung.

21) Doch darauf werde ich vielleicht bei einer andern Gelegenheit zurückkommen; jetzt will ich zu jenen Versuchen zurückkehren, bei denen es nöthig war, blofs jene Flächen zu vergleichen, welche ich erst vor Kurzem entblöfste, und damit die Flächen, an welchen sich kein Blätterdurchgang findet, nicht gänzlich übergangen würden, auch jene beobachten, deren Glanz weder eine äufsere Kraft noch eine anhaltende Netzung verändert, die auch keine grofse Härteveränderung zeigten, oder an denen die Härteunterschiede gröfser waren, als sie vom Einflusse der atmosphärischen Luft herrühren könnten.

Wenn man die Härte verschiedener Flächen vergleicht, so darf man die Unterschiede an derselben Fläche ja nicht vernachlässigen; sie sind oft so grofs, dafs die gröfste Härte an der weichern Fläche von der geringsten an der härtern übertroffen wird, wie diefs beim kohlensauren Kalk der Fall ist, wo die gröfste Härte der dem deutlichsten Blätterdurchgange parallelen Flächen doch geringer ist, als die kleinste der Flächen des sechsseitigen Prisma. Dieses erfährt man leicht mittelst einer Messingnadel; denn während diese die

Flächen des Blätterdurchgangs leicht ritzt, greift sie die Flächen des Prisma fast gar nicht an.

22) An den Flächen des deutlichsten Blätterdurchganges des Anhydrites ist die kleinste Härte viel geringer als an den übrigen Flächen. Dasselbe beobachtete ich auch an andern Körpern, und je gröfser der Unterschied in der gehörigen Lage der krystallographischen Flächen und der Neigung der Winkel war, desto grössere Unterschiede fanden sich vor. Daher sind sie am Gyps so grofs, und noch gröfser am Sphen und Cyanit. Am Gyps läfst sich die Fläche des deutlichsten Blätterdurchgangs, auf welche die weichsten Linien der Seitenflächen senkrecht stehen, viel leichter ritzen als die andern Flächen, sie mögen einen leichten Blätterdurchgang haben oder nicht. Am Labrador und andern Krystallen aus der Ordnung »Feldspath« sind die Flächen mit zwei ausgezeichneten Blätterdurchgängen weicher als die andern. Am Sphen sind die Flächen des unsymmetrischen Prisma's viel weniger hart als die glänzendsten Flächen der symmetrischen Prismen. Endlich findet sich am Cyanit nur ein Unterschied, der sich fast allem Härtemafse entzieht. Hierbei kann man auch sehen, was für Härteunterschiede aus den unbedeutendsten Änderungen der Oberfläche entstehen.

23) Bei allen den genannten und vielen andern beobachteten Körpern steht die mittlere Härte der Fläche im verkehrten Verhältnisse zu ihrer Theilbarkeit; oder, um die Gesetze der Härte unabhängig von dem unklaren und schwankenden Begriffe der Theilbarkeit darzustellen: In jeder Krystallfläche sind jene Linien die härtesten, die den Perpendikeln auf die härtesten Flächen am nächsten liegen, jene die schwächsten, die sich den Perpendikeln auf die schwächeren Flächen nähern, und umgekehrt; so dafs auf diese Art die mittlere Härte der

Flächen mit der Richtung der gröfsten und kleinsten Härte auf denselben in Verbindung steht. Wodurch aber nicht gesagt seyn will, dafs die Richtungen der gröfsten und kleinsten Härte der Flächen und jene der Linien immer unter sich genau senkrecht seyn müssen.

24) Kleinere Unterschiede konnten zwar auf dem eingeschlagenen Wege schwer ausgemittelt werden, indefs zeigten doch bei Krystallen des tessularischen Systems und Theilbarkeit nach den Kanten des Oktaëders die Hexaëderflächen eine gröfsere Härte, als die des Oktaëders, wie z. B. beim oktaëdrischen Flufshaloid.

An Körpern mit Theilbarkeit in Richtung der Hexaëderflächen gelang es mir nicht, die Oktaëderflächen zu beobachten; doch auch bei diesen sind wahrscheinlich die Oktaëderflächen die weicheren. Einige Physiker, die auch unter den Körpern des Tessularsystems isomorphe Stoffe antreffen wollen, haben, bewogen durch die grofse Analogie des Natrums mit Kali und Kalk, diese Stoffe für isomorph gehalten, und aufser einigen wenigen unsichern Beispielen, die sie aus dem Geschlecht der Feld- und Kuphonspathe genommen haben, führten sie vorzüglich den flufssauren Kalk (oktaëdr. Flufsspath) und das Natrium-Chlorid (hexaëdr. Steinsalz) für sich an. Allein sie werden durch das oben Angeführte hinreichend widerlegt; sollen schon Krystalle des Tessularsystems isomorph seyn, so müssen sie doch wenigstens Ähnlichkeit (denselben Combinations- und Theilbarkeits-Charakter) besitzen. Leider konnten die auf diesen Punct bezüglichen Untersuchungen weder in der gehörigen Anzahl noch mit der nöthigen Sorgfalt angestellt werden, denn auf chemischem Wege erzeugte Krystalle sind allzu sehr den Angriffen der Luft ausgesetzt, und von natürlichen Krystallen sind nur wenige zu so zarten Versuchen geeignet, da sie nach verschie-

denen Richtungen leicht brechbar und dennoch die Flächen von frischem Anbruche seyn und öfteren Prüfungen unterzogen werden müssen. Von derlei Krystallen war ich daher nicht im Stande, viele Exemplare zu erhalten, und oft durfte ich das nicht genauer untersuchen, was sich mir als beobachtungswerth aufgedrängt hatte.

25) Auch das Krystallsystem von Körpern, die in der Natur mit unvollkommener Flächenbildung erscheinen, liefse sich durch Beachtung der Härteunterschiede entdecken. So könnte man auch an dem kleinsten Stückchen Gyps (Euklashaloid) mit undeutlichem Blätterdurchgange in der Richtung der Seitenkanten, durch einige wenige mittelst einer Feder oder Nadel gezogene Linien die Lage der Blätterdurchgänge und das Krystallsystem bestimmen, falls es nicht auf anderen Wegen bereits bekannt wäre. Dasselbe kann auch bei Körpern von noch nicht ausgemitteltem Krystallsysteme mit Erfolg angewendet werden; so scheinen alle Talkglimmer, die ich beobachten konnte, zum rhomboëdrischen Systeme zu gehören, da gar kein Härteunterschied an ihnen zu bemerken war. Jedoch hätte es zur Bestätigung dieser Meinung noch einer optischen Probe bedurft, wozu leider die Exemplare nicht geeignet waren.

Auf jeden Fall verdienen wenigstens die mit der Verschiedenheit der Richtungen wechselnden Härtegrade unter die Charakteristik der Mineralogie und ihre naturhistorischen Merkmale aufgenommen zu werden.

Von dem Begriffe der Härte.

26) In dem bisher Auseinandergesetzten haben wir die Härte in der gewöhnlichen Bedeutung dieses Wortes als die Stärke der Kraft aufgefafst, mit der ein Körper den in sein Inneres eindringenden oder seine Theile

zu verschieben suchenden Substanzen widersteht, und wir nannten unter zwei Körpern jenen den härtern, welcher den andern ritzt, ohne von ihm geritzt zu werden. Allein ein Körper kann von einem, den man sonst für weniger hart hält, dennoch geritzt werden, z. B. wenn dieser schärfere Kanten hat oder mit bedeutender Geschwindigkeit über ihn hingeführt wird. Wir wollen daher das nicht von der Härte allein, sondern, wie wir sehen, auch von der Gestalt und der Bewegung abhängende Vermögen zu ritzen einstweilen ganz unberücksichtiget lassen, und jene Eigenschaft, die wir Härte nennen, von den Gesetzen der Cohäsion ausgehend auf einem andern Wege bestimmen lernen.

27) Das allgemeine Problem der Physik, aus der Menge der Thatsachen die einfachsten und auf die geringste Zahl gebrachten Gesetze abzuleiten, ist hinsichtlich der Thatsachen der Cohäsion noch nicht gelöset worden; es scheint daher nicht überflüssig, die Gesetze der Cohäsion, wie sie sich aus den unzähligen seit *Coulomb* bis auf *Lagerhjelm* angestellten Versuchen zu ergeben scheinen, in der Kürze aufzustellen.

28) Die Worte, deren wir zur Bezeichnung der Cohäsionsverschiedenheiten und Grade uns bedienen, wie streckbar, gebrechlich, spröde, zäh, hart, weich, mehr oder minder elastisch und cohärent, sind alle schwankend und unsicher, wiewohl sie alle Beziehung auf die beiden Hauptmomente aller Cohäsion haben, auf *Grad und Grenze der Elasticität*.

Unter *Elasticität* versteht man das Vermögen der Körper, Rauminhalt oder Dichte zu ändern. Blofs wenn die Dichte durch irgend eine äufsere Kraft vermehrt oder verringert wird, tritt diefs Vermögen in Wirksamkeit. Es sucht den Körper in seine vorige Lage zurück zu führen, und falls keine äufsere Kraft entgegen steht,

beginnt der Körper nach den bekannten Schwingungsgesetzen zu vibriren, wofern nur die erlittene Formänderung gewisse Grenzen nicht übersteigt. Aber bei anhaltender Wirksamkeit der äufseren Kräfte nimmt der Körper nach einigen Schwingungen eine neue Lage des Gleichgewichts an, in der neue, aus der Dichteänderung entstandene Kräfte die von aufsen einwirkenden aufheben, ihnen folglich der Gröfse nach gleich sind. Aus diesem letzten Umstande begreift man, wie man auf dem Erfahrungswege die Kraft bestimmen könne, die einer bestimmten Dichteänderung entspricht.

29) Am leichtesten läfst sich das Verhältnifs zwischen dem Drucke und der Dichte bei einem homogenen und von allen Seiten gleich stark comprimirten Körper, wie z. B. bei Gasen oder Flüssigkeiten, bestimmen. Bei festen Körpern aber, wo man sich darauf beschränken mufste, Drähte und Stäbe auszudehnen oder zu krümmen, wobei stets einige Theile mehr, andere weniger ausgedehnt, andere im Gegentheile zusammengedrückt werden, ist jenes Verhältnifs verwickelter. Doch hat die neueste Zeit und insbesondere *Poisson* auch dieses Verhältnifs dem Calcul zu unterwerfen gelehrt, und jenes alte Gesetz *Hook's* bestätiget gefunden, dafs innerhalb den Grenzen der vollkommenen Elasticität die Spannung (Dichteänderung) der spannenden Kraft proportionirt sey. Wenn wir daher die Volumen- oder Formänderung, das anfängliche Volumen als Einheit zu Grunde legend, mit dem Worte *Spannung*, die Gröfse der spannenden Kraft mit dem Worte *Reaction* bezeichnen, so ist die Elasticität gleich der Reaction getheilt durch die Spannung.

30) Man mifst daher die Stärke der Elasticität entweder durch das Gewicht, durch welches ein Stab von bestimmtem Querschnitte um eine gewisse Gröfse aus-

gedehnt wird, oder durch den von *Young* eingeführten Modulus der Elasticität, wiewohl es der Gleichförmigkeit wegen vorzuziehen wäre, sich bei festen Körpern desselben Maſsstabes wie bei flüssigen zu bedienen, nämlich die Gröſse der allseitigen (cubischen) Dichteänderung, die durch den Druck einer Atmosphäre hervorgebracht wird. Wendet man diesen Maſsstab wirklich an, so findet man mittelst Anwendung der *Poisson*'schen Formeln die Elasticität der festen Körper um nicht viel kleiner als die der Flüssigkeiten, wie wenigstens letztere durch *Oerstedt's*, *Sturm's* und *Colladon's* Versuche bestimmt worden ist. Liegt daher der Unterschied fester und flüssiger Körper, wie beinahe Alle glauben, in der verschiedenen Stärke der Cohäsion, so kann diese in der Elasticität ihren Grund nicht haben.

31) In festen, allenthalben gleich stark comprimirten Körpern gibt es keine *Grenzen* der Elasticität, mit dem Aufhören des Druckes tritt auch die vorige Gestalt wieder ein. Das Senkblei geht aus der gröſsten Meerestiefe, wo es doch einen ungeheuern Druck erleidet, unverändert an Gestalt und specifischem Gewichte hervor. Doch anders verhält sich die Sache bei Stäben oder Drähten, die durch Gewichte gespannt, gekrümmt, zusammengedrückt werden; wenn da die Spannung eine gewisse Grenze überschreitet, so bleibt auch nach Wegnahme des Gewichts die Gestalt geändert. *Dieſs ist die Grenze der Elasticität*, und das gröſste Gewicht, das sie erlangen kann, ohne dadurch eine bleibende Änderung zu erleiden, wollen wir die *Grenze der Reaction*, so wie die demselben entsprechende Spannung die *Grenze der Spannung* nennen.

32) Zwischen der Stärke und zwischen der Grenze der Elasticität waltet derselbe Unterschied ob, wie zwischen den Charakteren der Species, und den Eigenthüm-

lichkeiten, die ein Individuum derselben (eine Varietät) von dem andern trennen. Die Stärke der Elasticität ist, gleich einem Artscharakter, der ganzen naturhistorischen Species, z. B. allen Eisenvarietäten eigenthümlich, während die Grenzen der Elasticität die verschiedensten, z. B. eine andere beim Schmiede-, eine andere beim Gufs-, eine verschiedene beim langsam oder beim schnell erkalteten Eisen sind, so dafs die Grenzen der Elasticität bei Körpern derselben Art oft weiter aus einander liegen, als wie bei verschiedenartigen, jedoch auf gleiche Weise zugerichteten und behandelten.

33) Wird ein Körper einer die Grenze der Reaction überschreitenden Kraft ausgesetzt, so zerbricht er entweder, oder die Theile desselben ändern ohne Bruch ihren Platz, und hievon hängt die Brech- und Streckbarkeit der Körper ab; von was für einer Vertheilung der kleinsten Theilchen, um sich des gewöhnlichen Ausdrucks zu bedienen, der Unterschied zwischen dehnbaren und brechbaren Körpern abhänge, bleibt jedoch einem andern Orte vorbehalten. So viel ist indefs theoretisch gewifs, dafs wenn die Cohäsion eines durch ein Gewicht bleibend verlängerten Körpers trotz der Formänderung unverändert bleibt, dasselbe Gewicht, welches die Cohäsion zu überwinden und die bleibende Verlängerung hervorzurufen vermochte, in dieser seiner Wirksamkeit sogar mit beschleunigter Kraft fortfahren werde. Denn dieselbe Kraft, die einen Stab von z. B. einem Quadratzoll im Querschnitte zu verlängern und zugleich zu schmälern vermochte, wird doch gewifs auch auf den schon z. B. bis auf einen halben Quadratzoll im Querschnitt reducirten dieselbe Wirkung äufsern, u. s. f. Der Körper wird daher, ausgenommen in seiner Reduction auf einen unendlich kleinen Querschnitt, nie gebrochen, sondern nur ausgedehnt werden. Und

allein im Gegentheile sind die Krystalle der meisten nicht metallinischen Körper so brechbar, dafs sie ohne Gefahr eines Bruches gar nicht über die Grenzen der Elasticität ausgedehnt werden können. Und viele Metalle in der Form von Stäben, Platten oder Drähten beobachtet, können, wenn sie auch vom Maximum der Dehnbarkeit weit entfernt sind, nicht gebrochen werden, ohne vorher eine bedeutende Verlängerung und Zusammenziehung erlitten zu haben. Es haben daher die Varietäten der Metalle rücksichtlich der Grade der Dehnbarkeit einen weitern Spielraum, als die anderer Körper, und wir sehen hieraus, dafs in naturhistorischer Beziehung nicht blofs Stärke und Grenze, sondern auch die *Veränderlichkeit* der Elasticität innerhalb einer Species genaue Berücksichtigung verdiene.

(Der Beschlufs folgt.)

VII.

Übersicht der meteorologischen Beobachtungen in Wien im Jahre 1830.

(Das Barometer befand sich in den Monaten Jänner, Februar, März 119.7 Fuſs, in den übrigen Monaten 101.7 Fuſs über dem mittleren Spiegel der Donau.)

Barometerstand in P. Z. bei 0° R. in jedem Monate.

1830.	Mittlerer.	Höchster.	Tiefster.	Mittlere monatliche Variation.
Jänner	27.657	28.070	27.037	1.033
Februar . . .	27.591	28.032	27.063	0.969
März	27.679	28.159	27.398	0.761
April	27.507	27.793	27.019	0.774
Mai	27.465	27.802	26.982	0.820
Juni	27.439	27.884	27.121	0.763
Juli	27.573	27.795	27.148	0.647
August	27.488	27.692	27.287	0.405
September .	27.456	27.859	27.048	0.811
October . . .	27.737	28.033	27.172	0.861
November . .	27.621	27.820	27.314	0.506
December . .	27.318	27.776	26.764	1.012
Jährlicher Durchschnitt	27.536	28.159	26.764	0.780

Mittlerer Barometerstand nach den verschiedenen Beobachtungsstunden.

1830.	Um 8 Uhr früh.	Um 3 Uhr Nachmittag.	Um 10 Uhr Abends.
Jänner	27.700	27.647	27.130
Februar	27.605	27.585	27.521
März	27.357	27.661	27.707
April	27.457	27.427	27.444
Mai	27.477	27.447	27.470
Juni	27.463	27.417	27.433
Juli	27.584	27.562	27.570
August	27.457	27.478	27.484
September . . .	27.463	27.453	27.452
October. . . .	27.737	27.737	27.737
November . . .	27 625	27.617	27.622
December . . .	27.310	27.305	27.338
Jährlicher Durchschnitt . . .	27.568	27.528	27.538

Barometerstand bei verschiedenen Winden.

Windesrichtung.	Barometerstand.	Anzahl der Beobachtungen, aus denen das Mittel entsprang.
S.	27.522	58
SSO.	27.332	25
SO.	27.516	200
OSO.	27.575	58
O.	27.501	22
ONO.	27.668	2
NO.	27.590	26
NNO.	27.567	9
N.	27.581	49
NNW.	27.674	30
NW.	27.646	164
WNW.	27.551	253
W.	27.432	142
WSW.	27.465	19
SW.	27.517	24
SSW.	27.546	12

Temperatur der Luft nach *Réaumur.*

1830.	Mittlere.	Gröſste.	Kleinste.	Mittlere jährliche Variation.
Jänner . .	— 6°.53	2°.0	—17°.0	19°.0
Februar . .	— 2°.60	9°.5	—15°.0	24°.5
März . . .	3°.41	15°.0	— 5°.5	20°.5
April . . .	9°.60	18°.0	1°.0	17°.0
Mai . . .	12°.92	22°.5	6°.0	16°.5
Juni . . .	16°.05	23°.9	8°.0	15°.9
Juli . . .	17°.16	26°.5	10°.0	16°.5
August . .	16°.73	28°.0	10°.0	18°.0
September .	11°.44	19°.0	6°.0	13°.0
October . .	6°.83	14°.9	2°.0	12°.9
November .	4°.43	12°.5	— 1°.0	13°.5
December .	1°.25	9°.0	— 5°.0	14°.0
Jährl. Durchschnitt . .	7°.58	28°.0	—17°.0	16°.78

Temperatur nach den verschiedenen Beobachtungsstunden.

1830.	Um 8 Uhr früh.	Um 3 Uhr Nachmittag.	Um 10 Uhr Abends.
Jänner . . .	— 4°.32	— 5°.08	— 6°.87
Februar . . .	— 3°.97	0°.98	— 2°.94
März	2°.37	5°.51	2°.20
April	8°.83	12°.92	8°.08
Mai	11°.84	16°.44	10°.79
Juni	15°.02	19°.16	13°.98
Juli	15°.45	20°.03	15°.90
August . . .	15°.19	16°.44	15°.45
September . .	10°.36	13°.83	10°.12
October . . .	5°.11	9°.42	5°.97
November . .	3°.87	6°.31	3°.11
December . .	1°.13	2°.76	0°.67
Jährlich. Durchschnitt . .	6°.74	9°.86	6°.29

Beschaffenheit der Atmosphäre.

1830.	Heiter.	Wolken mit Sonnensch.	Trüb.	Nebel.	Regen.	Schnee.	Gewitter.	Herrschender Wind.
Jänner . .	3	12	16	7	—	5	—	SO.
Februar .	1	15	12	1	3	5	—	NW.
März . .	5	22	4	2	7	1	1	NW.
April . .	1	25	4	5	10	1	2	W.
Mai . . .	5	22	4	1	8	—	1	W.
Juni . . .	6	23	1	—	9	—	4	SO.
Juli . . .	9	20	2	1	11	—	3	WNW.
August . .	5	22	4	2	12	—	4	WNW.
September	—	19	11	7	12	—	1	W.
October .	2	23	6	8	10	—	—	WNW.
November .	—	16	14	11	5	4	—	SO.
December .	—	12	19	11	6	5	—	SO.
Jährl. Durchschnitt .	37	231	97	56	93	21	16	SO. u. WNW.

VIII.

Ein Nordlicht, gesehen in Wien.

Am 7. Jänner Abends sah man in Wien ein Nordlicht von besonderer Gröfse und Entwicklung. Es wurde an der hiesigen Universitätssternwarte beobachtet, und zeigte sich in seinen bemerkenswerthesten Verhältnissen den daselbst befindlichen Beobachtern, wie folgt: Eine Viertelstunde vor 7 Uhr Abends wurde der Horizont gegen Norden ungemein hell, und erschien von zusehends wachsender Beleuchtung. Gegen 7 Uhr war die anfänglich weifse Farbe des Himmels an dieser Stelle in eine gelblichte oder rothgelbe übergegangen, und die lichte Stelle selbst erschien in Form eines Kreisabschnittes, dessen mit dem Horizont parallele Sehne etwa 30°

umfassen mochte, und der 10° — 12° über den Horizont hinaufreichte. Um 8 Uhr hatte dieser Abschnitt seine gröfste Ausdehnung erlangt, der unterste Theil desselben erstreckte sich auf 90°, seine gröfste Höhe betrug 30°, und wich vom Meridian gegen Ost ab, dabei war er aber am wenigsten scharf begrenzt. Zu diesem lichten Abschnitte, der das Phänomen fortwährend mit verschiedenen Graden der Entwicklung begleitete, gesellten sich cylindrische oder conische Lichtstrahlen, die gleichsam aus jenem hervorschossen, bald länger, bald kürzer waren, bald schneller, bald langsamer und mit verschiedenen Graden der Lichtstärke auf einander folgten. An der Grenze erschienen sie besonders beweglich, und nahmen gleichsam eine geschlängelte Form und eine wirbelnde Bewegung an. Alle diese Säulen rückten allmählich von Nord gegen Ost fort, und gewährten das schönste Phänomen, als ihre östliche Bewegung am gröfsten war. Vorzüglich traten da drei Säulen hervor, die in Bögen gröfster, auf dem Horizont nahe senkrechter Kreise zu liegen schienen, unten 5° bis 6° einnahmen, und wovon der nördlichste und gröfste 60° Höhe hatte.

Anfangs erschienen diese Säulen weifsgelb mit veränderlicher Lichtintensität, wurden aber später mehr dunkelgelb und schwächer, und löseten sich endlich in eine schlecht begrenzte Lichtmasse auf, aus der sich etwa eine Minute später eine anfänglich matte, röthliche, kleine Wolke bildete, die sich schnell vergrösserte, und zur Zeit ihrer gröfsten Ausdehnung mit ungemein hellem rothen Lichte glänzte. So wie diese Wolke an Beleuchtung zunahm, wurde der untere Theil der Säulen matter, und verschwand endlich eine halbe Stunde nach der Entstehung der Wolke völlig. Bald darauf traf auch die Wolke dasselbe Loos, und es blieb

nur jenes Segment übrig, womit das ganze Schauspiel begonnen hatte. Um 11 Uhr sah man nur mehr diesen Rest des Nordlichtes, und gegen Mitternacht war alles verschwunden.

IX.

Neue und verbesserte physikalische Apparate.

1. Eine sehr empfindliche Wage. Von *Ritchie.*

(Phil. transact. 1830. *P. I., p.* 215.*)*

Ritchie hat mehrere Versuche über die Elasticität von Glasfäden angestellt, und die Resultate derselben auf physikalische Apparate angewendet. Eine dieser Anwendungen wurde auf einen Torsions-Multiplicator gemacht, der im Wesentlichen in Deutschland längst nichts Neues mehr ist, indem ihn schon *Ohm* bei seinen electrischen Versuchen (*Schweigg.* Journ., Bd. 46) anwendete, nur bringt *Ritchie* statt eines Goldlahnes einen feinen Glasfaden an. Anders verhält es sich mit einer auf der Elasticität dünner Glasfäden beruhenden, sehr empfindlichen Wage. Diese ist in Fig. 14 abgebildet; *g* ist ein Glasfaden, dessen Feinheit und Länge sich nach der Empfindlichkeit der Wage richtet. Es ist gut deren mehrere von verschiedener Länge und Dicke in Bereitschaft zu haben, um die Wahl nach dem jedesmaligen Bedürfnisse treffen zu können. *Ritchie* brauchte solche Fäden von 10 F. Länge, da war aber ihre Empfindlichkeit so grofs, dafs sie durch ein Gewicht von 1 Gran eine Torsion von 5000° erlitten. Es ist gut, wenn dieser Glasfaden an beiden Enden in eine dickere Masse übergeht, wie dieses auch leicht seyn kann, indem man

ihn am besten durch Ausziehen einer dünnen Thermometerröhre erhält. Dieser Faden wird nun mit einem Ende an einen Stift *a* befestiget, welcher durch den Mittelpunct einer verticalen, kreisrunden, in Grade abgetheilten Scheibe *c* geht, und mit einem Zeiger versehen ist. Mittelst dieses Stiftes wird der Zeiger und mit demselben zugleich auch der Glasfaden gedreht. Das andere Ende des Fadens ist an ein stählernes, unten mit einer Schneide versehenes Stäbchen *k* befestiget, das gleichsam den Wellzapfen abgibt. Senkrecht auf diesem Stäbchen ist ein hölzerner, sehr leichter, gleicharmiger, etwa 12 — 15 Z. langer, mit Wagschalen versehener Hebel *b* angebracht, der die Schneide des Stäbchens zur Axe hat. Als Unterlage dienen zwei Glasröhrchen *t*, die auf einer verticalen, oben in zwei Zinken wie eine Gabel sich zertheilenden Stütze festgemacht sind. Es ist gesagt worden, dafs an ein Ende des Stahlstäbchens der Glasfaden befestiget ist, an das andere schliefst sich ein ungezwirnter Seidenfaden an, der selbst wieder mit seinem zweiten Ende sich an eine metallene Spiralfeder *s* anschliefst, welche in einer zweiten verticalen Stütze ihre Befestigung findet, und nur dazu dient, durch ihre Elasticität den Glasfaden sammt Zugehör gespannt zu erhalten. Die Verbindung aller Theile mit dem Wagebalken *b* soll so beschaffen seyn, dafs letzterer in horizontaler Lage im Gleichgewichte steht, wenn der Glasfaden keine Windung hat, welches man daraus erkennt, dafs der Zeiger über der Scheibe *c* auf den Nullpunct weiset. Es ist gut, wenn sich wenigstens der Wagebalken in einem Glaskasten befindet, damit der Luftzug nicht auf ihn wirken kann. Der Glasfaden mag immerhin aufserhalb dieses Kastens bleiben.

Nun zum Gebrauche dieser Wage. Beträgt das zu bestimmende Gewicht gegen 1 Gr., so verfahre man so:

Man gebe dem Glasfaden durch Drehen des Stäbchens *a* eine Windung von 2 — 3 Peripherien, vorausgesetzt, dafs er dieselbe verträgt, ohne zu zerreissen (nach *Ritchie's* Versuchen kann ein nur 12 Z. langer Faden eine Torsion von 100 Peripherien ohne Bruch aushalten), lege dann auf die durch die Torsion gehobene Schale so viel Gegengewicht, bis der Balken nahe horizontal und der Zeiger bei *c* auf 0° steht; gebe hierauf die Last auf die beim Aufdrehen des Fadens steigende Schale, und winde den Draht mittelst des Griffes *a* so weit, bis diese Schale zu steigen beginnt, beobachte genau den Punct der Scale, auf welchem der Zeiger im Gleichgewichte bleibt, und bemerke die Torsion in Graden. Hierauf nehme man die Last von der Wagschale, drehe den Faden auf, bis der Balken in die horizontale Lage kommt, lege dann ein kleines bekanntes Gewicht in dieselbe Schale und ändere die Torsion, bis der Balken wieder die horizontale Lage einnimmt. Die Anzahl Grade der Torsion in diesem verhält sich so zu der in jenem Falle, wo der zu prüfende Körper auf der Wagschale lag, wie das bekannte zum unbekannten Gewichte. Beträgt z. B. die Torsion im ersteren Falle 50°, im zweiten hingegen, wo 1 Gr. auf der Wagschale liegt, 1000°, so ist das gesuchte Gewicht $^{50}/_{1000}$ Gr.

Hat der abzuwägende Körper viel mehr als 1 Gr., so thut man am besten, sein Gewicht bis auf die Bruchtheile eines Granes auf die gewöhnliche Weise zu finden, den Bruchtheil aber durch die Torsion zu bestimmen. Hat z. B. ein Körper nahe 100 Gr., so gebe man dem Faden, wie vorhin, eine Torsion von 2 — 3 Peripherien, bringe den Balken durch ein Gegengewicht in die horizontale Lage, lege dann den Körper in eine Schale, in die andere so viel Tara, bis zwischen beiden vollkommenes Gleichgewicht herrscht, ersetze

hierauf den Körper durch Gewichte, die das Gleichgewicht nahe wieder herstellen, und nur etwa um einen Bruchtheil eines Granes geringer sind als der Körper. Man drehe aber den Faden so weit, bis der Balken vollkommen horizontal steht, und bemerke diese Torsion. Bringt man dann ein Grangewicht in die Schale, und beobachtet die Torsionsgrade, welche nothwendig sind, den Wagebalken wieder in die horizontale Lage zu bringen, so gibt das Verhältnifs der zwei Torsionen das des gesuchten Bruchtheils zu 1 Gr. Z. B. man finde, dafs der Körper mit 99 Gr. beinahe im Gleichgewichte stehe, aber zur vollkommenen Herstellung desselben doch noch eine Windung von 50° erfordere, während 1 Gr. 1000° derselben braucht, so ist der vernachlässigte Bruchtheil $= {}^{50}/_{1000}$ Gr.; und das genaue Gewicht dieses Körpers 99.05 Gr.

2. Photometer. Von *Potter*.

(Edinb. journ. of sc. N. VI., p. 278.)

Potter hat mehrere Versuche angestellt über die Lichtmenge, welche Metallspiegel bei verschiedenen Einfallswinkeln reflectiren, und zu diesem Behufe ein Photometer gebraucht, das von den gewöhnlichen Instrumenten dieser Art etwas abweicht. Da diese so wichtigen Werkzeuge bei weitem noch nicht so cultivirt sind, als sie es verdienen, so mufs wohl jeder Beitrag zur weiteren Vervollkommnung derselben willkommen seyn, und aus diesem Grunde wird hier das Wesentliche von der Einrichtung des *Potter*'schen Instrumentes angegeben.

Das Princip hat dieses Photometer mit dem *Bouguer*'schen, in der neueren Zeit von *Ritchie* verbesserten (Zeitschr. Bd. I., S. 72) gemein, indem es auf der scheinbaren Stärke der Erleuchtung beruht, die ein Kör-

per durch zwei verschiedene Lichtquellen erhält. Man denke sich, um eine richtige Vorstellung von diesem Instrumente zu bekommen, einen horizontalen Tisch, der durch eine verticale, der Lage nach senkrecht auf der Tischplatte stehende, undurchsichtige Papierplatte in zwei Theile getheilt ist, und an einem Ende des Tisches senkrecht sowohl auf dem Tische als auf der verticalen Platte eine andere undurchsichtige Wand, die aber in der Mitte ein viereckiges, 2 ½ Z. hohes, 4 Z. langes Loch hat, das mit feinem Papier überdeckt ist. Stellt man in jede der zwei Abtheilungen des Tisches eine Kerzenflamme, so beleuchtet jede eine Hälfte des Papiers über der viereckigen Öffnung, und man sieht hinter dem Papier diese beiden Hälften durch den Schatten der Scheidewand von einander getrennt, kann aber leicht durch Annähern oder Entfernen der einen oder anderen Lichtquelle die Beleuchtung beider Hälften auf gleiche scheinbare Stärke bringen. Ist dieses der Fall, so verhalten sich die Lichtstärken wie die Quadrate der Entfernung der betreffenden Flammen von der Öffnung.

X.

Fortschritte der Physik in der neuesten Zeit.

A. Optik.

1. Neue Polarisations-Phänomene. Von *L. Nobili.*

(Bibl. univ. Nov. 1830, p 239.)

Eine der interessantesten electrisch-chemischen Erscheinungen der neueren Zeit sind ohne Zweifel die ringförmigen farbigen Ablagerungen auf Metallplatten,

die durch den electrischen Strom einer schwachen Säule nach *Nobili's* Anleitung entstehen. Diese Zeitschrift gibt im II. u. III Bande davon nähere Nachricht. *Nobili* hat diese Phänomene nun auch in optischer Beziehung näher untersucht, und gibt in der oben genannten Quelle Nachricht über eine neue Classe von Polarisationserscheinungen, worüber er die Beobachtungen zwar noch nicht beendet, aber doch so weit gebracht hat, dafs er sie bekannt machen zu müssen glaubt.

Es ist bekannt, dafs die in dünnen Plättchen, wie z. B. Seifenblasen, erscheinenden Farbenringe, die man gewöhnlich *Newton*'sche Farbenringe nennt, unter jedem Einfallswinkel mittelst eines Doppelspathes zwei Bilder *derselben Farbe* und nahe von derselben Lichtstärke geben, woraus man schliefst, dafs solche dünne Plättchen das Licht nicht polarisiren. Die farbigen Ringe, welche auf Metallplatten durch den electrischen Strom als Niederschläge aus Salzauflösungen etc. entstehen, erscheinen hingegen bei einem sehr schiefen Einfall durch einen Doppelspath in zwei Bildern *von verschiedener Farbe*, die sich aber nicht gegenseitig zu Weifs ergänzen, wie es bei den polarisirten Farben sonst zu geschehen pflegt, sondern sie geben vereinigt die Farbe, welche dem Ringe im gewöhnlichen Zustande ohne Hülfe des Doppelspathes bei demselben Einfallswinkel der Strahlen zukommt. Der Grad der Politur des Metalles, worauf dieses vor sich geht, hat auf das Phänomen keinen anderen Einfluſs, als dafs bei rein spiegelnden Flächen die Bilder reiner und deutlicher werden, als bei anderen; auch ist es einerlei, ob die Einfallsebene der Strahlen mit den feinen auf dem Metallboden vorkommenden Ritzen parallel oder darauf senkrecht ist.

Die Neigung, unter welcher die Trennung eines

Ringes in zwei farbige Theile eintritt, richtet sich nach der Farbe desselben. Azurblau erleidet diese Spaltung unter allen zuerst. Die vollständigste Entwicklung tritt zwischen 15° — 5° ein. Auch die Intensität der zwei Farben ändert sich von einer Farbe zur anderen, und bald erscheint das gewöhnliche, bald das ungewöhnliche Bild am stärksten gefärbt. Die Ringe, deren Farbe der ersten der *Newton*'schen Scale entspricht, haben im gewöhnlichen, die mit der Farbe des vierten Ringes hingegen im ungewöhnlichen Bilde die meiste Licht- und Farbenstärke.

Bekanntlich ändert sich die Farbe und Breite der *Newton*'schen Ringe, wenn man sie immer schiefer und schiefer ansieht, aber sie folgen auf einander nach der Ordnung der Farbenscale im senkrecht auffallenden Lichte.

Unter einem kleinen Einfallswinkel verhalten sich auch die *Nobili*'schen Ringe auf gleiche Weise, bei grösseren Neigungen der Strahlen hingegen erscheinen die Farben in einer anderen Ordnung. Demnach hängt der Farbenton der hier besprochenen Phänomene sowohl von der Neigung als vom Polarisationszustande ab. Deckt man eine Farbe mit einer dünnen Schichte Wasser, Alkohol, Firnifs oder Öhl, und sieht sie dann durch einen Doppelspath an, so findet jene Theilung der Ringe und Farben nicht mehr Statt, und es verhält sich alles so wie bei *Newton's* Farbenringen. Diese Wirkung dünner Schichten gibt ein treffliches Mittel an die Hand, die Wirkung der Schiefe der Strahlen von jener der Polarisation zu trennen. Man braucht nämlich nur die Hälfte eines Ringes mit Firnifs, Wasser etc. zu decken, aber die andere frei zu lassen, und dann den Ring durch einen Doppelspath bei verschiedener Neigung der Strahlen anzusehen.

Diese Erscheinungen, welche *Nobili* zuerst an seinen Ringen beobachtet hat, bemerkt man auch an Metallen, welche durch Kunst oder auf natürlichem Wege einen dünnen Überzug erhalten haben, wie z. B. an blau angelaufenen Uhrfedern, am Kupfer, an Eisenerzen. Sieht man sie durch einen Doppelspath an, so erscheinen bei einem schiefen Einfall zwei Bilder mit verschiedenen Farben. Selbst Insectenflügel, wo doch an keine metallische Unterlage zu denken ist, gewähren ähnliche Phänomene. Die Flügel der *Chylocopa violacea (Fab.)* sind violett, durch einen Doppelspath angesehen erscheint das gewöhnliche Bild roth-violett, das ungewöhnliche dunkelgrün; die der *Chrysomela graminis (Fab.)* sind grüngelb, und geben mittelst eines Doppelspathes ein gewöhnliches gelbliches und ein ungewöhnliches dunkelgrünes Bild.

Man sieht leicht ein, dafs diese Phänomene von denen verschieden sind, welche sich an dünnen Blättern im polarisirten Lichte zeigen. Blättchen, welche sich im polarisirten Lichte farbig zeigen, sind krystallisirt, die hier besprochenen haben kein krystallinisches Gefüge; erstere liefern die betreffenden Phänomene bei viel gröfseren Dicken, und geben Farben, die sich zu Weifs ergänzen, welches bei letzteren niemals der Fall ist.

2. Über die Wirkung der Hinterfläche durchsichtiger Körper auf das Licht. Von *Brewster.*

(Phil. transact. 1830. P. I., p. 145)

Den Physikern, welche sich mit den Phänomenen der Polarisation des Lichtes vertraut gemacht haben, ist ein sehr sinnreicher Versuch *Arago's* gewifs bekannt, durch welchen er zu beweisen glaubte, dafs eine Glas-

platte einen von ihr ins Auge gelangenden Lichtstrahl so modificirt, dafs der durch Brechung polarisirte Antheil desselben dem durch Reflexion polarisirten vollkommen gleich ist, der Winkel, unter welchem der eine Theil durch das Glas geht, und der, unter welchem der andere von ihrer Vorderfläche reflectirt wird, mag wie immer beschaffen seyn. Diesen Satz bestreitet aber *Brewster*, und beweiset, dafs er nur für Winkel gilt, die dem Polarisationswinkel sehr nahe liegen, für andere aber weit von der Wahrheit abweicht. Um nun den Weg genau kennen zu lernen, auf welchem *Brewster* gegen *Arago* kämpft, müssen wir den *Arago*'schen Versuch näher vor's Auge rücken. Letzterer bediente sich einer Glasplatte *DE* (Fig. 15) mit parallelen Wänden, stellte sie auf eine weifse Fläche *AB*, so dafs von letzterer sowohl in der Richtung *AI* als in der Richtung *BI* Licht auf *DE* fiel, und von ersterem der reflectirte, von letzterem der gebrochene Theil, beide zu einem Strahl *SO* vereinigt, ins Auge *O* gelangen konnten. Um nur diesen Strahl ins Auge zu leiten, wurde ein undurchsichtiger Schirm *mn* mit einer Öffnung vor dem Glase angebracht, der alle Strahlen bis auf *IO* abhielt. Das Licht konnte durch einen Doppelspath *C* analysirt werden. Dieser zeigte *Arago* stets zwei Bilder der Öffnung am Schirme von gleicher Intensität, wenn sowohl *AI* als *BI* ins Auge kommen konnte. Wurde aber *BI* durch einen Schirm abgehalten, so erschien das gewöhnliche Bild stärker als das ungewöhnliche, während gerade das Gegentheil eintrat, wenn dasselbe mit dem Strahl *BI* geschah.

Gegen diese Versuchsweise *Arago's* wendet nun *Brewster* ein, dafs der Strahl *SO* nicht blofs aus zwei nach entgegengesetzten Richtungen polarisirten Theilen bestehe, sondern aus mehreren durch partielle Reflexio-

nen und Refractionen entstandenen. Nämlich ein Theil des Strahles *BI* erleidet in der Platte partielle Reflexionen, wird hierdurch in der Ebene der Reflexion polarisirt, und kommt so ins Auge *O*. Dasselbe erfolgt mit einem Theile des Strahles *AI*, während ein anderer schon an der Vorderfläche reflectirt wird, so dafs demnach drei Theile des Strahles *IO* in der Ebene der Reflexion, und nur zwei, nämlich die an jeder der zwei Glasflächen gebrochenen, in entgegengesetzter Richtung polarisirt sind. Nun steht aber der durch eine Reflexion polarisirte Strahl dem durch zwei Refractionen polarisirten in Betreff seiner Polarisations-Intensität nach, und wenn *Arago* bei seinem Versuche wirklich zwei *gleich intensive* Bilder mittelst des Doppelspathes erhalten hat, so kann dieses nur davon herrühren, dafs die übrigen reflectirten Strahlen die Compensation bewirkt haben, und *Arago's* Satz kann höchstens nur auf Platten, nicht auf einzelne Flächen bezogen werden. Nimmt man statt der allenthalben gleich dicken Glasplatte ein dreiseitiges, wohl abgekühltes Glasprisma *EDF* (Fig. 16), und läfst den Strahl *BD* senkrecht durch die Hinterwand *FD* eintreten, so bleibt diese Wand ohne polarisirende Wirkung, und man erhält einen Erfolg, als hätte man es nur mit einer einzelnen polarisirenden Fläche zu thun.

Um den wahren Verlauf der Sache richtig einzusehen, ist es nothwendig näher zu untersuchen, welche Veränderungen ein Strahl durch zwei Brechungen und eine dazwischen vor sich gehende Reflexion erleidet. Zu diesem Behufe braucht *Brewster* ein Glasprisma *MN* (Fig. 17), bei welchem eine Fläche *Md* so gegen *MQ* geneigt ist, dafs der gebrochene Antheil *AC* eines natürlichen (d. h. unter $+45^\circ$ und -45° polarisirten), nahe unter 83° auffallenden Strahles *RA* nach der Re-

flexion in C die Fläche Md senkrecht durchdringt, und demnach keine Änderung seines Polarisationszustandes erleidet. Da bei diesem Einfallswinkel der in A reflectirte Antheil AP unter $36^{\circ}\,1/2$ geneigte Polarisationsebenen hat (siehe *Brewster's* Aufsatz in Bd. IX., S. 494), so müfste dieses auch mit dem Strahl CS der Fall seyn, wenn er in A keine Brechung erlitten hätte; aber durch diese Brechung entsteht eine Wendung der Polarisationsebenen um $53^{\circ} - 45^{\circ} = 8^{\circ}$ in einer Richtung, welche der durch die zweite Reflexion in C entgegengesetzt ist, und so mufs die Neigung der Polarisationsebenen des Strahles CS nahe $36^{\circ}\,1/2 + 8^{\circ} = 44^{\circ}\,1/2$ seyn, und der Strahl ist nahe in den natürlichen Zustand zurückgekehrt. Betrüge dieser Winkel 45°, so wäre er vollkommen in natürlichen Zustand versetzt.

Um nun die Wirkung einer zweiten Brechung des in C reflectirten Strahles zu erfahren, kittete *Brewster* auf die Fläche Md ein anderes dreiseitiges Glasprisma, wodurch das Ganze in ein rechtwinkeliges Prisma verwandelt wurde, und untersuchte nun, ohne etwas anderes abzuändern, den Polarisationszustand des Strahles bs. Er fand die Neigung seiner Polarisationsebenen wieder $= 53^{\circ}$, mithin, dafs die zwei Brechungen in A und b die Reflexion in C überwältiget haben, und der Strahl bs Licht enthielt, das senkrecht auf die Reflexionsebene polarisirt war.

Ein anderer Versuch führte zu demselben Resultate. Ein massives Prisma, wie $McNQ$, trennt die Theile AP und bs eines Strahls RA hinreichend von einander, so dafs man jeden einzeln untersuchen kann. Da fand *Brewster* bei einem Einfallswinkel von 83° die Neigung der Polarisationsebenen des Strahles AP gleich $37^{\circ}\,1/2$, die des Strahles bs nahe 55°, also fast gleiche Wirkung wie die der Brechung bei einem Einfall von 83°.

Fällt der Strahl RA unter dem Polarisationswinkel von 56° 45′ auf, so erleidet die Polarisationsrichtung durch die Refraction in A eine Änderung von 2°, und die Neigung I der Polarisationsebene ist $45° + 2° = 47°$, so dafs man den Strahl CB immerhin als vollkommen in der Ebene der Reflexion polarisirt ansehen kann. Ist nun $I = 0$, so kann die Brechung in b die Polarisationsebene nicht ändern, und daher kommt es, dafs die zweifache Änderung der Polarisationsrichtung in A und b, deren jede 2° beträgt, beim vollkommenen Polarisationswinkel ohne Wirkung bleibt. Ist nun die Neigung der Polarisationsebene gegen die der Reflexion nach der ersten Reflexion in $A = \varphi$, dieselbe nach der Reflexion in $C = \varphi'$, und die nach der zweiten Brechung in $b = \varphi''$, so hat man in der Voraussetzung, dafs x die ursprüngliche Neigung der Polarisationsebene gegen die Reflexionsebene, i den Einfalls-, i' den Brechungswinkel bedeutet:

$$\cot.\varphi = \cot. x \cos.(i - i'), \quad \text{tang.}\,\varphi' = \text{tang.}\, x \frac{\cos.(i + i')}{\cos.(i - i')^2},$$

$$\cot.\varphi'' = \cot. x \frac{\cos.(i - i')^3}{\cos.(i + i')}.$$

Handelt es sich um gewöhnliches Licht, so ist $x = 45°$, und das Licht hat selbst nach den hier besprochenen Brechungen und Reflexionen den Charakter des gewöhnlichen, sobald

$$\cot.\varphi'' = 1 \quad \text{oder} \quad \cos.(i - i')^3 = \cos.(i + i')$$

ist. Bei Glas, für welches der Brechungsexponent $m = 1.525$ ist, tritt dieses bei 78° 7′, bei Diamant ein wenig unter 78°, und bei Wasser etwas über 80° ein. Bei einem kleineren Winkel wird $\varphi < 45°$, und der Lichtstrahl enthält Licht, das in der Reflexionsebene polarisirt ist; bei einem gröfseren ist $\varphi > 45°$, und der Strahl enthält einen senkrecht auf die Reflexionsebene polari-

sirten Antheil. Es ergibt sich demnach hieraus das folgende merkwürdige Gesetz:

Ein von der Hinterfläche einer durchsichtigen Platte reflectirter Lichtbüschel, der nach zwei Brechungen und einer inzwischen liegenden Reflexion ins Auge gelangt, enthält bei jedem Einfallswinkel von 0° bis zu dem der vollkommenen Polarisation einen in der Reflexionsebene polarisirten Antheil. Bei einem gröfseren Winkel nimmt die Menge des so polarisirten Strahles ab, bis $\cos.(i+i') = \cos.(i-i')^3$, in welchem Falle der Strahl den Character des gewöhnlichen Lichtes erhält; unter dem Polarisationswinkel kommt ein senkrecht auf die Reflexionsebene polarisirter Antheil im Strahle vor, erreicht ein Maximum, und wird $= 0$ bei 90°.

Für den Strahl CS', der nur *eine* Brechung und *eine* Reflexion erlitten hat, ist $\text{tang.}\,\varphi' = \frac{\cos.(i+i')}{\cos.(i-i')^2}$, und es wird $\varphi' = 45°$, mithin der Strahl ein unpolarisirter, wenn $\cos.(i+i') = \cos.(i-i')^2$ ist. Dieses tritt bei Glas unter 82° 44′ ein. Bei jedem kleineren Winkel enthält der Lichtbüschel Theile, die in der Reflexionsebene, bei jedem gröfseren solche, die in einer darauf senkrechten Richtung polarisirt sind. Folgende Tafel gibt den Polarisationszustand der Strahlen AC, CS und bs für verschiedene Einfallswinkel näher an:

Einfallswinkel an der ersten Fläche.		Brechungswinkel an der ersten, u. Einfallswinkel an der zweiten Fläche.		Neigung der Polarisationsebene von					
				AC.		*CS.*		*bs.*	
0°	0′	0°	0′	45°	0′	45°	0′	45°	0′
32	0	20	33	45	34	32	20	32	51
40	0	25	10	45	58	24	12	24	56
45	0	27	55	46	17	17	49	18	38
56	30	33	30	47	22	0	0	0	0
67	0	37	34	48	57	18	20	20	50
70	0	38	30	49	33	23	34	27	6
75	0	39	46	50	45	32	22	37	48
78	37	40	29	51	49	38	10	44	59
79	0	40	33	51	56	38	49	45	46
80	0	40	42	52	16	40	27	47	46
83	0	41	5	53	21	44	39	53	40
86	30	41	23	54	47	50	58	60	13
90	0	41	58	56	29	56	29	66	19

Nun hält es auch nicht schwer, Formeln zu entwickeln, welche die Menge des im Büschel CBS oder bs enthaltenen polarisirten Lichtes darstellen. Fällt auf Nc gemeines Licht auf, so wird durch die Brechung in A die Polarisationsebene um den Winkel x verrückt, und man hat $\cot. x = \cos.(i - i')$. Setzt man die Intensität von $AC = 1$, so ist nach *Fresnel's* Formeln die Intensität I der beiden unter $+45°$ und $-45°$ polarisirten, d. h. des natürlichen Antheiles

$$I = \frac{\cos.^2(i-i')}{\sin.^2(i+i')}\cos.^2 x + \frac{\tang.^2(i-i')}{\tang.^2(i+i')}\sin.^2 x,$$

und die Menge Q des polarisirten Lichtes

$$Q = I\left\{1 - 2\,\frac{\left(\frac{\cos.(i+i')}{\cos.(i-i')}\right)^2}{1+\left(\frac{\cos.(i+i')}{\cos.(i-i')^3}\right)^2}\right\}.$$

Heifst aber die Intensität $BC = 1$, so erhält man eben so

$$\text{tang.}\, x = \frac{\cos.\,(i+i')}{\cos.^2(i-i')},$$

und für $b\,s$

$$I = 1 - \frac{\sin.^2(i-i')}{\sin.^2(i+i')}\cos.^2 x + \frac{\text{tang.}^2(i-i')}{\text{tang.}^2(i+i')}\sin.^2 x,$$

$$Q = I\left\{1 - 2\,\frac{\left(\frac{\cos.^3(i-i')}{\cos.\,(i+i')}\right)^2}{1+\left(\frac{\cos.^3(i-i')}{\cos.\,(i+i')}\right)^2}\right\}.$$

B. Wärme.

1. Selbstentzündung des Kohlenpulvers. Von *Aubert.*

(Ann. de Chim. etc. Tome 45, p. 73.)

Es hat sich innerhalb weniger Jahren in mehreren Pulverfabriken Frankreichs der Fall ereignet, dafs sich Kohlenpulver von selbst entzündete, ohne dafs man die Bedingungen kannte, unter welchen dieses erfolgte. *Aubert*, französischer Artillerie-Hauptmann, hat mit Beihülfe mehrerer Officiere seines Corps diese Bedingungen näher untersucht, und dabei Folgendes gefunden:

Fein gepulverte Kohlen absorbiren schnell Luft und Wasser, sie nehmen dabei an Gewicht zu, setzen dieses mehrere Tage lang fort, erwärmen sich oft bis zu 170° und 180°, und gerathen dann gar in Brand. Dieser beginnt nahe am Mittelpuncte der ganzen Masse oder 12 — 15 Centimeter unter der Oberfläche, wo auch die Temperaturerhöhung gröfser ist, als an jeder anderen Stelle, so dafs man annehmen mufs, es dringe die Luft am Rand des Gefäfses in die Kohlenmasse ein, bilde daselbst einen absteigenden Strom, der sich gegen den Mittelpunct hinzieht, daselbst in verticaler Richtung

aufwärts geht, ohne weiter in die Masse einzudringen. In einer Kohlenpulvermasse fand man seitwärts 15 Centimeter über dem Boden des Gefäfses die Temperatur $= 37°$ C., mitten in der Masse $= 55°$, und noch höher $170°$ C. Änderungen im Luftdrucke, im Zustande der Wärme und der Feuchtigkeit der Luft sind, wenigstens so weit dieses die angestellten Versuche darthun konnten, ohne Einfluſs auf das genannte Phänomen. Dasjenige, wovon die Inflammation der Kohlen überhaupt abhängt, besteht in Folgendem:

1. Die *Art der Verkohlung.* Schwarze, durch starke Verkohlung erhaltene Kohlen entzünden sich leichter als braune, die nur schwach verkohlt sind. In einem Kessel durch Destillation erzeugte Kohlen entzünden sich am schwersten.

2. Die *Masse des Kohlenpulvers.* Die entzündlichste schwarze Kohle entzündet sich nur bei einer Masse von 30 Kilogrammen (53.6 W. Pf.), eine minder entzündliche braucht dazu eine noch viel gröfsere Masse. Eine in einem Kessel erzeugte Kohlenmasse von 42 Kilogrammen erwärmte sich nur bis auf $47°$ C., während eine doppelt so grofse Masse derselben Art sich entzündete, und schon $1\,^1/_2$ Stunden zuvor eine Temperatur von $170°$ angenommen hatte.

3. Die *Zeit, welche zwischen der Verkohlung und dem Verkleinern verflieſst.* Je kürzer diese ist, desto sicherer tritt eine Entzündung ein. Bei einer Kohlenmasse, die 95 Kil. wog, erst 5 — 6 Tage nach ihrer Erzeugung verkleinert, und in dem Verhältnisse 45 : 31 : 15 in drei Theile getheilt wurde, deren jeder in ein besonderes Gefäfs kam, das seinem Inhalte proportionirt war, trat durchaus keine Entzündung ein, selbst die gröfste Masse erhitzte sich bei einer anfänglichen Temperatur von $33°$ C. nur bis auf $55°$, die anderen zwei gar nur

auf 40° *C.* Eine andere Masse hingegen von 30 Kil., die schon 24 Stunden nach der Verkohlung zerstampft wurde, brach schon nach 12 Stunden in Brand aus.

4. *Freier Zutritt der Luft an der Oberfläche.* Von zwei Kohlenmassen, deren jede 45 Kilog. betrug, und wovon eine in einem offenen, die andere in einem verdeckten Gefäfse aufbewahrt wurde, entzündete sich nur die erstere, und zwar schon nach 18 Stunden, die andere erlitt nur eine Temperaturerhöhung von 8° *C.*

5. *Zusatz von Schwefel und Salpeter heben die Selbstentzündung auf*, ohne jedoch die Absorption der Luft ganz zu hindern, aber es unterbleibt in einem solchen Gemenge eine geringe Temperaturerhöhung nicht. Eine Kohlenmasse, die 10 Stunden nach ihrer Erzeugung mit 125 pCt. Schwefelpulver gemengt worden war, erlitt nur eine Temperaturerhöhung von 34°, und nahm am Gewichte um $^1/_{330}$ zu. Ein Gemenge von Kohlen und Salpeter, dessen Masse 25 Kilog. betrug, erlitt gar nur eine Temperaturerhöhung von 23°. Man darf demnach nicht besorgen, dafs Gemenge aus Kohlenpulver und Schwefel oder Salpeter sich von selbst entzünden, doch ist es räthlich, sie nicht in zu grofse Massen zusammen zu geben, damit nicht etwa die Erwärmung doch zu grofs werde.

2. Versuche über Kerzendochte. Von *Reid.*

(Edinb. phil. journ. N. VI., p. 337.)

Wachs, Unschlitt und viele andere Stoffe schmelzen bei einer bestimmten Temperatur, und erleiden bei einer noch höheren eine Zersetzung in Kohlenstoff, Wasserstoff und Sauerstoff. Diese Bestandtheile treten unter dem Einflusse der atmosphärischen Luft zu neuen Producten mit einander in Verbindung, und es entwickelt sich dabei Licht und Wärme. Handelt es sich um

die Benützung des ersteren, so braucht man in der Regel nebst der zu verbrennenden Substanz auch noch einen anderen fadenartigen Körper, der durch Capillarität einen Theil des bereits geschmolzenen Brennmaterials aufnimmt, der Flamme zuführt, und dieselbe auf solche Weise weiter nährt. Man nennt diesen Stoff, der in den meisten Fällen selbst verbrennlich seyn muſs, den *Docht*. Die Einrichtung desselben hat auf die Menge des beim Verbrennen entwickelten Lichtes einen sehr groſsen Einfluſs. Darum hat *Reid* einige Versuche angestellt, um die beste Einrichtung desselben kennen zu lernen. Von diesen Versuchen folgt hier das Wesentlichste:

Bei Kerzendochten kommt es vor Allem auf die Dimensionen derselben an. Ist der Docht zu kurz, so nähert sich die Flamme zu sehr dem schmelzbaren Brennmaterial, schmilzt einen zu groſsen Theil davon, und bewirkt dadurch ein Abflieſsen desselben und eine zu groſse, der Lichtentwickelung nachtheilige Wärmeconsumtion; ist derselbe hingegen zu lang, so bewirkt er schon durch seinen Schatten eine Lichtverminderung, noch mehr aber durch die Wärme, die er fortwährend aufnehmen muſs, um bei seiner Temperatur verharren zu können, die dadurch anderen Theilen entgeht, und der Vollkommenheit des Verbrennungsprozesses Abbruch thut, woher es dann wieder kommt, daſs sich unverbrannte Kohle ausscheidet, die theils einen sichtbaren Rauch bildet, theils sich an den Docht anlegt, und ihn noch mehr vergröſsert. Eben so kann eine unproportionirte Dicke des Dochtes schädlich werden. Ist derselbe zu dünn, so biegt er sich um, fällt auf die Kerze zurück, und zieht auch zu wenig Brennmaterial; ist er aber zu dick, so wirkt er eben so schädlich ein, als wenn er zu lang wäre. Da es aber schwer hält, gleich

die rechte Dicke zu treffen, so bereitete sich *Reid* zum Versuche Kerzen mit eigenen Dochten. Eine derselben, die wir *A* heifsen wollen, bekam einen Docht, der aus drei neben einander befindlichen Litzen bestand, und breiter als dick war; eine andere *B* bekam zwei Dochte, die von einander etwas abstanden, und deren jeder aus 5 Fäden bestand; eine dritte *C* erhielt drei besondere Dochte, jeden zu 5 Fäden, und endlich eine vierte *D* einen runden Docht aus 20 Fäden. Das Licht, welches jede einzelne solche Kerze gab, wurde nach der Intensität der Schatten mit dem einer Wachskerze verglichen. Als Resultat dieser Vergleichung gibt *Reid* folgende Zahlen an, zu denen hier noch die relative Lichtstärke nach dem Quadrate der Entfernung vom schattenwerfenden Körper besonders beigesetzt wird.

Kerze.	Entfernung vom schattenwerfenden Körper.	Lichtstärke.
Gemeine Wachskerze	18	100
Kerze *A*	17	89
» *B*	18	100
» *C*	$26^1/_2$	216
» *D*	15	69

Um den Einfluſs der Gröſse der Flamme auf die Lichtstärke zu erfahren, wurden drei Kerzen *E*, *F*, *G* bereitet; jede hatte drei Dochte. Diese bestanden aber bei *E* aus 5, bei *F* aus 4, und bei *G* aus 3 Fäden. Man fand Folgendes:

Kerze.	Entfernung.	Lichtstärke.
Wachskerze . . .	18	100
Kerze *E*	$16^1/_2$	81
» *F*	$23^3/_4$	174
» *G*	$21^1/_2$	142

Von groſsem Einflusse auf Lichtentwickelung ist bei Körpern mit mehreren Dochten die Entfernung der-

selben von einander. Bei einer Kerze mit 2 Dochten aus 5 Fäden nimmt die Lichtstärke zu, bis die Dochte $^1/_4$ Z. von einander abstehen; über diese Grenze hinaus erscheinen zwei abgesonderte Flammen; es nimmt aber die Lichtstärke nicht merklich ab, bis die Dochte $^1/_3$ Z. Entfernung haben, wo die Trennung der Flammen vollständig erfolgt. Die Entfernung von $^1/_6$ Z. dürfte für Dochte am zuträglichsten seyn.

Bei einem Versuche, wo es sich um die Bestimmung der comparativen Talgmenge handelte, die eine bestimmte Lichtintensität gibt, wurden zwei Talgkerzen, eine mit gewöhnlichem, die andere mit zwei Dochten, gewählt, und bei der Comparation gefunden, dafs, wenn beide sehr kurz geputzt waren, keine grofse Differenz Statt fand, denn die gemeine Kerze verzehrte bei einem Versuche in einer halben Stunde 68 Gr., die andere 66 Gr. Talg, wenn die Flamme in beiden gleich grofs erhalten wurde; bei einem anderen Versuche war gar die Talgmenge in beiden völlig gleich.

Liefs man aber Kerzen so lange brennen, ohne sie zu putzen, bis ihr Docht eine Länge von 1 Z. erlangt hatte, wo die Talg-Consumtion nahe dieselbe war, so ergaben sich bei der Vergleichung ihrer Lichtmenge folgende Resultate:

Kerze.	Entfernung.	Lichtstärke.
Wachskerze	18	100
Talgkerze mit 2 Dochten, jeder von 5 Fäden, kurz geputzt	$21^1/_2$	142
Dieselbe ungeputzt . . .	$19^1/_2$	117
Talgkerze mit 1 Docht, aus 20 Fäden, kurz geputzt	15	69
Dieselbe ungeputzt . . .	$7^1/_2$	17

Es gibt demnach eine Talgkerze mit 2 Dochten nahe so viel Licht wie eine Wachskerze, doch müssen die Fäden der Dochte erst einzeln gedreht, und dann zu einem Dochte verbunden seyn. Ist dieses nicht der Fall, und sind alle Fäden mit einander eher vereiniget als sie gedreht worden, so ändert sich ihre Lage während des Verbrennens beständig, bald entfernen sie sich von einander, bald nähern sie sich wieder, und bewirken dadurch vielen Schaden. Die Dochte müssen die rechte Stärke haben, theils damit sie sich gehörig spannen lassen, theils damit sie sich nicht umbiegen beim Verbrennen. 8 Fäden sind dazu hinreichend. Man thut gut, die Kerze etwa um 10° gegen die Verticale in der Ebene der Dochte zu neigen.

C. Electricität.

1. Einfluſs der Electricität auf die Phosphorescenz von Mineralien. Von *T. J. Pearsoll.*

*(Journ. of the royal institution. N. I., p. 77. *)*

Pearsoll, chemischer Assistent im Laboratorium der Royal Institution, lehrt im gegenwärtigen Aufsatze, Mineralien, welche durch Erwärmen gar nicht oder nur zum schwachen Phosphoresciren gebracht werden, mittelst Electricität in stärkere Phosphore zu verwandeln. Er gerieth darauf, als er die Wirkung eines electrischen Schlages, der über eine Varietät des Fluſsspathes, Chlorophan genannt, geleitet wurde, näher untersuchen wollte. Wurde ein electrischer Schlag über Fragmente oder Pulver von Fluſsspath geleitet, so zeigte sich an

*) Dieses Journal ist an die Stelle des eingegangenen *Quarterly Journal of sciences* getreten, und erscheint vom October 1830 an vierteljährig.

denselben ein helles, grünes Licht, und erschien so oft, als die Einwirkung des Schlages erneuert wurde, und zwar im verstärkten Maſse. Diese Wirkung führte ihn auf die Vermuthung, daſs selbst jene Mineralien, welche durch Calciniren ihre Phosphorescenz eingebüſst haben, durch einen electrischen Schlag sie wieder erlangen dürften. Um diese Vermuthung zu prüfen, wurde zuerst der Versuch mit einem sehr stark phosphorescirenden Stück Chlorophan gemacht, und dasselbe der Hitze ausgesetzt. Es sendete zuerst helles, bläulichgrünes, dann bei steigender Temperatur blaſsrothes, und als es in die Rothglühhitze kam, blaſsweiſses Licht aus, dann hörte aber alles Leuchten auf. Ein anderes Stück desselben Minerals wurde calcinirt, und verlor dadurch seine phosphorescirende Kraft ganz. Als aber ein Schlag aus einer Leidnerflasche von ungefähr 1 Q. Fuſs Armatur darüber geleitet wurde, erschien es mit grünem Lichte, und sendete dieses selbst später noch aus, nachdem es erwärmt worden war. Die Erwärmung wurde bei diesem und den folgenden Versuchen dadurch angebracht, daſs man das Mineral in ein Platinkapsel legte, es mit einem Uhrglas bedeckte, und unter dem Kapsel eine Weingeistflamme anbrachte.

Ein anderes Exemplar Chlorophan gab in der Hitze ein purpurrothes Licht von sich, verknisterte aber beim Calciniren so stark, daſs man kein einzelnes Stück von hinreichender Gröſse zu einem Versuch mit der Electricität davon gewinnen konnte. Die Bruchstücke wurden in eine Glasröhre gesammelt, drei electrische Schläge durch dieselbe geleitet, und hierauf erhitzt. Da sendeten sie Licht aus, und zwar phosphorescirte fast jedes Stück mit einer anderen Farbe, einige mit grüner, andere mit gelber, wiewohl das von Natur aus durch Hitze für Phosphorescenz empfänglich gemachte Mineral keine

dieser Farben zeigte. Ein zwar calcinirtes, aber nicht electrisirtes Stück zeigte sich beim Erwärmen durchaus nicht phosphorescirend.

Ein Chlorophan, der durch zu starke Einwirkung der Hitze seiner phosphorescirenden Kraft beraubt worden war, erhielt sie wieder durch einen electrischen Schlag. Wiederholte Schläge verstärkten die Phosphorescenz nach Maſsgabe ihrer Stärke und Anzahl. Ein solcher durch Hitze seiner Phosphorescenz beraubter Chlorophan, der selbst, nachdem er 8 Monate lang dem Tageslicht ausgesetzt war, sich nicht im mindesten erholt hatte, erschien während der Einwirkung eines electrischen Schlages mit grünlichem Lichte, dessen Intensität mit der Stärke des Schlages zunahm, und wurde endlich in der Hitze ein förmlicher Phosphor. Ein Krystall von rothem Fluſsspath verhielt sich im Allgemeinen auf dieselbe Weise.

Apatit verlor seine Phosphorescenz durch Calciniren, erhielt sie aber wieder, wenn man ihn electrisirte und dann erwärmte, und zwar in desto höherem Grade, je mehr electrische Schläge man anwendete. Bruchstücke eines Krystalls gaben aber ein besseres Resultat als eine gepulverte Masse.

Wenn diese Versuche beweisen, daſs Mineralkörper, welche von Natur aus durch Erwärmung phosphorescirend werden, und diese Eigenschaft durch die Hitze verloren haben, mittelst eines electrischen Schlages gleichsam wieder in ihren natürlichen Rang eingesetzt werden, so gibt es auch andere, die beweisen, daſs Körper, die von Natur aus nicht durch Wärme phosphorescirend werden können, dazu durch Electricität befähiget werden. Hier folgen einige derselben.

Eine farblose Varietät von Fluſsspath, die im zerriebenen Zustande beim Erwärmen keine Spur von Licht

bemerken liefs, sendete nach 6 Entladungen einer Leidnerflasche intensives rothes oder rothgelbes Licht aus.

Ein Krystall von kohlensaurem Kalk verhielt sich vor der Einwirkung der Electricität eben so in der Wärme, wie der vorhin genannte Flufsspath; als er aber in die Rothglühhitze gebracht, hierauf ein Stück davon in eine Glasröhre gegeben, und electrisirt worden war, zeigte er ein schönes röthliches Licht. Ein massives Stück desselben Krystalls zeigte aber selbst nach der Erhitzung und nach sechs electrischen Entladungen keine Spur von Licht.

Merkwürdig sind die Farbenänderungen, welche Flufsspath durch electrische Schläge erleidet. Man bemerkte nämlich bei Versuchen mit einigen weifsen, ins Gelbliche stechenden Exemplaren dieses Minerals, dafs sie durch den electrischen Strom bläulich werden. Doch erstreckt sich diese Farbenänderung nur auf die äufsere Oberfläche; bricht man nämlich ein solches Stück entzwei, so erscheint es an der Bruchfläche mit seiner natürlichen Farbe.

Diese Färbung durch den electrischen Schlag steht nun auch mit ihrer Lichtaussendung nach dem Erwärmen in genauer Verbindung. Von einem derben rothen Flufsspath, der durch Erhitzen weifs geworden war, wurden mehrere Stücke mit zwölf electrischen Schlägen behandelt, und nahmen dadurch eine lichtblaue Farbe an; wurden nun sowohl diese als andere nicht mit Electricität behandelte der Hitze ausgesetzt, um ihre phosphorescirende Kraft zu erregen, so trat diese Kraft nur an jenen Stücken hervor, und sendete blafsblaues Licht aus, welche die Farbenänderung erlitten hatten, die anderen blieben dunkel; ja solche Stücke zeigten sich gerade nur an jenen Stellen als Phosphore, wo die Farbenänderung eingetreten war.

So wie Flufsspathe, verhalten sich auch Diamanten. Sie konnten durch blofses Erhitzen ohne Einwirkung electrischer Schläge nicht zum Phosphoresciren gebracht werden, sendeten aber in der Wärme nach der Anwendung eines solchen Schlages alsobald ein blafsblaues Licht aus. Doch gibt es in dieser Beziehung unter den Diamanten merkliche Unterschiede. Einige geschliffene Diamanten sind weder von Natur aus Phosphore, noch werden sie es durch einen electrischen Schlag und durch Erwärmen, während andere schon ohne electrische Einwirkung durch die Wärme, wieder andere gar nur durch Electricität und Wärme zu Phosphoren werden. Amethyste, Saphire, Rubine, Granaten und viele andere Mineralkörper besitzen aber weder eine natürliche Phosphorescenz, noch können sie dieselbe durch Kunst erlangen, vielleicht gibt es aber noch ein anderes Mittel, ihre phosphorescirende Kraft zu erregen.

2. Über Zersetzung der Metallsalze durch die *Volta*'sche Säule. Von *Matteucci*.

(Bibl. univ. Oct. 1830, p. 138)

Die Reduction vieler Metalloxyde durch Wasserstoff ist bereits hinlänglich bekannt, eben so, dafs ein electrischer Strom ein Salz in zwei Theile zerlegt, und dafs Metallsalze eine Zerlegung in das Metalloxyd und in die Säure, oder den dieselbe in electro-chemischer Hinsicht vertretenden Stoff erleiden. Dafs endlich sich bei wässerigen Salzlösungen die zerlegende Kraft der Electricität auch auf das Wasser erstrecke, ist nichts Neues. In so ferne würde man es als keine Erweiterung der Wissenschaft ansehen dürfen, wenn Jemand die Entdeckung machte, dafs am negativen Pole einer ihren Strom durch eine wässerige Metallsalzlösung sendenden electrischen Säule nicht ein Metalloxyd, sondern regu-

linisches Metall erscheine, ja das Factum selbst scheint für manche Metallsalzlösung, wie z. B. für Bleizucker, als längst bekannt angesehen zu seyn. Dessen ungeachtet liegt etwas Neues an diesem Factum, und gerade darauf macht *Matteucci* aufmerksam.

Der Wasserstoff wirket nämlich in der Regel nur bei hoher Temperatur als Reductionsmittel für Metalloxyde, im Kreise der *Volta*'schen Säule und für das gerade hervortretende Metalloxyd aber schon bei der gewöhnlichen Temperatur. Derselbe Gelehrte hat die angeführten Thatsachen ferner dazu benützt, um zu erfahren, ob sich Chlor- oder Jodsalze etc. durch Auflösung im Wasser ändern, und in Hydrochlorate, Hydrojodate etc. übergehen oder nicht. Er leitete nämlich den Strom einer Säule, der für sich selbst säuerliches Wasser nicht zu zersetzen vermochte, in eine Kupferchlorurlösung, und bemerkte, dafs der vom negativen Pole ausgehende Platindraht einen Überzug von metallinischem Kupfer erhielt, während sich am positiven Pole Gasblasen entwickelten. Silberdraht statt Platin genommen, überzog sich mit einer gelblichen Schichte, die hierauf violett wurde, und ohne Zweifel Silberchlorur war. Zink- und Eisenjodur zeigten ähnliche Phänomene. Daraus schliefst *Matteucci*, dafs die Chlor- und Jodsalze ihre Natur durch Auflösung im Wasser nicht ändern.

3. Über den Grund der *Volta*'schen Electricität. Von *Matteucci*.

(Ann. de Chim. etc. Tome 45, p. 106.)

Matteucci führt in einem an *Arago* gerichteten Schreiben von ihm angestellte Versuche an, die für die Theorie der *Volta*'schen Electricität oder des sogenannten Galvanismus ein gewichtiges Wort sprechen, und beweisen, dafs der Grund der Störung des electrischen

Gleichgewichtes zwischen zwei sich berührenden, heterogenen Körpern nicht in einer chemischen Wirkung, sondern in ihrer bloſsen Berührung liege, daſs aber eine etwa mit der Berührung gleichzeitig eintretende chemische Wirkung die Entwickelung der Electricität befördere, etwa so, wie sie die Wärme bei den thermoelectrischen Phänomenen begünstiget. Die Versuche bestanden in Folgendem:

Wurde eine Zinkplatte allein oder in Berührung mit Kupfer in reines, von aller Luft befreites, destillirtes Wasser getaucht, und selbst mehrere Stunden hindurch darin gelassen, so konnte man in demselben auch mit den empfindlichsten Reagentien keine Spur von Zink- oder Kupferoxyd bemerken; es fand also hierbei keine chemische Wirkung Statt. Wurde aber ein präparirter Froschschenkel in destillirtem, von der Luft befreitem Wasser gut gewaschen, um alle animalische Flüssigkeit zu entfernen, hierauf mit dem Nerv an eine Zinkplatte gehängt, die am Boden einer Gasplatte befestiget, am anderen Ende aber mit einem Kupferdraht leitend verbunden war, so erfolgten Zuckungen, sobald man den Frosch mit dem Kupfer berührte, die Glocke mochte atmosphärische Luft, reines Wasserstoffgas, Kohlenoxydgas, Kohlensäuregas, Sauerstoffgas enthalten oder ganz leer seyn, oder es mochten diese Gase trocken oder feucht angewendet werden. Es gibt also hier Electricitätsentwickelung ohne chemische Wirkung, und man kann den Erfolg des *Volta*'schen Fundamentalversuches nicht aus einer chemischen Wirkung des Sauerstoffes auf das Zink erklären. (Vergleiche Bd. VIII., S. 104 dieser Zeitschr.)

4. Über einige, die electromotorische Kraft der Metalle modificirende Umstände.

Von *St. Marianini.*

(Ann. de Chim. Tome 45, p. 28.)

Der unermüdete Forscher *Marianini* hat es sich zur Aufgabe gemacht, die Umstände, welche besonders nach *Larive's* Behauptungen der chemischen Theorie des Voltaismus günstig zu seyn scheinen, in nähere Untersuchung zu nehmen, und liefs die Resultate seiner Forschung in einer eigenen Denkschrift bekannt werden, die aus zwei Theilen besteht. Der erste Theil enthält Versuche über die Umstände, welche die electromotorische Kraft der Metalle modificiren, der zweite zeigt die Unzulänglichkeit der electro-chemischen Theorie zur Erklärung der Phänomene der sogenannten Berührungselectricität. Hier kann wegen Mangel an Raum nur vom ersten Theile die Rede seyn, vom zweiten wird im folgenden Hefte gehandelt werden.

Versuche über die Änderung der electromotorischen Kraft sind nicht neu; schon *Volta* wufste, dafs diese Kraft in Metallen durch chemische Veränderungen derselben modificirt wird, und dafs z. B. Schwefeleisen und Schwefelkupfer sich in dieser Beziehung ganz anders verhalten als Eisen und Kupfer für sich, dafs in Legierungen die electromotorische Kraft das Mittel hält zwischen der ihrer einzelnen Bestandtheile. Später sind noch mehrere Umstände, welche eine solche Veränderung hervorbringen, entdeckt worden, alle, meint *Marianini*, lassen sich auf oberflächliche Veränderungen im chemischen Zustande der Stoffe zurückführen. Hier ist von den vorzüglichsten derselben, nämlich vom Einflusse eines electrischen Stromes und der leitenden Flüssigkeit die Rede.

Es ist bereits bekannt, dafs ein Metall oder ein anderer guter Electricitätsleiter an electromotorischer Kraft gewinnt oder verliert, je nachdem die Electricität (nach der Ansicht der Unitarier) von diesem Körper in die Flüssigkeit übergeht oder umgekehrt, es mag dabei der Körper selbst zugleich als Erreger oder als blofser Leiter dienen. Man braucht, um sich davon zu überzeugen, keine *Volta*'sche Säule oder Batterie, sondern es reicht schon ein einziges Plattenpaar hin. Folgender Versuch zeigt dieses besonders deutlich: Man nehme zwei kleine, völlig homogene Silberplatten, stelle jede derselben in ein Glas mit Weingeist, und setze die hervorragenden Theile derselben mit einander in Berührung. In eines dieser Gläser tauche man eine Bleiplatte auf einige Q. Linien ein, in das andere eine Kupferplatte, sorge aber dafür, dafs keine derselben die Silberplatte berühre, sondern nur die Blei- und Kupferplatte mittelst eines leitenden Drahtes verbunden seyen, und so durch sie ein electrischer Strom entstehe, welcher durch die Silberplatten gehen mufs. Nimmt man, nachdem der Strom einige Secunden angehalten hat, die Silberplatten heraus, verbindet sie mit den Drähten eines Multiplicators, und taucht sie dann in eine schwache Salzlösung, so zeigt die Ablenkung der Magnetnadel, dafs auch die zwei Silberplatten als Electromotoren wirken, mithin durch den Strom, welcher in eine derselben aus der Flüssigkeit eintrat, während er von der andern in die Flüssigkeit überging, heterogen geworden sind. Solche Änderungen bewirkt auch eine electrische Spannung, jedoch nur von sehr geringem Grade; sollen sie sehr merklich seyn, so mufs man mit der Spannung von mehreren Plattenpaaren experimentiren. Biegt man, sagt der Verfasser, einen etwa 1 Mill. dicken Silberdraht bogenförmig, und setzt ihn abwechselnd der Einwirkung

der zwei Electromotoren eines Becherapparates von 100 Elementen über eine Stunde lang aus, so findet man, wenn man ein Ende des Drahtes in die Flüssigkeit des positiven, das andere in die des negativen Poles desselben Apparates taucht, an diesem Drahte mittelst eines 200 Mal verstärkenden Condensators eine Spannung, die wenigstens 5° des *Volta*'schen Electrometers gleich kommt. Gold- und Platindrähte verhalten sich auf gleiche Weise. Wenn also *La Rive* an solchen Metallen keine Spannung bemerkt hat, so kommt dieses gewifs nur davon her, dafs er nicht gehörig empfindliche Prüfungsmittel angewendet hat. Als ein solcher Silberdraht bei einer Säule von 20 mit Meerwasser aufgebauten Elementen 48 Stunden lang als Leitungsdraht gedient hatte, stand das mit dem Pol verbunden gewesene Ende desselben dem Zinne an electromotorischer Kraft so weit nach, dafs es, mit demselben zu einem Element verbunden, bei Anwendung von Schwefelsäure mittelst eines Multiplicators eine Ablenkung der Nadel von 5° zeigte. Die Kraft des anderen Endes kam der des Goldes nahe. Wurde derselbe Draht abwechselnd 24 Stunden lang der Einwirkung ähnlicher Apparate ausgesetzt, so sank seine electromotorische Kraft gar unter die des Zinkes, und ein Element aus demselben und Zink bewirkte unter obigen Umständen eine Ablenkung von 15°, und der Draht erschien als Träger der positiven Electricität; nach fünf bis sechs Eintauchungen verlor sich die Ablenkung, und trat endlich in entgegengesetzter Richtung auf. Aus öfteren Wiederholungen dieses Versuches ergaben sich folgende Gesetze:

Je öfter man Silber, Gold oder Platin der Einwirkung electrischer Ströme aussetzt, desto leichter wird ihre relative electromotorische Kraft vermindert, so, dafs man sie anfangs nur durch stundenlange Einwir-

kung eines Stromes unter das Zink herabbringen kann, während später einige Minuten dazu hinreichen. Durch Abwischen oder Abtrocknenlassen erhalten sie wieder, was sie verloren. Blei und Zinn, die an und für sich schon dem Zinke nahe stehen, werden leicht unter dasselbe herabgebracht. Doch steht die Leichtigkeit, mit welcher dieses überhaupt bewirket wird, nicht im Verhältnisse mit dem Abstande des Metalles vom Zink in der electromotorischen Reihe. So steht Eisen dem Zinke von Natur aus näher als Silber, und doch hält es bei ersterem schwerer, seine electromotorische Kraft der des Zinkes unterzuordnen, als bei letzterem. Zinn und Kupfer, die vom Zink viel weiter abstehen als Eisen, werden viel leichter electro-positiv gegen Zink. Merkwürdig ist es, dafs nach des Verfassers Beobachtung ein Metall, das man, nachdem es einige Zeit einem electrischen Strome ausgesetzt war, um es unter das Zink herabzubringen, gut abtrocknet und dann auf seine electromotorische Kraft untersucht, nicht blofs über dem Zinke steht, sondern auch über jenen Metallen, denen es vor der Einwirkung des Stromes vorging. Ein wohl polirter, mit Zink zu einem Element verbundener Messingdraht gab eine Ablenkung der Magnetnadel von 10°, als er aber $^1/_4$ Stunde dem Strome einer Säule von 50 Plattenpaaren ausgesetzt war, eine Ablenkung von 10° nach entgegengesetzter Richtung; gleich nach diesem Versuche aber bewirkte er wieder eine Ablenkung von 20° nach der ersteren Richtung. Ein solcher nicht polirter Draht bewirkte anfangs mit Zink eine Ablenkung von 24°, nachdem ein electrischer Strom $^1/_2$ Stunde auf ihn gewirkt hatte, eine solche von 90°. Kupferdrähte gaben ähnliche Wirkungen.

Wenn bei solchen Versuchen Drähte längere Zeit hindurch dem Einflusse eines electrischen Stromes aus-

gesetzt waren, so stieg die Flüssigkeit, in welche der Draht getaucht war, gleichsam wie durch Capillarität am hervorstehenden Drahtstücke hinauf, und änderte so auch die electromotorische Kraft des Drahtes an dieser Stelle, jedoch in geringerem Grade, als es mit dem eingesenkten Theile der Fall war.

So viel über den Einfluſs electrischer Ströme auf die electromotorische Kraft. Bekanntlich erleiden Electromotoren durch die Flüssigkeit häufig Veränderungen, und diese stehen auch mit einer Modification ihres electromotorischen Verhaltens in Verbindung. So z. B. wird diese Kraft am Eisen in Salpetersäure vermindert, am Zinn hingegen bedeutend gesteigert. Überhaupt wird nach früheren Versuchen *Marianini's* diese Kraft am Eisen, Zinn, Blei und Zink durch Berührung mit Salzauflösungen oder verdünnten Säuren geschwächt, spätere, um deren Aufzählung es sich hier handelt, zeigen auch an anderen Metallen ein ähnliches Verhalten.

Zwei Kupferplatten in Wasser mit $^1/_{200}$ Schwefelsäure getaucht, und mit den Drähten eines Multiplicators verbunden, bewirkten eine Ablenkung der Magnetnadel, und es zeigte sich immer die zuerst oder die zuletzt eingetauchte positiv-electrisch, je nachdem die eine oder die andere weniger oxydirt war. Blieben beide etwa $^1/_2$ St. in der Flüssigkeit, und wurde dann eine heraus genommen, abgetrocknet und darauf wieder eingesenkt, nachdem sie mit einer anderen zu einem Elemente verbunden war, so erschien aus der Ablenkungsrichtung der Nadel immer erstere negativ-electrisch. Blieb diese hierauf in der Flüssigkeit, und wurde die andere abgetrocknet, so trat gleich der entgegengesetzte electrische Zustand ein. Statt die eine Platte abzutrocknen, kann man sie auch nur ein wenig aus der Flüssigkeit herausheben, um ungleiche Einsenkungsflächen zu erhalten. Wird

sie hierauf wieder in die alte Tiefe eingetaucht, so erscheint sie schon mehr negativ-electrisch als vorhin.

Diese Versuche gelingen bei Kupfer und Messing auch mit anderen Flüssigkeiten als mit Schwefelsäure, und zwar mit einer starken Kochsalzlösung (mit $^1/_{10}$ Salz), mit verdünnter Salpetersäure, nicht aber mit einer schwachen Kochsalzlösung. Man kann endlich diese Versuche noch auf eine andere Weise abändern, und statt eine Platte einige Zeit hindurch der Luft, wenigstens zum Theile, auszusetzen, beide gleiche Zeit hindurch in zwei verschiedenen Flüssigkeiten lassen, sie hierauf herausnehmen, und in einer dritten Flüssigkeit zu einem Elemente verbinden. Da erscheint immer die in der minder leitenden Flüssigkeit gewesene Platte negativ-electrisch, und zwar wird der electrische Strom desto intensiver, je gröfser der Unterschied im Leitvermögen der betreffenden Flüssigkeiten ist. Dieses zeigten Versuche mit Zinn, Zink und anderen Electromotoren, besonders aber mit solchen, die ein wenig oxydirt sind. Dieser Umstand führt auf die Vermuthung, die genannten Phänomene rühren überhaupt von einem, wenn auch nur geringem, Unterschiede im Oxydationszustande der gebrauchten Platten ganz oder zum Theile her, um so mehr, da *Marianini* die Erfahrung gemacht hatte, dafs zwei Zinkplatten, an deren einer ein kleines Stück polirt war, eine viel gröfsere Ablenkung der Magnetnadel bewirkten, als sie ohne diese Vorbereitung thaten. Allein wenn dieser Verdacht gegründet ist, so mufs die Wirkung der Heterogeneität deutlicher hervortreten, wenn man, statt einen Theil mehr als den anderen zu poliren, ein Stück von einem anderen Metall daran löthet. Wie dieses die Erfahrung bestätiget, zeigt folgender Versuch: Werden zwei rechtwinkelige, 2 Centim. breite, 9 C. lange, mit einem Zinkstück von 7 Q. Mill.

Oberfläche versehene Kupferplatten an der Seite, wo sich das Zink befindet, 4 Centim. tief in Wasser getaucht, und die hervorragenden Theile mit den Multiplicatordrähten verbunden, so tritt keine Ablenkung der Magnetnadel ein. Wird aber eine der Platten aus der Flüssigkeit gehoben, abgewischt und hierauf wieder eingetaucht, oder gar nur etwas heraus gehoben, jedoch so, dafs das Zink in der Flüssigkeit bleibt, so ergibt sich eine Ablenkung von 10°. Verfährt man eben so mit der anderen Platte, so erhält man eine eben so grofse aber entgegengesetzte Ablenkung. Das Zink kann diese Ablenkungen nicht hervorgebracht haben, weil man bei so kleinen Stücken in reinem oder nur wenig gesalzenem Wasser keine so grofse Wirkung erwarten darf. Bringt man an einer Bleiplatte auf ähnliche Weise ein Zinkstück an, so erhält man bei einem gleichen Verfahren eine noch gröfsere Ablenkung; minder grofs wird sie aber, wenn man das Kupferstück statt mit Zink, mit Blei, Zinn oder Eisen bewaffnet. Man kann demnach als allgemeines Gesetz aufstellen, dafs alle Metalle, deren Oberfläche man in electrischer Beziehung dadurch heterogen macht, dafs man ein Stück eines anderen, in der Spannungsreihe demselben nachstehenden, daran befestiget, die besprochenen Phänomene hervorbringen. Man braucht aber zur Erzeugung der genannten Erscheinungen nicht gerade solche Metalle anzuwenden, die durch Kunst heterogen gemacht worden sind, sondern man bewirket dasselbe auch mit Metallen, die von Natur heterogen sind.

Der Grund dieses ganzen Verhaltens liegt nach *Marianini* darin: 1) Dafs der electrische Strom, den ein Plattenpaar liefert, wobei der negativ-electrische Theil die gröfsere Oberfläche hat, stärker ist, als derjenige, den ein Plattenpaar gibt, wobei das entgegen-

gesetzte Verhältnifs Statt findet. 2) Dafs ein electrischer Strom die electromotorische Kraft eines Metalles steigert oder herabsetzt, je nachdem er von dem Metalle in die Flüssigkeit übergeht oder umgekehrt. Wird nämlich ein Metallplättchen in eine Flüssigkeit so weit gesenkt, dafs der eingetauchte Theil an electromotorischer Kraft dem Reste nachsteht, so tritt alsogleich ein Strom ein, der von der positiven Oberfläche durch die Flüssigkeit zur negativen übergeht, und dadurch die relative electromotorische Kraft zu vermindern sucht. Taucht man nun in dieselbe Flüssigkeit ein dem ersteren vollkommen gleiches Plättchen ein, so hat dieses eine grössere electromotorische Kraft, und erscheint gegen das erstere negativ-electrisch. Der Verfasser erklärt hieraus auch, warum selbst die zum Theil aus der Flüssigkeit gehobene, nicht abgewischte und dann wieder eingesenkte Platte negativ-electrisch erscheint, obgleich dieses auch im geringeren Grade Statt hat, als wenn man die herausgehobene Platte abwischt. Die dünne Flüssigkeitsschichte, die an der Platte hängen bleibt, leitet nämlich nur schwer und langsam die Electricität von der positiven Seite auf die negative, und letztere erlangt fast die ganze verlorne electromotorische Kraft wieder.

Eine natürliche Folge des Gesagten ist auch, dafs von zwei ungleich tief in eine Flüssigkeit getauchten Platten die tiefer eingetauchte sich electro-negativ zeigen mufs, und dieses bestätiget auch die Erfahrung, welche *Marianini* mit zwei Kupferplatten, an denen kleine Zinkmassen befestiget waren, anstellte. Da die Wirkung der Flüssigkeit auf die electromotorische Kraft nicht augenblicklich Statt hat, sondern mit der Zeit bis zu einer bestimmten Grenze wächst, so mufs durch zwei in hinlänglichem Zeitabstande hinter einander einge-

tauchte Metallplatten von gleicher Beschaffenheit ein electrischer Strom erregt werden können, dessen Intensität desto gröfser ist, je später die eine Platte nach der anderen eingetaucht wurde. Auch dieses bestätiget die Erfahrung.

Bei den vorhergehenden Versuchen wurde an die Kupferplatte Zink, mithin an die negative ein positiver Körper befestiget. Man sollte nun erwarten, dafs wenn man ein electro-positives Metall, z. B. Zink, durch ein kleines Stück eines negativen, z. B. Kupfer, gegen ein anderes heterogen macht, auch ähnliche Phänomene, nur mit entgegengesetztem Strome, Statt finden werden. Allein dieses tritt entweder gar nicht oder nur in einem sehr schwachen Grade ein. Der Grund davon liegt darin, dafs ein electrischer Strom (im Sinne der Unitarier) die electromotorische Kraft beim Übergange von der Flüssigkeit in das Metall leichter ändert, als wenn er die entgegengesetzte Richtung nimmt.

Auch chemische Wirkungen der Flüssigkeit auf das Metall können unabhängig von electrischen Strömen die electromotorische Kraft desselben ändern. Zwei wohl polirte Kupferplatten zeigen in verdünnter Säure keine Spur von dem hier besprochenen Phänomen, wohl aber in Ammoniak, und doch müfste dieses sich in der letzteren Flüssigkeit wegen ihrer schlechteren Leitungsfähigkeit später zeigen, als in der ersteren, wenn es von einer zufälligen Heterogeneität der Plattenflächen herrührte. Zwei reine Zinnplatten gleichzeitig in verdünnte Salpetersäure oder in Ammoniak getaucht, zeigen keine Spur eines electrischen Stromes. Nimmt man aber eine heraus, wäscht sie ab, und senket sie dann wieder ein, so zeigt sich alsogleich ein Strom, aus dem hervorgeht, dafs die unberührt gebliebene Platte electro-negativ ist. Diese Electricität hängt aber nicht etwa

von der Berührung zwischen Zinn und Säure ab, weil sonst beide Platten auf gleiche Weise electrisch werden müfsten, weil dieser Strom desto stärker wird, je länger die Platten in der Flüssigkeit bleiben, ferner weil diese Platten selbst noch dann einen Strom in derselben Richtung erzeugen, wenn man sie aus der ersteren Flüssigkeit heraus nimmt und in eine andere taucht, und endlich weil man gerade entgegengesetzte Ströme erhält, wenn man statt der Salpetersäure concentrirte oder verdünnte Schwefelsäure als leitende Flüssigkeit gebraucht.

Man darf auch nicht glauben, dafs diese Wirkung von einer chemischen Affection der Metalle abhänge; denn wäre dieses, wie könnte denn eine Zinnplatte selbst dann noch gegen eine andere negativ-electrisch seyn, nachdem man sie mit Tuch abgetrocknet hat? Endlich müfste sich ja die durch chemische Wirkung entstandene Electricität ins Unmerkliche verlieren, wenn man das aus der Flüssigkeit hervorragende Stück der Zinnplatte mit einem sehr grofsen Leiter in Verbindung setzt. *Marianini* hat aber die vorhin besprochenen Phänomene selbst dann noch bemerkt, als er das genannte Stück der Zinnplatte mit dem Meere communiciren liefs. Aus diesen Gründen sieht es *Marianini* als bewiesen an, dafs Flüssigkeiten die electromotorische Kraft der in sie eingetauchten Metalle ändern, dafs diese Änderungen von partiellen Strömen abhängen können, die durch die Heterogeneität der Flächen der gebrauchten Metalle erzeugt werden, dafs aber selbst ohne solche Heterogeneitäten dieselben Änderungen eintreten können.

5. Versuche mit einem Torsions-Multiplicator. Von *Ritchie*.

(Journ. of the royal institution. N. I., p. 29.)

Im IX. Artikel war von der Anwendung elastischer Glasfäden auf einen Torsions-Multiplicator von *Ritchie* die Rede, hier sollen die Versuche näher erörtert werden, welche mit diesem Instrumente angestellt wurden, in so weit sie dazu geeignet sind, sowohl die Brauchbarkeit desselben zu zeigen, um die bereits schon bekannten Gesetze der Electricität zu bestätigen, oder Bedenklichkeiten gegen fast allgemein gemachte Behauptungen zu erregen, und dadurch vielleicht auf den rechten Weg zu führen.

Einer dieser Versuche hatte zum Zweck, die Abhängigkeit der Stärke des electrischen Stromes eines Electromotors von der Gröfse des in der Flüssigkeit befindlichen Theiles der Electromotoren zu zeigen. Zu diesem Ende wurden eine rechtwinkelige Kupfer- und Zinkplatte von 1 Z. Breite und 8—9 Z. Länge in einzelne Quadratzoll abgetheilt, in eine Rahme befestiget, um sie stets in einerlei Entfernung zu erhalten, mit dem Multiplicator leitend verbunden, und dann Zoll für Zoll in die leitende Flüssigkeit getaucht. Die zur Einstellung der Nadel in ihre natürliche Lage nöthigen Torsionen, mithin auch die Kräfte des electrischen Stromes, verhielten sich wie die eingesenkten Flächen. Es wird demnach durch diesen Versuch das schon von *Marianini* aufgestellte Gesetz bestätiget.

Zum Behufe eines anderen Versuches wurde ein 2 Zoll breiter und nahe 4 Zoll langer Kupferstreifen so zusammengebogen, wie er bei *Wollaston's* Trogapparat gebraucht wird, an der inneren Seite mit Kitt überzogen, dann mit einem Zinkstreifen von der Gröfse des

zusammengebogenen Stückes verbunden, so dafs jeder Zinkfläche eine Kupferfläche gegenüber stand. Als dieser Apparat mit dem Multiplicator in Verbindung gesetzt und in eine schwache Säure getaucht war, brauchte man, um die ablenkende Kraft aufzuheben, 1000 Windungen des Glasfadens. Wurde aber derselbe Versuch wiederholt, nachdem man eine Zink- und eine Kupferfläche mit Kitt isolirt hatte, so betrug die zu demselben Zwecke nöthige Windung nur 500°. Dieser Versuch bestätiget wohl das bereits allgemein angenommene Gesetz der Zunahme des electrischen Stromes mit der Fläche des negativen Electromotors, steht aber mit einem Versuche *Marianini's* im Widerspruche, bei welchem selbst ein Isoliren der einander zugekehrten Metallflächen des Electromotors keine Verminderung des Stromes zur Folge hatte. Es müssen demnach weitere Versuche diese Sache erst in ein reines Licht setzen.

Ein fernerer Versuch hatte zur Absicht, den Einfluſs der Dicke des flüssigen Leiters auf den electrischen Strom zu bestimmen. Es wurde in einem hölzernen Troge eine 2 Quadratzoll haltende Zink- und eine eben so grofse Kupferplatte so angebracht, dafs man dieselben in verschiedene genau bestimmbare Entfernungen von einander stellen konnte, der Zwischenraum mit einer leitenden Flüssigkeit gefüllt, die Platten mit dem Multiplicator verbunden, und die ablenkende Kraft bei verschiedenem Abstande der Platten von einander gemessen. Es zeigte sich für die Abstände 1, 4, 9 die ablenkende Kraft gleich 3, 2, 1, mithin das Gesetz, dafs sich die Wirkungen des electrischen Stromes verkehrt wie die Quadratwurzeln der Dicke des flüssigen Leiters verhalten. Dieses Gesetz stimmt mit dem von *Cumming* aufgestellten überein, widerspricht aber *Fechner's* Behauptung, welcher, wie es scheint, doch

sorgfältige Versuche zum Grunde liegen, dafs die Stärke des Stromes mit der Dicke des flüssigen Leiters im *einfachen* verkehrten Verhältnisse stehe. Nach *Ritchie's* Gesetz wäre demnach der Vortheil des näheren Aneinanderrückens der Platten eines Electromotors nicht gar grofs, und könnte sogar durch anderweitige Nachtheile überwogen werden, womit doch auch wieder die Erfahrung nicht übereinstimmen will.

Endlich handelte es sich noch um die Bestimmung des Gesetzes der Leitfähigkeit von Drähten bei verschiedener Länge und Dicke derselben. Da fand *Ritchie* wieder Gesetze, die von den bis jetzt als richtig anerkannten abweichen. Es ergab sich ihm nämlich das Resultat, dafs die Leitungsfähigkeit in einem gröfseren Verhältnisse zunimmt als die Dicke der Drähte, und dafs sie im verkehrten Verhältnisse mit der Quadratwurzel ihrer Länge wächst, während andere Versuche gelehrt haben, dafs die Leitfähigkeit im geraden Verhältnisse der Dicke und im verkehrten der Länge der leitenden Drähte stehe.

D. Mitchell's Methode, Cautschouc zu bearbeiten.

Der Physiker und Chemiker braucht sehr oft theils zum Verbinden theils zum Auffangen oder Aufbewahren der Gase Blasen von Schweinen oder Rindern. Die Schwierigkeit, sie in hinreichender Gröfse zu erhalten, und sie so zu reinigen, dafs sie sich, ohne einen üblen Geruch anzunehmen und ihre Haltbarkeit zu verlieren, längere Zeit aufbewahren lassen, die Steifheit und Sprödigkeit, welche sie beim Austrocknen bekommen, und endlich die Leichtigkeit, mit welcher sie von Gasen angegriffen werden, mufsten natürlich schon lange den

Wunsch nach einem von jenen Mängeln freien Surrogate erregen. Es kann einem zwar nicht entgehen, dafs Cautschouc zu einem solchen Stellvertreter wie geschaffen sey, wenn man es nur in dünnen Blasen oder Häutchen zu bearbeiten im Stande ist. Diese Bearbeitung lehrt *Mitchell* im 14. Hefte des *Quarterly Journal*. Man weifs zwar seit Langem, dafs sich eine Cautschoucblase durch anhaltendes Kochen in Wasser so erweicht, dafs man sie nach der Hand leicht bis zu einer ziemlichen Gröfse aufblasen kann, allein man erhält sie durch dieses Mittel doch nur schwer von solcher Dünne, dafs die Wände nicht bei etwas geringer Temperatur steif werden. Nach *Mitchell* läfst sich aber eine solche Blase ins Unglaubliche ausdehnen, wenn man sie in mäfsig starkem Schwefeläther 10 — 24 Stunden bei der gewöhnlichen Temperatur liegen läfst, dann aufbläst und trocknet. Man hat es sogar in seiner Macht, derlei Blasen von gleichförmiger oder ungleichförmiger Dicke zu erhalten, ihnen ihre Contractibilität zu belassen oder sie ihnen gröfstentheils zu benehmen. Bläst man nämlich rasch hinein, und treibt sie schnell aus einander, so erfolgt die Dehnung ungleichförmig; thut man das Gegentheil, und macht noch dazu mehrere Pausen, so erfolgt die Ausdehnung gleichförmig. Soll die Blase ihre Contractibilität behalten, so läfst man die eingeblasene Luft nach einer Stunde wieder heraus, soll sie sich aber nicht mehr auf ein kleines Volumen zusammenziehen, so läfst man sie im aufgeblasenen Zustande trocknen. Auf solche Weise werden Blasen so dünn, dafs sie durchsichtig erscheinen, und mit Wasserstoffgas gefüllt in die Höhe steigen. *Mitchell* behauptet, eine Blase (von nicht angegebener ursprünglicher Gröfse) auf 5 F. Durchmesser gebracht zu haben. Eine durch Äther erweichte Blase läfst sich leicht über eine beliebige Form

treiben, und nimmt dieselbe dann bleibend an; selbst Stücke von gewöhnlichen verkäuflichen Blasen lassen sich in diesem Zustande dehnen, zu Schnüren ausziehen oder zu feinen Häutchen strecken.

Verfasser dieses hat *Mitchell's* Methode vollkommen zweckmäfsig befunden, und kann sie aus eigener Erfahrung Jedermann empfehlen; nur warnt er vor jenen Blasen, die von aufsen eingedrückte Zeichnungen enthalten, weil sie an den bezeichneten Stellen nach dem Erweichen beim Dehnen Risse bekommen.

Verbesserung.

Seite 81, Zeile 5, soll es statt *Selensäure* heifsen: *Schwefelsäure.*

Meteorologische Beobachtungen. December 1830.

Der Beobachtungsort liegt 101.7 W. F. über dem mittlern Spiegel der Donau.

Tag.	Um 8 Uhr früh.			Um 3 Uhr Nachmittag.			Um 10 Uhr Abends.			Witterung.
	Barometer o° R.	Thermometer.	Wind.	Barometer o° R.	Thermometer.	Wind.	Barometer o° R.	Thermometer.	Wind.	
	Paris. Z.	Grad R.		Paris. Z.	Grad R.		Paris. Z.	Grad R.		
1	27.597	1.0	OSO. mitt.	27.598	3.0	SO. mittelm.	27.625	1.0	SO. schwach.	Trüb, Nebel, Regen.
2	27.604	1.0	SO. schwach.	27.563	2.0	SO. schwach.	27.547	0.5	SO. schwach.	Trüb.
3	27.475	1.2	OSO. mitt.	27.431	1.2	SO. stark.	27.425	0.4	SO. mittelm.	Trüb.
4	27.398	1.0	SO. mittelm.	27.388	1.0	SO. schwach.	27.392	0.3	SO. mittelm.	Trüb.
5	27.402	1.0	O. still.	27.384	2.0	OSO. schw.	27.396	1.0	SO. schwach.	Trüb, Schnee.
6	27.261	2.0	SO. schwach.	27.184	4.0	SO. schwach.	27.160	1.0	SO. schwach.	Sonne mit Wolken.
7	27.115	3.4	SO. schwach.	27.105	4.2	SSO. schw.	27.111	3.0	SO. schwach.	Trüb.
8	27.103	5.0	SSO. still	27.139	5.0	SSO. schw.	27.182	1.8	SSO. schw.	Sonne mit Wolken.
9	27.189	1.2	WSW. still.	27.061	3.0	SO. schwach.	26.944	1.0	SO. still.	Sonne mit Wolken.
10	26.847	8.0	SSO. stark.	26.895	9.0	SSO. schw.	26.948	5.5	W. schwach.	Sonne mit Wolken.
11	27.170	5.0	W. schwach.	27.201	8.5	SO. schwach.	27.214	4.0	W. schwach.	Sonne mit Wolken.
12	27.259	3.0	S. still.	27.145	5.2	SO. schwach.	27.168	3.5	OSO. schw.	Trüb.
13	27.279	3.0	WNW. stark.	27.416	3.0	WNW. mitt.	27.568	1.0	NW. mittelm.	Sonne mit Wolken.
14	27.722	1.0	NW. schw.	27.736	1.0	NW. mittelm.	27.776	0.0	NW. mittelm.	Trüb.
15	27.770	— 1.0	NW. stark.	27.759	1.0	NW. stark.	27.758	— 0.5	NW. mittelm	Trüb, Schnee.
16	27.687	— 1.0	WSW. mitt.	27.704	0.0	WNW. schw.	27.668	1.0	W. schwach.	Trüb, Regen.
17	27.505	1.0	W. still.	27.514	2.0	SO. schwach.	27.365	1.0	SO. schwach.	Trüb.
18	27.337	0.0	WNW. schw.	27.352	0.0	WNW. stark	27.408	— 1.0	WNW. mitt.	Trüb.
19	27.428	— 1.0	WSW. stark.	27.577	0.0	WNW. schw.	27.488	— 1.0	NW. schw.	Trüb.
20	27.180	— 1.0	NW. schw.	26.980	1.0	SO. schwach.	26.941	1.0	SO. schwach.	Sonne mit Wolken.
21	27.098	1.0	WNW. schw.	27.102	2.5	W. schwach.	27.251	1.5	WNW. schw.	Sonne mit Wolken.
22	27.431	1.0	W. schwach.	27.364	3.3	WNW. schw.	27.313	— 1.0	NW. schw.	Sonne mit Wolken.
23	27.179	— 2.0	W. schwach.	27.034	4.0	SSO. schw.	27.072	— 1.8	SO. still.	Trüb, Schnee.
24	27.185	— 1.8	SO. schwach.	27.034	1.0	SO. mittelm.	26.816	2.0	SO. mittelm.	S. m. W., NachtsSchnee
25	26.785	6.0	SSO. mitt.	26.764	8.0	SSO. mitt.	26.823	2.5	W. mittelm.	Schnee, trüb.
26	26.856	— 4.8	W. stark.	27.177	— 2.5	W. mittelm.	27.222	— 3.0	W. schwach.	Sonne mit Wolken.
27	27.132	— 4.0	W. schwach.	27.146	— 1.8	S. still	27.249	— 5.0	O. schwach.	Nebel.
28	27.252	— 2.0	S. still.	27.167	— 1.0	NW. schw.	27.176	— 3.0	WSW. schw.	Sonne mit Wolken.
29	27.350	4.0	W. stark.	27.571	5.2	W. schwach.	27.636	0.5	W. schwach.	Trüb, Regen.
30	27.575	1.0	S. schwach.	27.518	1.2	SSO. schw.	27.478	0.5	W. schwach.	Trüb, Regen.
31	27.439	1.2	WNW. schw.	27.459	2.0	N. schwach.	27.378	1.0	NNW. schw.	
Mittel	27.310	1.13		27.305	2.76		27.338	0.67		

ZEITSCHRIFT
FÜR
PHYSIK UND MATHEMATIK.

I.
Über Lebensversicherungen;
von
J. J. Littrow.

Die Einrichtung, durch welche Jeder seinen Nachkommen, seinen Freunden oder nächsten Verwandten eine gröfsere und mehr gesicherte Summe hinterlassen kann, als diefs durch blofse einfache Ersparung möglich ist, gehört ohne Zweifel zu den wohlthätigsten Erfindungen der menschlichen Gesellschaft, und es gibt kein wahrhaft gebildetes Volk der neueren Zeiten, das nicht auf dieselben seine besondere Sorgfalt verwendet hätte. Die vorzüglichsten unter diesen Einrichtungen sind die sogenannten Witwen- und Waisen-Anstalten, die den rechtlichen Mann, den Gatten und den Vater, die beiden Hauptmomente der menschlichen Gesellschaft, in unmittelbaren Anspruch nehmen, und indem sie der Verarmung der Familien und der Vernachlässigung der Erziehung entgegen arbeiten, die zwei vorzüglichsten Quellen der Demoralisation des Volkes verstopfen, und daher, weit entfernt, als eine blofse Privatsache betrachtet zu werden, vielmehr als eine öffentliche, das Gesammtwohl betreffende Angelegenheit behandelt werden sollten. So wie aber diese Institute unter allen Versorgungsanstalten die wichtigsten sind, so sind sie auch ohne Zweifel die complicirtesten, und

eben dadurch die unsichersten, da sie von dem Leben zweier, die Waisenanstalten sogar von dem Leben dreier Menschen abhängen, deren der eine gewöhnlich ein sehr jugendliches Alter hat, für welches letzte alle unsere Sterblichkeitstafeln gewifs noch sehr grofser Verbesserungen bedürfen. Vielleicht liegt darin einer der Gründe, welche diese Institute, wenigstens bei uns, so sehr gefährden, dafs sie gewöhnlich schon in ihren ersten Jahren ein sieches Leben führen, und ihrer nur zu frühen Auflösung so schnell entgegen eilen.

Anders verhält es sich mit den sogenannten Lebensversicherungs-Anstalten, die nur von dem Leben einer einzigen Person abhängen, und bei welchen daher die Berechnungen viel einfacher, und die Ausführung zugleich viel sicherer ist. In dem practischen England haben diese Life-Assurances alle anderen Anstalten dieser Art gleichsam verdrängt, und blofs in London zählt man derselben bereits über vierzig, von welchen viele mehrere Tausende von Mitgliedern zählen, und über sehr beträchtliche Summen disponiren. So besitzt die Crown-Society ein Stammcapital von 10 Millionen unserer Silbergulden, die Rock- und Guardian-Society 20 Millionen, und die Alliance 50 Millionen. Mehrere von ihnen bestehen schon seit einer grofsen Reihe von Jahren, und erfreuen sich noch immer ihres Wohlstandes und des mit jedem Jahre wachsenden Vertrauens ihrer Committenten. So ist die Equitable Society bereits 70, die Royal Exchange 109, die Union 117, und die Amicable-Society 125 Jahre alt, und sie gehören noch jetzt zu den besten Anstalten dieser Art, die man in England in so grofser Anzahl hat. Bei uns im Gegentheile ist diese Gattung von Versorgungsanstalten noch beinahe gänzlich unbekannt, daher es vielleicht Manchen nicht unwillkommen seyn mag, sie hier näher erwähnt

zu finden, wobei ich mich übrigens auf die Hauptsache, auf die Berechnung dieser Anstalten, beschränke, und die übrigen mehr der practischen Ausführung angehörenden Einrichtungen einem anderen Orte vorbehalte.

Die wesentliche Einrichtung dieser Institute, wodurch sie sich vor den übrigen Versorgungsanstalten unterscheiden, besteht darin, dafs die Casse bei dem Tode des Mitgliedes eine *bestimmte Summe als Capital*, also nur ein Mal, aber ohne Ausnahme, *bezahlen mufs*, während sie z. B. bei Pensionen für Witwen und Waisen eine bestimmte Summe *jährlich* zahlt, und nur an eine *bestimmte Person* zahlt, und, wenn diese Person vor der Zeit stirbt, gar nichts zahlt, u. s. w. In den Lebensversicherungs-Anstalten im Gegentheile erhält Derjenige, der den von der Casse gegebenen Versicherungsschein bei dem Tode des Mitgliedes vorlegt, die in dem Vertrage festgesetzte Summe als Capital in einer einmaligen Zahlung; dieser Vorzeiger mag die Witwe, oder der Sohn, oder irgend ein Freund des Verstorbenen seyn.

Es wird wohl nicht nothwendig seyn, die grofsen Vortheile einer solchen Einrichtung umständlich aus einander zu setzen. Die Absicht der Mitglieder, die in eine solche Gesellschaft treten, ist: bei ihrem Tode ihren Nachgelassenen eine bestimmte Summe als Capital zu versichern, durch welches sie, entweder im Ankaufe von Gütern oder auf dem Wege der Zinsen, ihren künftigen Unterhalt erleichtern können. Man kann sich leicht überzeugen, dafs eine auf diese Weise begründete Summe viel gröfser und zugleich viel sicherer ist, als sie durch gewöhnliche, jährlich zu diesem Zwecke zurückgelegte Ersparungen seyn würde. Um dieses durch ein Beispiel zu zeigen, nehmen wir an, ein $m$jähriger Mann habe die jährliche Besoldung von A Gulden; er will sich aber mit der kleineren Summe von A' Gulden begnügen, und

den Rest $A - A'$ als jährlichen Beitrag in die Anstalt geben, um dadurch seiner Familie bei seinem Tode ein Capital zu verschaffen, dessen jährliche Zinsen den n^{ten} Theil seiner eigenen von ihm selbst reducirten Besoldung, oder dessen jährliche Zinsen $\frac{1}{n} A'$ betragen sollen.

Die unten folgende Tafel gibt den jährlichen Beitrag a, welchen das Mitglied an die Casse zu leisten hat, um seiner Familie bei seinem Tode das Capital von 100 Gulden zu versichern.

Dieſs vorausgesetzt, findet man leicht, daſs die reducirte jährliche Besoldung des Mitgliedes

$$A' = \frac{n\rho A}{a + n\rho},$$

und daſs daher sein jährlicher Beitrag

$$A - A' = \frac{Aa}{a + n\rho}$$

ist, wo ρ den Zins von Hundert bezeichnet.

Ein dreiſsigjähriger Mann z. B. mit einer Besoldung von 1000 fl., für den $n = 1$, $\rho = 5$, und nach der Tafel $a = 2.5$ ist, wird, wenn er sich jährlich 333 fl. abbricht, seiner Familie bei seinem Tode ein Capital von 13333 fl. versichern, von welchen die jährlichen Interessen 667 fl., also genau so viel betragen, als seine eigene reducirte Besoldung betrug, so daſs seine Nachkommen durch seinen Tod keine Änderung in ihrem Einkommen leiden.

Ist $n = 2$, oder will er seiner Familie ein Capital hinterlassen, dessen jährliche Zinsen gleich der Hälfte seiner gegenwärtigen reducirten Besoldung betragen, so wird er sich mit jährlich 800 fl. begnügen, und den jährlichen Beitrag von 200 fl. in die Casse geben, wodurch er ein Capital von 8000 fl. begründet, dessen jährliche Interessen 400 fl. geben, u. s. w.

Diese groſsen Vortheile gegen gewöhnliche zurück-

gelegte Ersparungen sind um so bedeutender, da sie von den besonderen, das Leben dieses einzelnen Mitgliedes gefährdenden Umständen ganz unabhängig sind, und selbst schon in dem ersten Jahre nach dem Eintritte desselben in die Gesellschaft erworben werden können, während jene Ersparungen aufser der Gesellschaft ein langes Leben des Mannes als Hauptbedingung voraussetzen.

* * *

Sey m das Alter und A_m die diesem Alter entsprechende Zahl der, von einer gegebenen Menge zugleich gebornen Menschen, in diesem Alter noch lebenden Personen aus irgend einer der besseren Mortalitätstafeln. In der bekannten *Baumann*'schen Tafel, die wir hier zu Grunde legen, ist z. B. $A_{20} = 491$, $A_{30} = 439$, $A_{40} = 374$ u. s. w. Der Kürze wegen sey ferner

$$E_m = \frac{1}{r^{m-1}}\left[\frac{A_m}{r} + \frac{A_{m+1}}{r^2} + \frac{A_{m+2}}{r^3} + \frac{A_{m+3}}{r^4} + \ldots\right]$$

wo r den Zinsfufs bezeichnet, z. B. $r = 1.04$ für 4 pCt., und wo diese Reihe so weit fortgesetzt wird, bis die Glieder A_x, A_{x+1}, A_{x+2}, ... der Mortalitätstafel verschwinden.

Setzt man aber diese Reihe nur bis $\frac{A_{m+p}}{r^{p+1}}$ fort, so hat man, wie man aus dem Ausdrucke für E_m findet:

$$\frac{1}{r^{m-1}}\left(\frac{A_m}{r} + \frac{A_{m+1}}{r^2} + \frac{A_{m+2}}{r^3} + \ldots + \frac{A_{m+p-1}}{r^p}\right) = E_m - E_{m+p}.$$

Eine Tafel, welche für jeden Werth von m den Werth von E_m gibt, wird alle folgenden Rechnungen ungemein erleichtern. Endlich sey der Kürze wegen

$$D_m = E_m - E_{m+1}.$$

Diese wenigen und einfachen Bezeichnungen werden uns in den Stand setzen, die folgende allgemeine

Aufgabe aufzulösen, welche alle Fragen umfafst, die für solche Lebensversicherungs-Anstalten aufgestellt werden können.

Eine Person in dem Alter von m Jahren tritt in eine solche Anstalt, und erlegt gleich anfangs das Antrittsgeld α, und dann noch jährlich den jährlichen Beitrag β. Dafür verlangt sie, dafs bei ihrem Tode ihren Erben von der Casse die Versicherung γ als Capital ausgezahlt werde. Es werden aber dabei folgende Bedingungen gemacht: 1) Wenn das Mitglied vor den ersten p Jahren nach seinem Eintritt schon stirbt, so zahlt die Casse nichts. (Diefs sind die sogenannten p Probejahre, durch welche sich manche Institute vor dem Nachtheile eines zu frühen Todes ihrer Mitglieder sichern wollen.) 2) Die erwähnten jährlichen Beiträge soll das Mitglied nicht bis an seinen Tod, sondern nur die ersten q Jahre entrichten. (Diefs hat den Zweck, zu grofse, und den Meisten lästige Antrittsgelder zu vermeiden, und auch den Mitgliedern in ihren alten Tagen ihre Pflichten zu erleichtern.) 3) Wenn das Mitglied von seinem Eintritte an noch mehr als $p+t$ Jahre am Leben bleibt, so soll die Verbindlichkeit der Casse ebenfalls wegfallen, oder die Casse hat an so alte Leute nichts zu zahlen. (Weil mancher Mann wünschen kann, dafs seine Familie nur die ersten 10, 20 oder 30 Jahre bei seinem Tod versichert werde, da er, wenn er länger lebt, durch die gewisse Aussicht auf eine höhere Besoldung oder auf eine zu machende Erbschaft sich in den Stand gesetzt sieht, seine Nachkommen ohne Hülfe der Anstalt selbst zu versorgen.) 4) Endlich wollen wir noch voraussetzen, dafs die Anstalt für ihre Geschäftsführung, für die Besoldung ihrer Beamten u. d. gl. für jedes Mitglied jährlich die Summe δ ausgeben müsse.

Wir müssen nun suchen, wie, den aufgestellten

Bedingungen gemäfs, die vier Gröfsen α, β, γ, δ von einander abhängen, von welchen die beiden ersten zu den Einkünften, und die beiden letzten zu den Ausgaben der Casse gehören.

Betrachten wir zuerst die *Einnahme* der Casse.

Nach den bekannten Gründen der Wahrscheinlichkeitsrechnung, die hier vorausgesetzt werden können, hat man für den Werth aller Zahlungen dieses Mitgliedes, auf die Zeit seines Eintrittes reducirt, den Ausdruck

$$\alpha + \frac{\beta}{A_m}\left(\frac{A_{m+1}}{r} + \frac{A_{m+2}}{r^2} + \frac{A_{m+3}}{r^3} + \ldots + \frac{A_{m+q}}{r^q}\right),$$

oder nach unserer Bezeichnung

$$\alpha + \frac{\beta \cdot r^m}{A_m}(E_{m+1} - E_{m+q+1}).$$

Es war aber

$$D_m = E_m - E_{m+1} \quad \text{und} \quad r^{m-1} E_m = \frac{A_m}{r} + r^{m-1} E_{m+1},$$

also ist auch

$$D_m = \frac{A_m}{r^m},$$

und daher die auf den Eintritt reducirte Einnahme der Casse

$$\alpha + \frac{\beta}{D_m}(E_{m+1} - E_{m+q+1}).$$

Diefs setzt voraus, dafs die jährlichen Beiträge β immer nur *am Ende* eines jeden Jahres bezahlt werden. Sollen sie aber schon *im Anfange* jedes Jahres entrichtet werden, so geht die letzte Gleichung in folgende über:

$$\alpha + \frac{\beta}{D_m}(E_m - E_{m+q}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\text{I.})$$

Wir gehen nun zu den *Ausgaben* der Casse über. Die Ausgabe δ wegen den Auslagen der Anstalt für jedes Mitglied gehen bis an den Tod des Mitgliedes, und betragen daher, ebenfalls auf die Zeit des Eintritts re-

ducirt, die Summe

$$\frac{\delta}{A_m}\left(\frac{A_{m+1}}{r}+\frac{A_{m+2}}{r^2}+\frac{A_{m+3}}{r^3}+\ldots\right), \text{ oder kurz } \delta\,.\,\frac{E_{m+1}}{D_m} \quad \text{(II.)}$$

Um aber noch den Werth der Zahlungen γ bei dem Tode der Mitglieder zu finden, so hat man von einer Anzahl M von Mitgliedern, die bei ihrem Eintritte alle m Jahre alt waren, am Ende der ersten p Jahre noch Lebende

$$\frac{A_{m+p}-A_{m+p+1}}{A_m}\,.\,M,$$

am Ende der ersten $(p+1)$ Jahre

$$\frac{A_{m+p+1}-A_{m+p+2}}{A_m}\,.\,M, \text{ u. s. f.,}$$

und endlich am Ende des $(p+t-1)^{\text{ten}}$ Jahres, wo die Zahlungen aufhören:

$$\frac{A_{m+p+t-1}-A_{m+p+t}}{A_m}\,.\,M.$$

Daraus folgt, dafs der auf den Anfang reducirte Werth aller dieser Zahlungen für M Mitglieder ist

$$\frac{A_{m+p}-A_{m+p+1}}{r^{p+1}A_m}\,.\,M\gamma+\frac{A_{m+p+1}-A_{m+p+2}}{r^{p+2}A_m}\,.\,M\gamma$$
$$+\frac{A_{m+p+2}-A_{m+p+3}}{r^{p+3}A_m}\,.\,M\gamma+\ldots+\frac{A_{m+p+t-1}-A_{m+p+t}}{r^{p+t}A_m}\,.\,M\gamma,$$

und dafs daher dieser Werth für *ein* Mitglied seyn wird

$$\frac{\gamma}{r^pA_m}\left[\frac{A_{m+p}}{r}+\frac{A_{m+p+1}}{r^2}+\ldots+\frac{A_{m+p+t-1}}{r^t}\right],$$
$$\frac{-\gamma}{r^pA_m}\left[\frac{A_{m+p+1}}{r}+\frac{A_{m+p+2}}{r^2}+\ldots+\frac{A_{m+p+t}}{r^t}\right],$$

oder nach unserer eingeführten Bezeichnung

$$\frac{\gamma}{rD_m}\left[E_{m+p}-E_{m+p+t}\right]-\frac{\gamma}{D_m}\left[E_{m+p+1}-E_{m+p+t+1}\right]\,.\quad \text{(III.)}$$

Da nun, wenn die Anstalt bei ihren Mitgliedern, wie es gefordert wird, weder Verlust noch Gewinn ha-

ben soll, die Einnahme (I.) gleich der Ausgabe (II.) und (III.) seyn soll, so hat man die Gleichung

$$\left.\begin{aligned} \alpha + \frac{\beta}{D_m}(E_m - E_{m+q}) = \\ = \frac{\gamma}{D_m}\left[\frac{1}{r}(E_{m+p} - E_{m+p+t}) - (E_{m+p+1} - E_{m+p+t+1})\right] \\ + \frac{\delta . E_{m+1}}{D_m}, \end{aligned}\right\} \text{(IV.)}$$

und diese Gleichung enthält die vollständige Auflösung der oben aufgestellten Aufgabe.

Um diejenigen besonderen Fälle, welche bei diesen Anstalten vorzukommen pflegen, besonders zu betrachten, werden wir nur die in dieser Gleichung enthaltenen Gröfsen diesen Fällen gemäfs abändern. Wir wollen einige derselben besonders anführen.

Wenn die Mitglieder kein Antrittsgeld, sondern blofs jährliche Beiträge entrichten, so ist in der Gleichung (IV.) die Gröfse $\alpha = 0$.

Wird aber blofs das Antrittsgeld ohne jährliche Beiträge entrichtet, so ist $\beta = 0$.

Werden die jährlichen Beiträge von dem Eintritte bis an den Tod des Mitgliedes bezahlt, so ist in der Gleichung (IV.) die Gröfse $E_{m+q} = 0$.

Werden blofs diejenigen Mitglieder, welche ihn p Probejahre noch nicht überlebt haben, ausgeschlossen, und bekommen *alle* übrigen, auch die nach $p+t$ Jahren noch Lebenden, die Summe γ, so ist die Gröfse $E_{m+p+t} = E_{m+p+t} = 0$.

Werden keine Probejahre eingeführt, sondern wird das Capital bei dem Tode eines jeden Mitgliedes ohne Ausnahme gezahlt, so ist $p = 0$.

Soll die Versicherung γ erst in dem Jahre zahlbar zu werden anfangen, in welchem die jährlichen Beiträge β der Mitglieder aufhören, so ist $p = q$ und so fort für

andere Fälle. Aus diesen Betrachtungen folgen eine grofse Anzahl von Problemen, von denen wir nur die vorzüglichsten kurz anzeigen.

I. *Partielle Versicherung* für q Jahre.

Die Mitglieder entrichten blofs den jährlichen Beitrag β durch q Jahre, ohne Antrittsgeld, ohne Probejahre und ohne Ausschlufs der älteren Glieder. Dafür fordern sie, wenn sie noch vor diesen q Jahren sterben, für ihre Erben die Summe γ. Wenn sie aber diese q Jahre überleben, hat die Casse nichts zu zahlen.

Dieser Fall kann eintreten, wenn die Mitglieder die Aussicht haben, nach q Jahren eine höhere Besoldung oder eine Erbschaft zu erhalten.

Die Gleichung (IV.) gibt $\alpha = p = 0$ und $q = t$. Setzt man also $\delta = 0$, so hat man

$$\beta = \frac{\gamma}{r} \cdot \frac{(E_m - E_{m+q}) - r\,(E_{m+1} - E_{m+q+1})}{E_m - E_{m+q}}.$$

Setzt man in dieser Gleichung $q = 7$ und $\gamma = 100$ Gulden $r = 1.04$, und legt man die *Baumann*'sche Mortalitätstafel zu Grunde, so gibt die Columne I. der unten folgenden Tafel die jährlichen Beiträge, die eine 15, 20, 25, . . . bis 70jährige Person zu entrichten hat, um bei ihrem Tode eine Summe von 100 Gulden zahlbar zu machen.

II. Ist $q = 1$, so wird diese Gleichung

$$\beta = \frac{\gamma}{r} - \gamma \cdot \frac{D_{m+1}}{D_m},$$

d. h. wer diese Summe β erlegt, erhält, wenn er noch vor dem Ende des ersten Jahres stirbt, die Summe γ. Die Columne II. gibt den Werth von β für $\gamma = 100$ und $r = 1.04$.

III. *Totale Versicherung durch immerwährende Beiträge.*

Die Mitglieder entrichten den jährlichen Beitrag β

bis an ihren Tod ohne Antrittsgeld und ohne Probejahre, und fordern dafür bei ihrem Tode die Summe γ.

Hier ist die Gleichung (IV.), da $\alpha = p = 0$, $E_{m+q} = 0$ und $E_{m+p+t} = 0$ ist,

$$\beta = \gamma \cdot \frac{(E_m - r \cdot E_{m+1})}{r E_m}.$$

Die Columne III. gibt diese Beiträge für $\gamma = 100$ und $1 = 1.04$.

IV. *Totale Versicherung durch Antrittsgeld.*

Die Mitglieder entrichten blofs das Antrittsgeld α ohne jährliche Beiträge und ohne Probejahre, und erhalten bei ihrem Tode das Capital γ.

Hier ist $\beta = p = 0$ und $E_{m+p+t} = 0$, also wird die Gleichung (IV.)

$$\alpha = \frac{\gamma}{r} \cdot \frac{E_m - r E_{m+1}}{D_m}.$$

Die Columne IV. gibt dieses Antrittsgeld für $\gamma = 100$ und $\gamma = 1.04$.

V. *Totale Versicherung durch aufhörende Beiträge.*

Die Mitglieder entrichten den jährlichen Beitrag β, aber nur in den ersten q Jahren, ohne Antrittsgeld und ohne Probejahre, und die Casse zahlt bei dem Tode des Mitglieds das Capital γ.

Hier ist $\alpha = p = 0$ und $E_{m+p+t} = 0$, also die Gleichung IV.

$$\beta = \frac{\gamma}{r} \cdot \frac{E_m - r E_{m+1}}{E_m - E_{m+q}}.$$

Die vier Columnen V. der Tafel geben diesen 3, 5, 7 und 10jährigen Beitrag für $\gamma = 100$ und $r = 1.04$.

Alter *m.*	I. Partiell für 7 Jahre.	II. Partiell für 1 Jahr.	III. Totale Beiträge	IV. Totales Antritts-geld.	V. Totale aufhörende Beiträge.			
					3 Jahre.	5 Jahre.	7 Jahre.	10 Jahre.
15	0.82	0.75	1.53	28.42	9.9	6.2	4.6	3.5
20	1.01	0.98	1.77	31.57	11.1	6.9	5.2	3.9
25	1.18	1.02	2.04	34.66	12.1	7.6	5.8	4.3
30	1.43	1.29	2.37	38.13	13.4	8.4	6.4	4.8
35	1.73	1.65	2.77	41.86	14.7	9.3	7.1	5.3
40	1.94	1.80	3.22	45.56	15.6	9.9	7.7	5.7
45	2.46	1.99	3.84	49.97	17.6	11.3	8.6	6.6
50	3.15	2.88	4.63	54.63	19.5	12.5	9.5	7.4
55	3.77	3.37	5.55	59.08	21.3	13.7	10.6	8.2
60	5.16	4.12	6.90	64.55	23.1	15.2	11.8	9.5
65	7.00	5.94	8.58	69.02	25.0	16.8	13.4	10.9
70	9.04	7.69	10.46	73.15	27.3	18.9	15.2	12.4

Diese Tafeln reichen hin, um der Errichtung einer solchen Anstalt zu Grunde gelegt zu werden, da für jedes gröfsere Capital γ als 100 Gulden das Antrittsgeld oder die Beiträge in demselben Verhältnisse vergröfsert werden. Die Gröfse δ läfst sich nach den individuellen Einrichtungen eines jeden Institutes nicht allgemein bestimmen, daher sie hier übergangen werden mufste. Man kann bemerken, dafs sie bei den meisten Anstalten die Zahlen dieser Tafeln kaum merklich ändern wird, und dafs endlich, wenn man $\gamma = 0$ setzt, das letzte Glied $\frac{\delta \cdot E_{m+1}}{D_m}$ die sogenannten Lebensrenten bezeichnet, welche dem Mitgliede selbst, für seine Leistung an die Casse, bis an seinen Tod von derselben entrichtet werden.

II.

Beurtheilung der Fehler, welche man bei Messung der Krystallwinkel mittelst der Reflexionsgoniometer von *Wollaston* und *Malus* begeht;

von

Julius Weisbach.

Es ist in der practischen Geometrie und Astronomie ein Gegenstand von der gröfsten Wichtigkeit, die Fehler beim Winkelmessen zu beurtheilen und zu vermindern, und, wenn es angeht, sie wohl gar zu vermeiden; denn da man, den Unvollkommenheiten unserer Sinneswerkzeuge und unserer Mefsinstrumente wegen, bei jeder Messung Fehler begeht, so besteht der Werth einer jeden Messung nur darin, dafs man die Grenzen, über welche die begangenen Fehler nicht hinausgehen, angeben könne, und dafs diese Grenzen nicht zu weit seyen.

Da nun die Bestimmung der naturhistorischen Species in der Mineralogie ganz besonders auf der Verschiedenheit der Krystallwinkel beruht, so ist die Beurtheilung der Fehler beim Messen der Krystallwinkel ein nicht minder wichtiger Gegenstand. Das *Romé de l'Isle*'sche Gesetz, dafs die Krystallwinkel, bei allen übrigen Unregelmäfsigkeiten der Krystalle, immer constant bleiben, hat, in der gröfsten Strenge genommen, keine Giltigkeit, denn es gibt Varietäten einer und derselben Species, deren Winkel auffallend verschieden sind. Diefs sind jedoch nur kleine Abweichungen von einem und demselben Normalwinkel, welche nur von zufälligen Ursachen, vielleicht von den Anziehungen der umgeben-

den Mineralmassen, oder von zufälligen Beimischungen herrühren. Sie sind mit den Abweichungen der Planetenbahnen von den Ellipsen zu vergleichen, welche von den Anziehungen anderer Himmelskörper, als der Sonne, herrühren. Die Normalgestalt der Planetenbahnen bleibt denn doch eine Ellipse, und wenn man sie aufser Acht lassen wollte, würde man den sichern Weg bei der Betrachtung derselben eben so verlieren, als es bei der Bestimmung der naturhistorischen Species der Fall ist, wenn man den Zusammenhang aller derjenigen Varietäten einer Species dadurch aufhebt, dafs man sie zur besonderen Species macht, weil sie in ihren Winkeln ein wenig abweichen.

Es scheint hieraus hervorzugehen, dafs zur Bestimmung der naturhistorischen Species eine sehr grofse Schärfe der Krystallwinkel nicht geradezu nothwendig sey; bedenkt man aber, dafs unsere Reflexionsgoniometer auch gar nicht dazu geeignet sind, die Winkel sehr scharf zu messen, und dafs man selbst, wie in den vorliegenden Untersuchungen dargethan werden wird, bei einer nur einiger Mafsen unachtsamen Messung um viele Minuten fehlen kann, so folgt daraus, dafs man alle Aufmerksamkeit auf die Verminderung und Vermeidung der Fehler verwenden kann, ohne noch die Abweichungen von der Normalform zu entdecken.

Obgleich in den neuern Zeiten Mehreres über das Messen der Krystallwinkel geschrieben worden ist, so enthält doch keine dieser Schriften eine genaue Beurtheilung der Fehler, welche bei demselben Statt finden. Selbst Herr Professor *Kupffer* handelt diesen Gegenstand in der gekrönten Preisschrift über die genaue Messung der Winkel an Krystallen nur oberflächlich ab, indem er den Unterschied der veränderlichen und derjenigen Fehler, welche selbst bei der Multiplication der Beob-

achtungen constant bleiben, nicht beachtet. Die Fehler, welche dadurch entstehen, daſs die zu messende Kante mit der Axenlinie des Instrumentes nicht zusammenfällt, bleiben, man mag den Winkel so oft messen als man will, immer dieselben, und daſs sie nicht so unbedeutend sind, werden die folgenden Untersuchungen beweisen. Nur die veränderlichen Fehler sind es, auf welche man die Multiplication der Beobachtungen und die Wahrscheinlichkeitsrechnung anwenden kann, denn nur diese werden dadurch verkleinert.

Ich habe in der vorliegenden Arbeit eine vollständige Beurtheilung der Fehler beim Winkelmessen mit den Reflexionsgoniometern von *Wollaston* und *Malus* versucht, und dabei Regeln und Mittel angegeben, mit Hülfe deren man Fehler vermeiden, oder wenigstens vermindern kann. Die Instrumente sind dabei in ihrer Einfachheit geblieben, auch glaube ich nicht, daſs man durch zusammengesetztere Instrumente bedeutend schärfer werde messen können. Es ist übrigens kein Mangel der Reflexionsgoniometer, daſs man mit ihnen die Winkel von *matten* Krystallflächen nicht messen kann, denn die matten Krystallflächen sind rauh, bilden also keine vollkommenen Ebenen, und sind daher schon an und für sich keiner genauen Messung fähig.

Die Beschreibung der Instrumente habe ich unterlassen, weil man sie in jedem ausführlichen Werke über Physik, und selbst in manchen Werken über Mineralogie findet.

Endlich ist noch zu bemerken, daſs die Figuren nicht proportionirt gezeichnet werden konnten, weil sonst die Fehler nicht in die Augen gefallen wären.

Das Goniometer von *Wollaston*.

§. 1. Es sey Q (Fig. 18) ein von einem horizontalen und einem verticalen Faden gebildetes Kreuz von beiläufig 2 Fufs Höhe und eben so viel Breite. In der durch dieses Fadenkreuz gelegten Ebene liege senkrecht darunter ein zweites Kreuz N, parallel mit dem vorigen, von derselben Dicke und etwas mehr Höhe und Breite. Die Verticallinie QN sey in P halbirt, und durch P gehe eine gegen die Fadenkreuzebene senkrecht gerichtete Horizontallinie HRP. Durch einen Punct C dieser Linie gehe die zu messende, horizontal und mit der Fadenkreuzebene parallel liegende Kante. Endlich sey ECF der zu messende Winkel, d. h. derjenige Winkel, dessen Schenkel auf der gedachten Kante senkrecht stehen.

Um diesen Winkel zu messen, mufs zuvörderst der eben angegebenen Bedingung Genüge geleistet, nämlich die zu messende Kante horizontal und mit der Fadenkreuzebene parallel gerichtet werden. Zu diesem Zwecke ist zunächst die Ebene des Instrumentes in die Nähe und parallel mit der durch HR gehenden Verticalebene zu stellen, welches mit Hülfe einer Libelle und eines Bleiloths sehr leicht geschieht. Ist diefs geschehen, so befestige man den Krystall, dessen Winkel man messen will, auf die hervorragende Axe des Instrumentes, oder auf einen daran angebrachten Apparat mittelst Wachs, dafs die zu messende Kante mit der verlängerten Axenlinie des Instrumentes zusammen falle, so genau, als sich diefs durch das Augenmafs thun läfst. Jetzt bringe man das Auge in die Stellung O, nämlich über die Horizontalebene HR, in die Nähe und auf die linke Seite des aufgeklebten Krystalls. Hierauf drehe man die Axe des Instrumentes mit dem darauf befestigten Krystalle so lange, bis das Bild vom Puncte Q mit dem Puncte N

im Auge zusammen fällt. Endlich drücke man das Wachs mit dem Krystalle so lange hin und her, bis auch beide Kreuze einander vollkommen decken. Hat man aber den Krystall auf dem gedachten Apparat befestigt, so geschieht diese Stellung mit Hülfe dieses Apparates. Die Vorrichtung mit der Nufs, wie man sie bei allen Mefstischen findet, ist dem gewöhnlichen Apparate wegen der sicherern und feinern Stellung vorzuziehen.

Hat man diefs so weit gebracht, so ist man gewifs, dafs wenigstens die Krystallfläche CF auf der Ebene des Instrumentes, also auch auf der durch HR gelegten Verticalebene, senkrecht steht. Es ist nämlich ein aus der Katoptrik bekannter Satz: dafs der zurückgeworfene Lichtstrahl FO und der einfallende QF in einer auf der spiegelnden Fläche CF senkrechten Ebene liegen. Nun ist aber QFN eine Verticalebene, und OFN eine gerade Linie, folglich auch OFQ eine, und zwar durch HR gehende Verticalebene, und hieraus folgt denn, dafs die spiegelnde Fläche CF auf jener durch HR gehenden Vertikalebene, daher auch auf der mit ihr parallel gehenden Ebene des Instrumentes, senkrecht steht.

Dasselbe thue man nun auch in Beziehung auf die Fläche CE. Und ist beim Stellen dieser Fläche die erstere nicht aus ihrer Lage gekommen, welches man jederzeit wieder zu untersuchen hat, so wird unsere Absicht erreicht, nämlich die Kante C senkrecht gegen die Ebene des Instrumentes gestellt seyn.

Jetzt erst kann man zur Messung selbst schreiten. Man bringe zu diesem Zwecke das Auge abermals nach O, und drehe die Axe mit dem Krystalle so lange, bis beide Kreuze einander vollkommen decken. Da der Einfallswinkel QFf dem Ausgangswinkel OFC, und dieser seinem Scheitelwinkel NFf gleich ist, so folgt daraus, dafs Ff den Winkel QFN halbirt. Diefs thut aber

auch die Horizontale HR, weſshalb die spiegelnde Fläche ebenfalls horizontal liegen muſs. Nun drehe man das ganze Instrument in der Richtung HZR so lange, bis sich in dem Auge O' das von der Fläche CE zurückgeworfene Bild von Q mit N deckt. Auch in diesem Falle wird die spiegelnde Fläche EC die horizontale Lage angenommen haben. Bei der Drehung ist E nach E' gekommen, man hat also das Instrument um den Winkel ECE' gedreht. Es ist aber ECF der zu messende Winkel und $E'CE + ECF = 180°$, folglich der zu messende Winkel zweien rechten Winkeln weniger dem Drehungswinkel gleich. Theilt man nun den Rand des Instrumentes von 180 Graden an rückwärts ein, so wird der Vernier den Winkel unmittelbar angeben.

Ein Hauptvortheil bei der hier angegebenen Stellung der beiden Kreuze ist der, daſs man auch groſse Krystalle richtig messen kann, wenn sie nur die erforderliche Glattheit der Flächen besitzen, weil es ganz gleichgültig ist, nach welchen Puncten der spiegelnden Flächen man sieht.

§. 2. Es sey in Figur 19 alles wie vorhin, nur mit der Ausnahme, daſs das Kreuz N dem Centrum näher gerückt sey, und daſs man in einer durch C gehenden Richtung nach N sehe. Dieſs letztere ist jedoch eine Voraussetzung, welcher nicht Genüge geleistet werden kann; denn da das Bild des Kreuzes Q einen bestimmten Raum von CF einnimmt, so muſs dessen Mittelpunct zwischen C und F liegen. Kleine Krystalle, welche sich wegen der Glattheit ihrer Flächen zur Messung mit dem Reflexionsgoniometer besonders eignen, leisten dieser Bedingung mehr Genüge, als groſse.

Was die senkrechte Stellung der zu messenden Kante anbelangt, so bleibt dieses Verfahren wie vorhin, wenn nur der Punct N die Verticalebene durch HR

nicht verlassen hat. Eben so verfahre man beim Messen selbst auf die oben angegebene Weise. Es wird aber hierbei die spiegelnde Fläche CF nicht die horizontale Lage, sondern eine Lage annehmen, welche den Winkel QCN halbirt. Dreht man nun das Instrument in der Richtung HZR so weit um, bis sich das von der andern spiegelnden Fläche CE zurückgeworfene Bild vom Kreuze Q mit dem Kreuze N deckt, so mufs, da C die Lage nicht verändert hat, CE in der Verlängerung von FC liegen, also der zu messende Winkel ECF ebenfalls die Ergänzung des Umdrehungswinkels zu zwei Rechten seyn.

Anders ist es, wenn man nach andern Puncten F, E der spiegelnden Flächen visirt; denn wenn man erstens nach F sieht, so wird, wenn QFN durch CF halbirt werden soll, CF noch ein wenig in der Richtung RTH gedreht werden müssen, weil in der Richtung, wie hier, QFC gröfser als NFC ist. Sieht man zweitens nach dem Puncte E' der spiegelnden Fläche CE, so wird man umgekehrt das Instrument in der Richtung HTR noch um einen kleinen Winkel umdrehen müssen, damit der gröfsere Winkel $QE'C$ dem kleinern $NE'C$ gleich werde. Wollte man dennoch die oben angegebene Differenz dem in Frage stehenden Winkel ECF gleich setzen, so würde man einen Fehler begehen, der um so bedeutender ausfällt, je breiter die spiegelnden Flächen sind, je kleiner CM, und je gröfser MN ist. Da man nämlich den Umdrehungswinkel von einem Winkel abzuziehen hat, der nicht ganz zweien Rechten gleich ist, so wird uns obige Differenz den Winkel zu *grofs* angeben.

Die Gröfse dieses und desjenigen Fehlers zu bestimmen, welcher daraus entspringt, dafs die zu messende Kante zwar mit der Axenlinie des Instrumentes

parallel läuft, aber nicht mit ihr zusammenfällt, dieſs soll ein Gegenstand der nächsten Paragraphe seyn.

§. 3. Es seyen $CP = x$ und $PQ = y$ die Coordinaten des Kreuzes Q, und eben so $CM = x'$ und $MN = y'$ die Coordinaten des Kreuzes N, alle in Beziehung auf das Centrum C. Die Entfernungen der Visirpuncte F und E vom Centrum, d. i. CF und CE (Fig. 20), seyen $= a$ und b. DF und $D'E'$ geben die richtige Stellung der spiegelnden Flächen an. Die Winkel, welche CF und CE' mit dem Horizonte HCR bilden, also HCF und HCE', seyen $= \gamma$ und γ'. Endlich seyen die Neigungswinkel der Flächen DF und $D'E'$ gegen den Horizont, nämlich $R'Fd$ und $R''E'D'$, $= \varphi$ und φ'.

Der Fehler μ, welchen man bei der Messung begeht, ist natürlich $= \varphi - \varphi'$.

Die Formeln für die Tangenten von φ und φ' erhält man auf folgende Weise:

Da $QFd = NFd$ ist, so muſs

$$NFR' - QFR' = 2R'Fd = 2\varphi,$$

daher

$$\text{tang. } 2\varphi = \text{tang. } (NFR' - QFR') = \frac{\text{tang. } NFR' - \text{tang. } QFR'}{1 + \text{tang. } NFR' \text{ tang. } QFR'}$$

seyn.

Es ist aber

$$\text{tang. } NFR' = \frac{y' + a \sin. \gamma}{x' + a \cos. \gamma} \quad \text{und}$$

$$\text{tang. } QFR' = \frac{y - a \sin. \gamma}{x + a \cos. \gamma},$$

folglich

$$\text{tang. } 2\varphi = \frac{(y' + a \sin. \gamma)(x + a \cos. \gamma) - (y - a \sin. \gamma)(x' + a \cos. \gamma)}{(x' + a \cos. \gamma)(x + a \cos. \gamma) + (y' + a \sin. \gamma)(y - a \sin. \gamma)}.$$

Löset man die Parenthesen auf, und streicht man die mit a^2 behafteten Glieder als nicht beachtungswerthe

kleine Gröfsen weg, welches letztere man recht gut kann, da schon a eine sehr kleine Gröfse ist, so erhält man

$$\text{tang. } 2\varphi = \frac{xy' - x'y + a(x + x')\sin.\gamma - a(y - y')\cos.\gamma}{xx' + yy' + a(x + x')\cos.\gamma + a(y - y')\sin.\gamma}.$$

Setzt man in dieser Gleichung statt a, b, und statt γ, γ', so erhält man

$$\text{tang. } 2\varphi' = \frac{xy' - x'y + b(x + x')\sin.\gamma' - b(y - y')\cos.\gamma'}{xx' + yy' + b(x + x')\cos.\gamma' + b(y - y')\sin.\gamma'}.$$

Der Fehler ist also

$$\mu = \tfrac{1}{2}\text{arc.}\left(\text{tg.} = \frac{xy' - x'y + a(x+x')\sin.\gamma - a(y-y')\cos.\gamma}{xx' + yy' + a(x+x')\cos.\gamma + a(y-y')\sin.\gamma}\right)$$
$$- \tfrac{1}{2}\text{arc.}\left(\text{tg.} = \frac{xy' - x'y + b(x+x')\sin.\gamma' - a(y-y')\cos.\gamma'}{xx' + yy' + b(x+x')\cos.\gamma' + a(y-y')\sin.\gamma'}\right).$$

Diese Gleichung ist, so wie sie hier steht, noch nicht brauchbar, denn die darin vorkommenden Winkel γ und γ' sind veränderliche, also unbekannte Gröfsen. Suchen wir aber diejenigen Werthe von γ und γ' auf, für welche dieser Fehler am gröfsten wird, so leistet sie zu unserem Zwecke vollkommen Genüge.

§. 4. Setzen wir zuvörderst ein Mal $x' = x$ und $y' = y$, so erhalten wir

$$\mu = \tfrac{1}{2}\text{arc.}\left(\text{tang.} = \frac{2ax\sin.\gamma}{x^2 + y^2 + 2ax\cos.\gamma}\right)$$
$$- \tfrac{1}{2}\text{arc.}\left(\text{tang.} = \frac{2bx\sin.\gamma'}{x^2 + y^2 + 2bx\cos.\gamma'}\right).$$

Da diese Tangenten sehr kleine Gröfsen sind, so kann man sie ihren Bögen gleich setzen. Man erhält alsdann

$$\mu = \frac{ax\sin.\gamma}{x^2 + y^2 + 2ax\cos.\gamma} - \frac{bx\sin.\gamma'}{x^2 + y^2 + 2bx\cos.\gamma'}.$$

Diese Gröfse wird offenbar um so gröfser, je gröfser $\sin.\gamma$ und $(-\sin.\gamma')$ sind.

Da es uns nur um die Kenntnifs des möglich gröfs-

ten Werthes von μ zu thun ist, so können wir sin. $\gamma = 1$ und sin. $\gamma' = -1$, also

$$\mu = \frac{a\,x}{x^2 + y^2} + \frac{b\,x}{x^2 + y^2}$$

setzen.

Es ist kein Grund vorhanden, b kleiner oder grösser als a anzunehmen; setzen wir daher $b = a$, so erhalten wir

$$\mu = \frac{2\,a\,x}{x^2 + y^2}.$$

Bezeichnet man $\frac{y}{x}$ mit m, so ist $y = m\,x$, daher

$$\mu = \frac{2\,a\,x}{x^2 + m^2\,x^2} + \frac{2\,a}{x\,(1 + m^2)}.$$

Soll der Fehler μ eine bestimmte Gröfse nicht überschreiten, so kann man x bestimmen, für welches dieser Forderung Genüge geleistet wird. Es mufs nämlich seyn:

$$x > \frac{2\,a}{\mu\,(1 + m^2)}.$$

Beispiel 1. Es sey $a = 3$ Linien, $x = 10$ Fufs und $y = 5$ Fufs. Alsdann ist

$$\mu = \frac{2\,.\,3\,.\,10}{144\,(10^2 + 5^2)} = \frac{5}{12\,.\,125} = \frac{1}{12\,.\,25}$$
$$= \tfrac{1}{100} = 0{,}0033\,\ldots = 0^\circ,\ 11'\ 27'',5.$$

Wäre $a = 2$ Linien, so würde

$$\mu = \tfrac{2}{3}\,.\ 0^\circ,\ 11',\ 27'',5 = 0^\circ,\ 7',\ 38'',3$$

seyn, und für $a = 1$ Linie ist

$$\mu = \frac{0^\circ,\ 11',\ 27'',5}{3} = 0^\circ,\ 3',\ 49'',16.$$

Überhaupt wird der Fehler um so kleiner, je kleiner a ist, d. h. je näher die zu messende Kante dem Centrum rückt.

Beispiel 2. Es sey $x = 30$ und $y = 10$ Fufs, so ist für $a = 3$ Linien:

$$\mu = \frac{2 \cdot 3 \cdot 30}{12 \cdot 12\,(30^2 + 10^2)} = 0{,}00125 = 0^0,\ 4',\ 17'',8,$$

für $a = 2$ Linien:

$$\mu = \tfrac{2}{3} \cdot 0^0,\ 4',\ 17'',8 = 0^0,\ 2',\ 51'',9,$$

und für $a = 1$ Linie:

$$\mu = \frac{0^0,\ 4',\ 17'',8}{3} = 0^0,\ 1',\ 25'',9.$$

Überhaupt wird der Fehler um so kleiner ausfallen, je gröfser die Distanz $\sqrt{x^2 + y^2}$ ist.

Beispiel 3. Setzt man im vorigen Beispiele $y = x = 30$ Fufs, so erhält man für $a = 3$ Linien:

$$\mu = \frac{5}{4 \cdot 1500} = 0{,}0006944 \ldots = 0^0,\ 2',\ 23'',24,$$

für $a = 2$ Linien:

$$\mu = \tfrac{2}{3} \cdot 0^0,\ 2',\ 23'',24 = 0^0,\ 1',\ 25'',5,$$

und für $a = 1$ Linie ist

$$\mu = \frac{0^0,\ 2',\ 23'',24}{3} = 0^0;\ 0',\ 47'',74.$$

Es nimmt insbesondere der Fehler μ mit dem Grösserwerden von y bedeutend ab. Da mit y der Einfallswinkel wächst, und mit diesem wieder die Deutlichkeit der Bilder zunimmt, so sind doppelte Gründe vorhanden, y so grofs wie möglich zu machen.

Beispiel 4. Es sey $m = \frac{y}{x} = 1$, und der Fehler soll noch keine Minute oder noch keine Secunde betragen, wie grofs mufs dann x wenigstens seyn?

Für den ersten Fall ist

$$x = \frac{2a}{2 \cdot 0{,}0002909} = \frac{a}{0{,}0002909} = 3438\,a,$$

für den zweiten Fall aber

$$x = \frac{a}{0{,}00000485} = 206300\,a.$$

Es sey $a = 1$ Linie $= \frac{1}{144}$ Fuſs, so ist in dem ersten Falle

$$x = \frac{3438}{144} = 24 \text{ Fuſs},$$

und in dem anderen Falle

$$x = 60 . 24 = 144 \text{ Fuſs}.$$

Für $a = 2$ und 3 Linien verdoppeln und verdreifachen sich diese Distanzen.

§. 5. Nehmen wir jetzt unsere Hauptgleichung

$$\mu = \tfrac{1}{2} \text{arc.} \left(\text{tg.} = \frac{xy' - x'y + a(x+x') \sin.\gamma - a(y-y') \cos.\gamma}{xx' + yy' + a(x+x') \cos.\gamma + a(y-y') \sin.\gamma} \right)$$
$$- \tfrac{1}{2} \text{arc.} \left(\text{tg.} = \frac{xy' - x'y + b(x+x') \sin.\gamma' - b(y-y') \cos.\gamma'}{xx' + yy' + b(x+x') \cos.\gamma' + a(y-y') \sin.\gamma'} \right)$$

noch ein Mal vor, und bestimmen wir γ und γ' so, daſs μ ein Maximum wird.

Damit aber μ ein Maximum werde, muſs der erste Bogen ein Maximum, und der zweite ein Minimum seyn. Je gröſser die Tangente ist, desto gröſser wird auch der ihr zugehörige Bogen seyn; und ist die Tangente ein Maximum oder Minimum, so ist es auch ihr Bogen.

Man hat also

$$\frac{xy' - x'y + a(x+x') \sin.\gamma - a(y-y') \cos.\gamma}{xx' + yy' + a(x+x') \cos.\gamma + a(y-y') \sin.\gamma}$$

zu differenziren, das erste Differenzialverhältniſs der Nulle gleich zu setzen, und mit Hülfe des zweiten Differenzialverhältnisses zu bestimmen, ob diese Tangente ein Maximum oder Minimum geworden sey.

Die Bedingungsgleichung ist also

$$[xx' + yy' + a(x+x') \cos.\gamma + a(y-y') \sin.\gamma] \times [(x+x') \cos.\gamma + (y-y') \sin.\gamma]$$
$$= [xy' - x'y + a(x+x') \sin.\gamma - a(y-y') \cos.\gamma] \times [(y-y') \cos.\gamma - (x+x') \sin.\gamma]$$

oder

$$[yy'(y-y') + x^2 y' - x'^2 y] \sin.\gamma + [xx'(x+x') + x'y^2 + xy'^2] \cos.\gamma + a[(x+x')^2 + (y-y')^2] = 0.$$

Setzt man nun

$$y y' (y - y') + x^2 y' - x'^2 y = A,$$
$$x x' (x + x') + x' y^2 + x y'^2 = B,$$
$$a[(x + x')^2 + (y - y')^2] = C,$$

so ist die Bedingungsgleichung

$$A \sin.\gamma + B \cos.\gamma + C = 0.$$

Wenn man statt $\sin.\gamma = \sqrt{1 - \cos.\gamma^2}$ setzt, und die Gleichung quadrirt, so erhält man

$$B^2 \cos.\gamma^2 + 2BC \cos.\gamma + C^2 = A^2 - A^2 \cos.\gamma^2,$$

d. i. $(A^2 + B^2) \cos.\gamma^2 + 2BC \cos.\gamma = A^2 - C^2$,

$$\cos.\gamma^2 + \frac{2BC}{A^2 + B^2} \cos.\gamma = \frac{A^2 - C^2}{A^2 + B^2}.$$

Hieraus ergibt sich

$$\cos.\gamma = \frac{-BC \pm A\sqrt{A^2 + B^2 - C^2}}{A^2 + B^2}.$$

Da C^2 in Beziehung zu $A^2 + B^2$ sehr klein ist, so kann man es aufser Acht lassen, und

$$\cos.\gamma = \frac{-BC \pm A\sqrt{A^2 + B^2}}{A^2 + B^2}$$

setzen.

Um nun zu wissen, ob für diesen Werth von γ, μ wirklich ein Maximum ist, kommt es darauf an

$$A \sin.\gamma + B \cos.\gamma + C$$

zu differenziren, und zu sehen, ob das Resultat *negativ* ausfällt. Es ist

$$\frac{d(A \sin.\gamma + B \cos.\gamma + C)}{d\gamma} = A \cos.\gamma - B \sin.\gamma.$$

Soll dieser Werth negativ seyn, so mufs $\sin.\gamma$ einen positiven Werth haben. Dann folgt aber aus der Bedingungsgleichung

$$A \sin.\gamma + B \cos.\gamma + C,$$

dafs $\cos.\gamma$ *negativ*, und zwar

$$\cos.\gamma = -\left(\frac{BC + A\sqrt{A^2+B^2}}{A^2+B^2}\right)$$

seyn mufs. Für diesen Werth von γ ist also die erste Tangente ein Maximum.

Diese Gleichung für cos. γ gilt auch für cos. γ', wenn man nur statt a, b setzt. Hier soll aber die Tangente ein Minimum werden, es mufs also A cos. $\gamma' - B$ sin. γ' positiv seyn. Dann mufs aber sin. γ' einen negativen Werth haben. Hingegen cos. γ' kann auch positiv seyn. Hieraus folgt dann

$$\cos.\gamma' = \frac{-BC + A\sqrt{A^2+B^2}}{A^2+B^2}.$$

Was a und b anbelangt, so wird μ um so gröfser, je gröfser a und b sind; denn mit a nimmt die erste Tangente zu, und mit b die zweite Tangente ab. In der Ausübung kann man $a = b$, und zwar eine halbe bis drei Linien grofs annehmen. Im letztern Falle mufs man schon sehr unbehutsam messen.

Setzen wir in die Gleichung für μ, a der Nulle gleich, so fällt auch μ Null aus, welches ganz natürlich ist. Setzen wir ein anderes Mal $x' = x$ und $y' = y$, so erhalten wir

$$\mu = \tfrac{1}{2}\,\text{arc.}\left(\text{tang.} = \frac{2ax\,\sin.\gamma}{x^2+y^2+2ax\,\cos.\gamma}\right)$$
$$-\tfrac{1}{2}\,\text{arc.}\left(\text{tang.} = \frac{2bx\,\sin.\gamma'}{x^2+y^2+2bx\,\cos.\gamma'}\right);$$

ferner

$$A = 0, \quad B = 2x(x^2+y^2) \quad \text{und} \quad C = 4aa^2,$$

daher

$$\cos.\gamma = \cos.\gamma' = -\frac{BC}{B^2} = -\frac{C}{B} = -\frac{4ax^2}{2x(x^2+y^2)}$$
$$= -\frac{2ax}{x^2+y^2}$$

und

$$\sin.\gamma = \frac{\sqrt{(x^2+y^2)^2 - 4a^2x^2}}{x^2+y^2},$$

$$\sin.\gamma' = -\frac{\sqrt{(x^2+y^2)^2 - 4a^2x^2}}{x^2+y^2}.$$

Diese Werthe von γ und γ' in die vorhergehende Gleichung für μ gesetzt, geben das wahre Maximum von μ; da wir es uns jedoch zum Gesetz gemacht haben, die mit a^2 behafteten Glieder aufser Acht zu lassen, so müssen wir es auch hier thun. Wir erhalten alsdann wie oben:

$\sin.\gamma = 1$, $\sin.\gamma' = -1$ und $\cos.\gamma = \cos.\gamma' = 0$.

Beispiel 5. Es sey $a = b = 1$ Linie, $x = 10$, $y = 5$, $x' = 2$ und $y' = 1$ Fufs. Alsdann ist

$$A = 5(5-1) + 100 - 4.5 = 100,$$

$$B = 10.2(10+2) + 2.5^2 + 10 = 300,$$

$$C = \frac{12^2 + 4^2}{144} = \frac{10}{9}.$$

Hieraus folgt

$$1,\ \cos.\gamma = -\left(\frac{\frac{300.10}{9} + 100\sqrt{100^2+300^2}}{100^2+300^2}\right)$$
$$= -0{,}3195611.$$

$$2,\ \sin.\gamma = \sqrt{1 - 0{,}3195611^2} = \sqrt{1 - 0{,}102095}$$
$$= 0{,}94758.$$

$$3,\ \cos.\gamma' = \frac{-\frac{1}{3} + 31{,}6227766}{100} = 0{,}3128944.$$

$$4,\ \sin.\gamma' = -\sqrt{1 - 0{,}3128944^2} = -0{,}94988.$$

Setzt man diese Werthe von

$\cos.\gamma$, $\sin.\gamma$, $\cos.\gamma'$ und $\sin.\gamma'$

in die Gleichung für μ ein, so erhält man

$$\mu = \tfrac{1}{2}\,\text{arc.}\left(\text{tg.} = \frac{10 - 10 + \frac{12}{144}\cdot 0{,}94758 + \frac{4}{144}\cdot 0{,}31956}{20 + 5 + \frac{12}{144}\cdot 0{,}31956 + \frac{4}{144}\cdot 0{,}94758}\right)$$
$$- \tfrac{1}{2}\,\text{arc.}\left(\text{tg.} = \frac{10 - 10 - \frac{12}{144}\cdot 0{,}94988 - \frac{4}{144}\cdot 0{,}31289}{20 + 5 + \frac{12}{144}\cdot 0{,}31289 - \frac{4}{144}\cdot 0{,}94988}\right)$$
$$= 0^\circ,\ 12',\ 3''.$$

So grofs ist also der gröfste Fehler, welcher hier begangen werden kann. Er fällt allerdings sehr bedeutend aus.

Beispiel 6. Die Gröfsen a, x und y seyen wie vorhin, aber $x' = 5$ Fufs und $y' = 3$ Fufs. Hier ist

$$A = 15\,(5 - 3) + 100 \cdot 3 - 25 \cdot 5 = 205,$$
$$B = 10 \cdot 5\,(10 + 5) + 5 \cdot 25 + 10 \cdot 9 = 965,$$
$$C = \frac{15^2 + 2^2}{144} = \frac{229}{144}.$$

Mit Hülfe dieser Werthe ergibt sich nun

$$1,\ \cos.\gamma = -\left(\frac{\frac{965 \cdot 229}{144} + 205\sqrt{205^2 + 965^2}}{205^2 + 965^2}\right)$$
$$= -\,0{,}20889.$$
$$2,\ \sin.\gamma = \sqrt{1 - 0{,}20889^2} = 0{,}97794.$$
$$3,\ \cos.\gamma' = \frac{1534{,}6 + 202239{,}5}{973250} = 0{,}20622.$$
$$4,\ \sin.\gamma' = -\sqrt{1 - 0{,}20622^2} = -\,0{,}978505.$$

Hieraus findet man endlich

$$\mu = \tfrac{1}{2}\,\text{arc.}\left(\text{tg.} = \frac{30 - 25 + \frac{15}{144}\cdot 0{,}97794 + \frac{2}{144}\cdot 0{,}20889}{50 + 15 - \frac{15}{144}\cdot 0{,}20889 + \frac{2}{144}\cdot 0{,}97794}\right)$$
$$- \tfrac{1}{2}\,\text{arc.}\left(\text{tg.} = \frac{30 - 25 - \frac{15}{144}\cdot 0{,}978505 - \frac{2}{144}\cdot 0{,}20622}{50 + 15 + \frac{15}{144}\cdot 0{,}20622 - \frac{2}{144}\cdot 0{,}975505}\right)$$
$$= 2^\circ,\ 14',\ 44'' - 2^\circ,\ 9',\ 12'' = 0^\circ,\ 5',\ 32''.$$

Dieser Fehler ist zwar ebenfalls noch bedeutend, aber doch schon viel kleiner als der vorhergehende. Macht man endlich x' ebenfalls 10 und $y = 5$ Fufs, so

wird, nach dem ersten Beispiele, der Fehler nur 0°, $3'$, $49''$ betragen.

§. 6. Setzt man in $\mu = \frac{2ax}{x^2+y^2}$ (§. 4.) x *negativ*, so entsteht $\mu = -\frac{2ax}{x^2+y^2}$. Bringt man also über der rückwärts verlängerten Abscissenlinie, in denselben Entfernungen und Höhen, noch zwei andere Kreuze von derselben Beschaffenheit und Gröfse an, und mifst man dann, indem man sich auf die entgegengesetzte Seite des Instrumentes begibt, den Winkel auch mit Hülfe dieser Kreuze, so erhält man einen Fehler, der dem vorigen *gleich*, aber *entgegengesetzt* ist. Nimmt man nun aus den Resultaten der beiden Messungen das arithmetische Mittel, so mufs dieses dem *richtigen* Winkel gleich seyn. Diefs ist ein bedeutender Vortheil, denn man hat dann nicht nöthig, die Kreuze sehr entfernt vom Instrumente anzubringen, kann daher auf ihre richtige Construction die gehörige Sorgfalt anwenden, und man bekommt, besonders durch die gröfsere Nähe der unteren Kreuze, sehr deutliche Bilder. Am besten ist es freilich, wenn das Zimmer zwei einander entgegengesetzte Fenster hat, an welchen man die Fadenkreuze anbringen kann. Das Instrument mufs dann in der Mitte zwischen beiden aufgestellt werden. Die Stelle des zweiten Fadenkreuzes kann jedoch, wenn man ein solches Zimmer nicht hat, auch ein Spiegel vertreten, den man an der entgegengesetzten Seite, ganz in der Nähe des Krystalls, und parallel mit der Ebene des Fadenkreuzes aufstellt. Das Bild im Spiegel vom gegenüberliegenden Fadenkreuze erscheint dann an der Stelle des andern Kreuzes.

Auch für den Fehler μ des Paragraphs 5. gilt dieser Satz. Setzt man nämlich x und x' *negativ*, so behalten zwar A und C ihre Werthe, aber B nimmt den

entgegengesetzten Werth an. Es wird dann

$$\cos.\gamma = \frac{BC \pm A\sqrt{A^2+B^2}}{A^2+B^2}.$$

Der Fehler

$$\mu = -\tfrac{1}{2}\text{arc.}\left(\text{tg.} = \frac{xy'-x'y+a(x+x')\sin.\gamma+a(y-y')\cos.\gamma}{xx'+yy'+a(x+x')\cos.\gamma+a(y-y')\sin.\gamma}\right)$$
$$+\tfrac{1}{2}\text{arc.}\left(\text{tg.} = \frac{xy'-x'y+a(x+x')\sin.\gamma'+a(y-y')\cos.\gamma'}{xx'+yy'-a(x+x')\cos.\gamma'+a(y-y')\sin.\gamma'}\right)$$

wird auf der *negativen* Seite auch hier am gröfsten, wenn die erste Tangente ihr Maximum, und die andere ihr Minimum erreicht hat. Es folgt hieraus, dafs

$$\cos.\gamma = \frac{BC + A\sqrt{A^2+B^2}}{A^2+B^2} \quad \text{und}$$

$$\cos.\gamma' = \frac{BC - A\sqrt{A^2+B^2}}{A^2+B^2}$$

zu setzen ist. Die Werthe von $\cos.\gamma$ und $\cos.\gamma'$ sind daher die *entgegengesetzten* von denen des vorhergehenden Paragraphs. Setzen wir nun diese statt jene in die Gleichung für μ, so erhalten wir einen Werth für μ, welcher dem des vorhergehenden Paragraphs *gleich* und *entgegengesetzt* ist.

Also auch hier ist beim *Rückwärtsmessen* der entstehende Fehler dem verhergehenden gleich und entgegengesetzt, und das arithmetische Mittel aus beiden Messungen gibt auch hier den wahren Werth des Winkels. Es entspringt hieraus der grofse Vortheil, dafs man nicht nöthig hat, die unteren Kreuze eben so weit vom Centrum zu entfernen, als die Fadenkreuze, denn der Fehler, welcher dadurch entsteht, verschwindet doch durch das Rückwärtsmessen.

§. 7. Ein anderer Fehler entspringt aus der schiefen Stellung der zu messenden Kante gegen die Ebene des Instrumentes. Die Ursache davon ist die Dicke der Kreuze, und es ist daher ein wichtiger Umstand, diese

so gering wie möglich zu machen. In der Figur 21 sey $a\,b\,c\,d$ das Kreuz N, und $a'\,b'\,c'\,d'$ das Bild des Fadenkreuzes Q. Man kann behaupten, dafs die hier gezeichnete Stellung, wo die Kreuze an ihren Enden zusammenstofsen, also da einander nicht ein Mal zum Theil decken, die ungünstigste seyn müsse. Es fragt sich nun, welchen Winkel diese beiden Kreuze mit einander bilden. Ist e die halbe Höhe der beiden Kreuze, d die Dicke eines Faden, und ε jener Winkel, so kann man $\sin.\varepsilon = \frac{d}{e}$ setzen.

In diesem Falle, wo die beiden Kreuze nicht vollkommen zusammenfallen, hat man daher nicht den Winkel gemessen, welchen (Fig. 22) die beiden spiegelnden Ebenen AD und AF mit einander bilden, sondern einen Winkel EAC, dessen Gröfse durch die ebenen Winkel BAE und $BAC = 90^\circ \pm \varepsilon$ bestimmt ist. Beschreibt man aus A ein sphärisches Dreieck $\alpha\beta\gamma$, so ist in ihm

$$\cos.\alpha = \frac{\cos.\beta\gamma - \cos.\alpha\beta\,\cos.\alpha\gamma}{\sin.\alpha\beta\,\sin.\alpha\gamma}.$$

Setzt man $\beta\gamma = \alpha - \mu'$, wo μ' der Fehler ist, ferner $\alpha\beta = b$ und $\alpha\gamma = c$, so ist

$$\cos.\alpha = \frac{\cos.(\alpha-\mu') - \cos.b\,\cos.c}{\sin.b\,\sin.c}.$$

Da μ' sehr klein ist, so kann man $\cos.\mu' = 1$ und $\sin.\mu' = \mu'$ setzen, und man erhält dann

$$\cos.\alpha\,\sin.b\,\sin.c = \cos.\alpha + \mu'\sin.\alpha - \cos.b\,\cos.c,$$

$$\text{d. i.}\quad \mu' = \frac{\cos.b\,\cos.c - \cos.\alpha\,(1 - \sin.b\,\sin.c)}{\sin.\alpha}.$$

Die Winkel b und c sind aber sehr nahe 90°, daher kann man ihre Sinusse der Einheit gleich setzen. Thut man diefs, so erhält man die einfache Gleichung

$$\mu' = \frac{\cos.b\,\cos.c}{\sin.\alpha}.$$

Je kleiner α ist, desto gröfser wird μ', und für $\alpha = \mu'$, denn kleiner kann α nicht werden, ist μ' am gröfsten. Wir erhalten auf diese Weise

$$\mu' = \sqrt{\cos. b \cos. c.}$$

Die Winkel b und c sind aber $= 90^\circ \pm \varepsilon$, also ihre Cosinusse einander gleich, und so folgt denn

$$\mu' \text{ oder } \sin. \mu' = \cos. (90^\circ \pm \varepsilon), \text{ d. i.}$$

$$\mu' = \pm \varepsilon.$$

Beispiel 7. Es sey $d = \frac{1}{4}$ Linie und $e = 1$ Fufs, so ist

$$\sin. \varepsilon = \frac{1}{576} \text{ und } \mu' = 0^\circ, 5', 58''.$$

Man sieht hieraus, dafs auch dieser Fehler sehr bedeutend werden kann.

§. 8. Es ist nicht nur eine unerläfsliche Bedingung, die Kreuze so dünn wie möglich zu machen, sondern man mufs ihnen auch ein solches Verhältnifs der Dicken geben, dafs diese Dicken im Auge einerlei scheinbare Gröfse haben. Ist dieses nicht der Fall, so kann das Bild des Fadenkreuzes mit dem andern Kreuze an den Grenzen nicht zusammen fallen, und dann ist eine sichere Stellung unmöglich. Aber auch aufserdem ist es nicht möglich, ganz fehlerfrei zu messen.

Es sey ab (Fig. 23) die Dicke des horizontalen Faden des Fadenkreuzes Q, C das Centrum des Instrumentes, und $a'b'$ die Dicke der horizontalen Linie des Kreuzes N; so mufs, wenn man ganz ohne Fehler messen will, das Bild von ab, $a'b'$ vollkommen decken, aber auch nicht überdecken, d. h. nicht über die Grenzen von $a'b'$ hinaus gehen. Diefs hat man jedoch nicht ganz in seiner Gewalt; in den meisten Fällen wird sich das Bild von ab mit $a'b'$ nur zum Theil decken, und im ungünstigsten Falle werden beide Kreuze nur an ihren Grenzen zusammenstofsen. Es fragt sich daher: wie grofs ist der daraus entspringende Fehler?

Dieser Fehler ist dem Winkel $a'Cb$ gleich zu setzen, und da er sowohl, als auch $a'b'$ immer sehr klein ist, so kann man

$$\sin. a'Cb' = a'Cb' = \frac{a'b'}{CN} = \frac{a'b'}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

setzen.

Diesen Fehler kann man aber bei Einer Messung zwei Mal begehen; setzt man ihn daher $= \frac{\mu''}{2}$, und die Breite $a'b' = d$, so ist

$$\mu'' = \frac{2d}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Beispiel 8. Es sey $d = \frac{1}{2}$ Linie, so ist der Fehler für das Beispiel 5:

$$\mu'' = \frac{1}{144\sqrt{4+1}} = 0^\circ,\ 10',\ 40'',6.$$

Für das Beispiel 6. ist dieser Fehler

$$\mu'' = \frac{1}{144\sqrt{34}} = 0^\circ,\ 4',\ 6''.$$

§. 9. Ein weiterer Fehler entspringt aus der Excentricität des Instruments.

In der Figur 24 sey C das wahre, und C' das falsche Centrum des Instruments. Die Lage des letztern werde durch die beiden Coordinaten $CA = a$ und $AC' = b$ angegeben. Der Radius des eingetheilten Kreises, nämlich $CO = CO'$, sey $= r$. Bei O befinde sich der Vernier, $OC'O'$ sey der richtige Winkel α, folglich $OCO' = \beta$ der falsche, von dem Vernier angegebene Winkel.

Es ist

$$\text{tang.}\, O = \frac{C'A}{OA} = \frac{b}{r+a},$$

daher

$$\text{tang. } O'C'D = \text{tang. } (O'CO - DC'O)$$
$$= \text{tang. } (\alpha - O)$$
$$= \frac{\text{tang. } \alpha - \text{tang. } O}{1 + \text{tang. } \alpha \text{ tang. } O}$$
$$= \frac{\text{tang. } \alpha - \dfrac{b}{r+a}}{1 + \text{tang. } \alpha \dfrac{b}{r+a}}$$
$$= \frac{(r+a)\text{ tang. } \alpha - b}{r + a + b \text{ tang. } \alpha}.$$

Aber tang. $O'C'D$ ist auch

$$= \frac{O'D}{C'D} = \frac{O'B - DB}{CB + CA} = \frac{r \sin. \beta - b}{r \cos. \beta + a},$$

also ist

$$\frac{r \sin. \beta - b}{r \cos. \beta + a} = \frac{(r+a) \text{ tang. } \alpha - b}{r + a + b \text{ tang. } \alpha} \quad \text{oder}$$

$$[(r \cos. \beta + a)(r + a) - b (r \sin. \beta - b)] \text{ tang. } \alpha =$$
$$= (r + a)(r \sin. \beta - b) + b (r \cos. \beta + a).$$

Daraus folgt

$$\text{tang. } \alpha = \frac{(r+a)(r \sin. \beta - b) + b(r \cos. \beta + a)}{(r+a)(r \cos. \beta + a) - b(r \sin. \beta - b)}.$$

Löst man die Parenthesen auf, und läfst man die mit den Producten und Quadraten von a und b behafteten Glieder weg, welches man wegen ihrer Kleinheit recht gut kann, so erhält man

$$\text{tang. } \alpha = \frac{(r+a) \sin. \beta - b(1 - \cos. \beta)}{(r+a) \cos. \beta + a - b \sin. \beta}.$$

Mifst man nun zwei bekannte Winkel sehr scharf, z. B. den stumpfen und spitzen Winkel einer Theilungsgestalt von der dodekaëdrischen Granatblende, nämlich die Winkel von 60° und 120°, so kann man mit Hülfe dieser Gleichung, aus diesen und den von dem Instrumente angegebenen Winkeln, die Coordinaten des falschen Centrums, also auch die Gröfse der Excentricität bestimmen.

Der Fehler ist

$$\mu''' = \alpha - \beta = \text{arc.}\left(\text{tg.} = \frac{(r+a)\sin.\beta - b(1-\cos\beta)}{(r+a)\cos.\beta + a - b\sin.\beta}\right) - \beta.$$

Daraus folgt

$$\text{tang.}\,\mu''' = \frac{\frac{(r+a)\sin.\beta - b(1-\cos.\beta)}{(r+a)\cos.\beta + a - b\sin.\beta} - \text{tang.}\,\beta}{1 + \frac{(r+a)\sin.\beta - b(1-\cos.\beta)}{(r+a)\cos.\beta + a - b\sin.\beta}\cdot\text{tang.}\,\beta}$$

$$= \frac{(r+a)\sin.\beta - b(1-\cos.\beta) - (r+a)\sin.\beta - (a - b\sin.\beta)\,\text{tg.}\beta}{(r+a)\cos.\beta + a - b\sin.\beta + [(r+a)\sin.\beta - b(1-\cos\beta)]\,\text{tg}\,\beta}$$

$$= \frac{b(1-\cos.\beta) - a\sin.\beta}{r + a(1+\cos.\beta) - b\sin.\beta};$$

dafür kann man in der Ausübung

$$= \frac{b(1-\cos.\beta) - a\sin.\beta}{r}$$

setzen.

Kennt man nun die Coordinaten a und b, so läfst sich mit Hülfe dieser und dem gemessenen Winkel β der Fehler μ''' sogleich berechnen.

Untersuchen wir jetzt, für welchen Werth von β er ein Maximum wird. Die Bedingungsgleichung ist diese:

$$b\sin.\beta = a\cos.\beta, \quad \text{also}$$

$$\text{tang.}\,\beta = \frac{a}{b}.$$

Um zu wissen, ob für $\text{tang.}\,\beta = \frac{a}{b}$, μ ein Maximum oder Minimum geworden sey, ist $b\sin.\beta - a\cos.\beta$ zu differenziren, und zu sehen, ob dieses zweite Differenzialverhältnifs negativ oder positiv ausfällt. Es ist

$$= b\cos.\beta + a\sin.\beta,$$

$$= b(\cos.\beta + \text{tang.}\,\beta\sin.\beta),$$

$$= \frac{b(\cos.\beta^2 + \sin.\beta^2)}{\cos.\beta} = \frac{b}{\cos.\beta},$$

also *negativ* für einen negativen Werth von $\cos.\beta$. Die Bedingungsgleichung ist aber $b\sin.\beta = a\cos.\beta$, folg-

lich muſs auch sin. β einen negativen Werth annehmen. Soll also der Fehler μ''' am gröſsten ausfallen, so müssen

$$\cos.\beta = -\frac{1}{\sqrt{\left(1+\left(\frac{a}{b}\right)^2\right)}} = \frac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad \text{und}$$

$$\sin.\beta = \frac{-\frac{a}{b}}{\sqrt{\left(1+\left(\frac{a}{b}\right)^2\right)}} = \frac{-a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

in die Formel für μ''' eingesetzt werden. Es entsteht hieraus folgende Gleichung:

$$\text{tang.}\,\mu''' = \frac{b+\sqrt{a^2+b^2}}{r}.$$

Für $b = 0$ ist $\text{tang.}\,\mu''' = \frac{a}{r}$, und

» $a = 0$ » $\text{tang.}\,\mu''' = \frac{2b}{r}$.

Beispiel 9. Man habe den Winkel von 60° nur 59°, 55′, dagegen den Winkel von 120° = 120°, 5′ gefunden. Es sollen, wenn der Radius des Instrumentes zur Einheit angenommen wird, die Coordinaten a und b gefunden, und dann bestimmt werden, wie grofs der gröfste Fehler bei diesem Instrumente ausfällt.

Wir haben zuvörderst folgende beide Gleichungen zu vereinigen:

$$\text{tang.}\,60^\circ = \frac{(1+a)\,\sin.59^\circ, 55' - b\,(1-\cos.59^\circ, 55')}{(1+a)\,\cos.59^\circ, 55' + a - b\sin.59^\circ, 55'},$$

$$\text{tang.}\,120^\circ = \frac{(1+a)\,\sin.120^\circ, 5' - b\,(1-\cos.120^\circ, 5')}{(1+a)\,\cos.120^\circ, 5' + a - b\sin.120^\circ, 5'}.$$

Entwickelt man aus beiden Gleichungen b, und setzt die Werthe für b einander gleich, so erhält man eine Gleichung, worin nur a vorkommt; diese hat man nun auf a aufzulösen.

Es ist

$$b = \frac{(1+a)(\cos. 59°, 55' \text{ tang. } 60° - \sin. 59°, 55') + a \text{ tang. } 60°}{\sin. 59°, 55' \text{ tang. } 60° - (1 - \cos. 59°, 55')}$$

und auch

$$= \frac{(1+a)(\cos. 120°, 5' \text{ tang. } 120° - \sin. 120°, 5') + a \text{ tang. } 120°}{\sin. 120°, 5' \text{ tang. } 120° - (1 - \cos. 120°, 5')}$$

$$= \frac{(1+a)(\cos. 59°, 55' \text{ tang. } 60° - \sin. 59°, 55') - a \text{ tang. } 60°}{-\sin. 59°, 55' \text{ tang. } 60° - (1 + \cos. 59°, 55')}.$$

Nun ist aber

$$\cos. 59°, 55' \text{ tang. } 60° - \sin. 59°, 55' = 0{,}002909,$$
$$\sin. 59°, 55' \text{ tang. } 60° = 1{,}49874,$$
$$\text{tang. } 60° = 1{,}7320508,$$
$$\cos. 59°, 55' = 0{,}5012591,$$

daher

$$\frac{0{,}002909\,(1+a) + 1{,}7320508\,a}{1{,}49874 - 0{,}49874} = \frac{0{,}002909\,(1+a) - 1{,}7320508\,a}{-1{,}49874 - 1{,}501159}, \text{ d. i.}$$

$$-0{,}002909 = 1{,}740776\,a,$$

folglich

$$a = -\frac{0{,}002909}{1{,}740776} = -0{,}001671 \text{ und}$$

$$b = 0{,}002909 - 1{,}734959 \,.\, 0{,}001671$$
$$= 0{,}00001$$

unbeachtsam.

Hieraus folgt der gröfste Fehler

$$\mu''' = -0{,}001681 = 0°, 5', 47''.$$

§. 10. Setzen wir in der Gleichung

$$\text{tang. } \mu''' = \frac{b(1 - \cos. \beta) - a \sin. \beta}{r}$$

a und b *negativ*, so verwandelt sie sich in

$$\text{tang. } \mu''' = -\frac{b(1 - \cos. \beta) - a \sin. \beta}{r};$$

und setzen wir für $\sin. \beta$ und $\cos. \beta$ diejenigen Werthe ein, für welche $\frac{b(1 - \cos. \beta) - a \sin. \beta}{r}$ ein Maximum

wird (§. 9.), so erhalten wir

$$\text{tang.}\,\mu''' = -\frac{b + \sqrt{a^2 + b^2}}{r},$$

gerade den entgegengesetzten Werth von dem vorhergehenden.

Dreht man daher das Instrument um 180° herum, so dafs O'' nach O, und O nach O'', ferner C nach C'', und A nach A' kommt, also die Coordinaten $C''A'$ und $A'C'$ eine entgegengesetzte Lage annehmen, und mifst man dann den vorigen Winkel noch ein Mal, so begeht man hierbei einen Fehler, der dem vorigen gleich, aber entgegengesetzt ist. Das arithmetische Mittel aus beiden Messungen wird dann den wahren Werth des gemessenen Winkels angeben.

Beispiel 10. Es sey $a = 0{,}002$, $b = 0$, $r = 1$, und der gemessene Winkel $\alpha = 45°$, wie grofs ist der durch das Instrument angegebene Winkel β?

Die Tangente von 45° ist $= 1$, daher ist die Gleichung, aus welcher sich β bestimmen läfst:

$$1 = \frac{1{,}002 \sin.\beta}{1{,}002 \cos.\beta + 0{,}002} \quad \text{oder}$$

$$\sin.\beta - \cos.\beta - \frac{0{,}002}{1{,}002} = 0.$$

Hieraus folgt

$$\cos.\beta = \frac{-\frac{0{,}002}{1{,}002} + \sqrt{2}}{2} = 0{,}7061088 \quad \text{und}$$

$$\beta = 45°,\ 4',\ 51''.$$

Für eine *Gegenmessung* ist

$$\sin.\beta - \cos.\beta + \frac{0{,}002}{0{,}998} = 0, \quad \text{also}$$

$$\cos.\beta = \frac{0{,}0020040 + 1{,}4142136}{2} = 0{,}7081088 \quad \text{und}$$

$$\beta = 44°,\ 55',\ 8''.$$

Das arithmetische Mittel aus beiden Messungen gibt

44°, 59′, 59″,5, wofür recht gut 45° gesetzt werden kann. Dieſs ist auch der gemessene Winkel.

§. 11. Fehler, die aus der unrichtigen Eintheilung des Instrumentes hervorgehen, sind natürlich nicht zu berechnen, und also auch nicht zu umgehen. Dagegen sind sie durch die Multiplication der Beobachtungen bis zu jeder beliebigen Kleinheit zu vermindern. Bei dieser Operation darf man die eingetheilte Ebene nie rückwärts in der Richtung RZH (Fig. 18) drehen, denn diese Drehung geschieht bloſs mit der Axe des Instruments, sondern man dreht sie nur in der Richtung HZR, und zwar dann, wenn man die Fläche CF wieder in die erste Lage gebracht hat, und die Fläche CE in die spiegelnde Lage bringen will.

Miſst man auf diese Art einen und denselben Winkel n Mal hinter einander, hat das Instrument während diesem m Mal 180 Grad zurückgelegt, und zeigt es dann noch α Grade, so läſst sich daraus der gemessene Winkel x auf folgende Weise bestimmen.

Da der gemessene und der Umdrehungswinkel einander zu 180° ergänzen, so muſs das Instrument $n(180°-x)$ zurückgelegt haben. Es hat aber auch $= m\,180° + 180° - \alpha$ zurückgelegt, daher ist

$$n(180° - x) = m\,180° + 180° - \alpha,$$

folglich

$$x = \frac{(n - m - 1)\,180° + \alpha}{n}.$$

Wenn daher auch der Winkel α von der unrichtigen Eintheilung des Instrumentes etwas falsch angegeben wird, so ist doch der daraus entspringende Fehler von dem gemessenen Winkel x schon n Mal kleiner als der ursprüngliche, wenn man nämlich n Beobachtungen angestellt hat.

§. 12. Die in den vorhergehenden Paragraphen be-

trachteten Fehler sind von zweierlei Art: einige sind bei einer und derselben Messung constant, andere sind es nicht; diese lassen sich durch die Multiplication der Beobachtungen vermindern, jene nicht. Zu den Fehlern der ersten Art gehören alle diejenigen, welche daraus hervorgehen, dafs die zu messende Kante mit der Axenlinie des Instrumentes nicht zusammenfällt, also die in den Paragraphen 3, 4, 5, 6 und 7 betrachteten Fehler. Auf die Verminderung dieser Fehler ist daher eine besondere Sorgfalt zu verwenden. Man hat daher die Kreuze so grofs und dünn wie möglich zu machen, ihnen grofse Abscissen, und insbesondere grofse Ordinaten zu geben, und sie überhaupt sehr sorgfältig zu construiren. Es ist defshalb das Rückwärtsmessen ganz besonders zu empfehlen. Dafs man endlich mit der gröfsten Sorgfalt beobachten und besonders die zu messende Kante der Axenlinie des Instrumentes so nahe wie möglich bringen mufs, versteht sich von selbst.

Fehler der andern Art sind diejenigen, welche in der Dicke der Horizontallinie des Fadenkreuzes ihren Grund haben (§. 8.), und die, welche aus der unrichtigen Eintheilung des Randes vom Instrumente und aus der Excentricität des Instrumentes hervorgehen. Dafs die ersteren Fehler veränderlich sind, folgt daraus, dafs es eben so wahrscheinlich ist, das Instrument, oder die Axe desselben, um die Dicke der horizontalen Linie des Fadenkreuzes zu viel, als zu wenig zu drehen. Der Fehler der Excentricität wird, so wie der Fehler der unrichtigen Eintheilung, durch die Multiplication der Beobachtungen vermindert, er kann aber auch durch eine *Gegenmessung* vernichtet werden.

Kommt es darauf an, einen Winkel sehr scharf zu messen, so verfahre man auf folgende Art:

Man messe den gegebenen Winkel zehn oder meh-

rere Male hinter einander, und berechne ihn dann mit Hülfe der gegebenen Formel aus der Anzahl der Messungen, aus der Anzahl, wie oft das Instrument 180 Grad zurückgelegt hat, und aus dem von dem Vernier zuletzt angegebenen Winkel α. Ist man nun nicht sicher, dafs das Instrument mit Excentricität behaftet ist, so drehe man es um 180 Grad herum, und wiederhole die vorige Operation. Aus den Resultaten beider Operationen nehme man das arithmetische Mittel. Jetzt begebe man sich auf die andere Seite des Instruments, und mache mit Hülfe der beiden andern, den vorigen gegenüber liegenden, Kreuzen die vorigen Operationen zum zweiten Male. Auch aus diesen nehme man das arithmetische Mittel. Nimmt man endlich aus diesen beiden arithmetischen Mitteln wieder das arithmetische Mittel, oder, was dasselbe ist, addirt man die vier erhaltenen Resultate, und dividirt sie durch 4, so erhält man den gemessenen Winkel mit der gröfsten Schärfe, weil man dadurch die begangenen Fehler theils vermindert und theils sogar vernichtet hat.

Das Goniometer von *Malus*.

§. 13. In der Figur 25 sey A die mit Hülfe einer Libelle vollkommen horizontal gestellte Ebene des Instruments, C dessen Centrum, und MOC die Richtung des Fernrohrs. Durch die beiden Coordinaten $CM=y$ und $MN=x$ werde der Punct N bestimmt, durch welchen die durch den Faden eines Bleilothes gebildete Verticallinie geht. Der zu messende Winkel sey FDE oder $E'D'F'$, und die Visirpuncte auf den Krystallflächen mögen das eine Mal F, das andere Mal E' seyn. Ihre Lage gegen das Centrum werde durch die Linien $CF=a$ und $CE'=b$ bestimmt.

Man klebt auch hier den Krystall, dessen Winkel

man messen will, entweder unmittelbar mit Wachs auf die hervorragende Axe *C* des Instruments, oder auf einen besonderen Apparat.

Die Vorrichtung mit der Nufs ist hier besonders zu empfehlen. Die verticale Stellung gibt man der zu messenden Kante *D* auf ähnliche Weise wie beim Reflexionsgoniometer. Man sieht durch das Fernrohr, und dreht den Krystall mittelst der Axe so lange, bis das Bild von der Linie *N* den verticalen Faden im Fernrohre durchschneidet. Jetzt drückt man das Wachs mit dem Krystalle so lange hin und her, oder stellt die Schrauben des Apparates so lange, bis das Bild des Fadens *N* mit dem Faden im Fernrohre vollkommen zusammenfällt. Man kann dann behaupten, dafs die spiegelnde Fläche *D F* auf der horizontalen Ebene *N F D*, folglich auch auf der Ebene des Instrumentes senkrecht stehe. Hierauf drehe man die Axe des Instrumentes mit dem darauf befestigten Krystall von der Linken zur Rechten, bis das Bild von *N* in der Fläche *D' E'* erscheint, und wiederhole die vorhergehende Operation. Hat man auf diese Art auch die Fläche *D' E'* vertical gestellt, und dann gefunden, dafs dadurch die Fläche *D F* ihre verticale Lage nicht verloren hat, so ist man gewifs, dafs die Kante *D* vertical steht.

Ein wichtiger Gegenstand ist hier, dafs der Faden im Fernrohre gehörig fein sey, und vollkommen in der verticalen Ebene *C O M* liege. Das letztere kann man mit Hülfe eines, die verlängerte *M O C* schneidenden, Bleilothes und mittelst einer Mikrometerschraube am Ringe des Fadens ohne grofse Mühe machen. Man kann hier der Alhidadenregel an jedem Ende Einen Vernier geben, und sie zugleich mit einer Mikrometerschraube versehen. Das erstere ist ein bedeutender Vorzug vor dem Goniometer von *Wollaston*, denn man kann mit

dieser Vorrichtung durch eine einzige Messung den Fehler der Excentricität vermeiden, indem man das Mittel aus beiden Beobachtungen an den Vernieren nimmt.

§. 14. Setzt man auch hier den gemessenen Winkel der Ergänzung des Umdrehungswinkels zu zwei Rechten gleich, so begeht man einen Fehler, so lange nicht $a = b$ ist, d. i. F mit E' zusammenfällt. Denn in dem Vierecke $CEDF$ messen alle vier Winkel zusammen vier Rechte, $C + D$ betragen aber, der Voraussetzung gemäfs, schon zwei Rechte, folglich müssen auch $CED + CFD$, d. i. $CE'D' + CFD$, zwei Rechte ausmachen. Daraus folgt der Parallelismus der Linien DFd und $D'E'd'$, und hieraus wieder, dafs die Winkel MFd, $ME'D'$, $ME'N$ und MFN einander gleich seyn müssen, welches nicht anders geht, als dafs F und E nur Einen Punct ausmachen.

Der Winkel, um welchen man DFd drehen mufs, damit diese Linie mit der andern Linie $d'E'D'$ parallel wird, ist offenbar dem begangenen Fehler gleich. Nennen wir ihn ebenfalls μ, so ist also

$$\mu = CE'd' - CFD.$$

Nun ist aber

$$CE'd' = OE'D' = NE'd',$$

daher

$$CE'd' = \frac{CE'N}{2},$$

und eben so

$$CFD = \frac{CFN}{2}.$$

Es ist ferner

$$CE'N = 180^0 - NE'M$$

und

$$CFN = 180^0 - NFM,$$

folglich

$$\mu = \frac{CE'N - CFN}{2}$$
$$= \frac{180^\circ - NE'M - 180^\circ + NFM}{2}$$
$$= \frac{NFM - NE'M}{2}.$$

Nun ist endlich

$$\text{tang. } NFM = \frac{x}{y-a} \quad \text{und}$$
$$\text{tang. } NE'M = \frac{x}{y-b},$$

daher

$$\mu = \tfrac{1}{2}\text{arc.}\left(\text{tang.} = \frac{x}{y-a}\right) - \tfrac{1}{2}\text{arc.}\left(\text{tang.} = \frac{x}{y-b}\right).$$

Der Fehler μ wird um so kleiner, je mehr sich die Gröfsen $\frac{x}{y-a}$ und $\frac{x}{y-b}$ einander nähern, und nimmt zu, je mehr sie sich von einander entfernen. Macht man daher a und $-b$ so grofs wie möglich, etwa einige Linien, so erhält man den gröfsten Fehler von μ, nämlich

$$\mu = \tfrac{1}{2}\text{arc.}\left(\text{tang.} = \frac{x}{y-a}\right) - \tfrac{1}{2}\text{arc.}\left(\text{tang.} = \frac{x}{y+a}\right),$$

d. i.

$$2\mu = \text{arc.}\left(\text{tang.} = \frac{x}{y-a}\right) - \text{arc.}\left(\text{tang.} = \frac{x}{y+a}\right)$$

oder

$$\text{tang. } 2\mu = \frac{\frac{x}{y-a} - \frac{x}{y+a}}{1 + \frac{x}{y-a}\cdot\frac{x}{y+a}} = \frac{2ax}{x^2+y^2}.$$

Der Winkel 2μ ist noch sehr klein, daher kann man ihn seiner Tangente gleich setzen. Wir erhalten dann

$$\mu = \frac{ax}{x^2+y^2}.$$

Dieser Werth von μ unterscheidet sich von dem im §. 4. für *Wollaston's* Reflexionsgoniometer gefundenen

nur durch den Factor 2; es folgt hieraus, dafs für dasselbe a und für einerlei Coordinaten der gröfste Fehler bei dem Goniometer von *Malus* nur halb so grofs als beim *Wollaston*'schen Goniometer ist. Diefs ist ein beachtungswerther Vorzug von *Malus* Goniometer.

Beispiel 11. Es sey $x = y = 20$ Fufs, $a = 1$ Linie, und b das eine Mal $= 0$, und das andere Mal $= -1$ Linie, wie grofs ist der daraus entspringende Fehler?

Für den ersten Fall ist, wenn man in

$$\text{tang. } 2\mu = \frac{(a-b)x}{(y-a)(y-b) + x^2}$$

$a = \frac{1}{144}$, $b = 0$, $x = y = 20$ setzt,

$$\mu = \frac{20}{288\left[(20 - \frac{1}{144})\,20 + 20^2\right]} = \frac{1}{11518} = 0^0,\ 0',\ 18''.$$

Für den zweiten Fall ist

$$\mu = \frac{20}{144\,(20^2 + 20^2)} = 0^0,\ 0',\ 36''.$$

§. 15. Setzt man in der aufgefundenen Gleichung $\mu = \frac{ax}{x^2+y^2}$, x *negativ*, so wird $\mu = -\frac{ax}{x^2+y^2}$, es entsteht also ein dem vorigen gerade entgegengesetzter Fehler. Hängt man daher auch auf die andere Seite von MC, in derselben Entfernung wie N, ein Bleiloth, und mifst man auch mit Hülfe dessen den Winkel, so begeht man einen Fehler, der dem vorigen gleich und entgegengesetzt ist. Nimmt man nun aus beiden Messungen das arithmetische Mittel, so bekommt man zum Resultate den richtigen Winkel.

Es versteht sich übrigens von selbst, dafs dieses nur näherungsweise wahr ist.

Die übrigen Fehler, welche beim Winkelmessen mit dem Reflexionsgoniometer von *Malus* begangen werden können, sind wie die beim *Wollaston*'schen Goniometer zu beurtheilen.

III.

Theorie der mittleren Werthe;

von

Dr. *C. Fr. Hauber.*

(Fortsetzung.)

35.

Diese allgemeinen Betrachtungen wollen wir nun auf die wichtigsten Methoden der Bestimmung der Grössen ξ, v, z . . . aus den Gleichungen (1) anwenden.

I. Das von *Tobias Maier* gelehrte Verfahren, das ehemals gebräuchlich war, besteht darin, dafs man zuerst die Coefficienten von ξ in allen Gleichungen (1) positiv (oder in allen negativ) macht, und die Gleichungen addirt, dann eben so in Beziehung auf die Coefficienten von v, z . . . verfährt, wodurch man r Gleichungen erhält, aus denen, die Summe der in jeder von denselben theils mit ihrem Zeichen theils mit entgegengesetztem Zeichen genommenen Fehler $\varepsilon_1, \ldots \varepsilon_n, \ldots = 0$ gesetzt, ξ, v, z . . . durch Elimination bestimmt werden.

Man sieht leicht, dafs diese Methode nicht in allen Fällen anwendbar ist, weil sie Abwechslung in den Zeichen der Coefficienten voraussetzt. Wenn z. B. in jeder von den Gleichungen (1) die Coefficienten von ξ mit den Coefficienten von v einerlei Zeichen haben, so kommt man dadurch, dafs man die Coefficienten von ξ in allen Gleichungen positiv macht, und dann die Gleichungen addirt, auf eben dieselbe Endgleichung, wie dadurch, dafs man die Coefficienten von v in allen Gleichungen positiv macht, und dann die Gleichungen addirt; man erhält also nicht so viele von einander verschiedene

Endgleichungen, als gesuchte Gröfsen sind. Eben so ist es auch, wenn die Coefficienten von ξ und von v in jeder von den Gleichungen (1) entgegengesetzte Zeichen haben.

Das Summenzeichen Σ beziehe sich auf diejenigen unter den Gleichungen (1), in denen die Coefficienten von ξ ursprünglich positiv sind, und das Summenzeichen S auf diejenigen, in denen die Coefficienten von ξ ursprünglich negativ sind, die also mit -1 multiplicirt werden müssen, um die Coefficienten von ξ überall positiv zu machen, und es sey

$$\Sigma\delta_y - S\delta_n = \mathfrak{D},\ \Sigma a_y - S a_n = \mathfrak{G},\ \Sigma b_y - S b_n = \mathfrak{H},$$
$$\Sigma c_y - S c_n = \mathfrak{K},\ \ldots.$$

Indem man nun in allen Gleichungen (1) die Coefficienten von ξ positiv macht, und dann die Gleichungen addirt, erhält man

$$-\Sigma\varepsilon_y + S\varepsilon_n = -\mathfrak{D} + \mathfrak{G}\xi + \mathfrak{H}v + \mathfrak{K}\zeta + \ldots$$

Was Σ, S, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{K}$ ... in Beziehung auf die Coefficienten von ξ sind, das seyen Σ', S', $\mathfrak{D}'$, $\mathfrak{G}'$, $\mathfrak{H}'$ $\mathfrak{K}'$ ... in Beziehung auf die Coefficienten von v, und Σ'', S'', $\mathfrak{D}''$, $\mathfrak{G}''$, $\mathfrak{H}''$, $\mathfrak{K}''$ ... in Beziehung auf die Coefficienten von ζ, u. s. w., und man setze

$$\Xi = -\Sigma\varepsilon_y + S\varepsilon_n,$$
$$Y = -\Sigma'\varepsilon_{y'} + S'\varepsilon_{n'},$$
$$Z = -\Sigma''\varepsilon_{y''} + S''\varepsilon_{n''},$$
u. s. w.;

so entsprechen den Gleichungen (13) hier folgende:

$$\left.\begin{aligned} \Xi &= -\mathfrak{D} + \mathfrak{G}\xi + \mathfrak{H}v + \mathfrak{K}\zeta + \ldots, \\ Y &= -\mathfrak{D}' + \mathfrak{G}'\xi + \mathfrak{H}'v + \mathfrak{K}'\zeta + \ldots, \\ Z &= -\mathfrak{D}'' + \mathfrak{G}''\xi + \mathfrak{H}''v + \mathfrak{K}''\zeta + \ldots, \\ &\text{u. s. w.} \end{aligned}\right\} \quad (16)$$

Aus diesen Gleichungen bestimmt man ξ, v, ζ ...

durch Elimination, indem man für Ξ, Y, Z . . . setzt o. Um die Genauigkeit der so erhaltenen Werthe von ξ, v, z . . . zu bestimmen, mufs man ΣA_n^2, ΣB_n^2, ΣC_n^2 . . . suchen.

Der in Nro. 34 durch P bezeichnete Factor ist hier $= +1$ für diejenigen unter den Gleichungen (1), die zu der Summe Σ gehören, und $= -1$ für diejenigen, die zu der Summe S gehören. Eben so ist der Factor $Q = +1$ für die zu der Summe Σ', und $= -1$ für die zu der Summe S' gehörigen Gleichungen; der Factor $R = +1$ für die zu der Summe Σ'', und $= -1$ für die zu der Summe S'' gehörigen Gleichungen, u. s. w.

Unter jenen s Gleichungen seyen ρ solche, in deren jeder die Coefficienten aller gesuchten Gröfsen ξ, v, z . . . einerlei Zeichen haben; so gehört jede von diesen ρ Gleichungen entweder sowohl zu der Summe Σ, als auch zu Σ', zu Σ'' u. s. w., oder sowohl zu der Summe S, als auch zu S', zu S'' u. s. w., daher ist für jede von denselben entweder ein jeder von den Factoren P, Q, R . . . $= +1$, oder ein jeder $= -1$, also

$$A = \pm (N_{1,1} + N_{1,2} + N_{1,3} + \ldots),$$

folglich

$$A^2 = (N_{1,1} + N_{1,2} + N_{1,3} + \ldots)^2,$$

und eben so

$$B^2 = (N_{2,1} + N_{2,2} + N_{2,3} + \ldots)^2,$$
$$C^2 = (N_{3,1} + N_{3,2} + N_{3,3} + \ldots)^2,$$

u. s. w.

Ferner seyen unter jenen s Gleichungen σ solche, in deren jeder der Coefficient von ξ ein anderes Zeichen habe, als die Coefficienten von v, z . . .; so gehört jede von diesen σ Gleichungen entweder zu Σ, und zugleich zu S', zu S'' u. s. w., oder zu S, und zugleich zu Σ', zu Σ'' u. s. w., daher ist für jede von denselben

$$A^2 = (N_{1,1} - N_{1,2} - N_{1,3} - \ldots)^2,$$
$$B^2 = (N_{2,1} - N_{2,2} - N_{2,3} - \ldots)^2,$$
$$C^2 = (N_{3,1} - N_{3,2} - N_{3,3} - \ldots)^2,$$

u. s. w.

Eben so seyen unter jenen s Gleichungen τ solche, in deren jeder die Coefficienten von ξ und v ein anderes Zeichen haben, als die von $z \ldots$; so ist für jede von diesen τ Gleichungen

$$A^2 = (N_{1,1} + N_{1,2} - N_{1,3} - \ldots)^2,$$
$$B^2 = (N_{2,1} + N_{2,2} - N_{2,3} - \ldots)^2,$$
$$C^2 = (N_{3,1} + N_{3,2} - N_{3,3} - \ldots)^2,$$

und so fort. Hieraus folgt:

$$\begin{aligned}
\Sigma A_n^2 &= \rho(N_{1,1} + N_{1,2} + N_{1,3} + \ldots)^2 \\
&\quad + \sigma(N_{1,1} - N_{1,2} - N_{1,3} - \ldots)^2 \\
&\quad + \tau(N_{1,1} + N_{1,2} - N_{1,3} - \ldots)^2 + \ldots, \\
\Sigma B_n^2 &= \rho(N_{2,1} + N_{2,2} + N_{2,3} + \ldots)^2 \\
&\quad + \sigma(N_{2,1} - N_{2,2} - N_{2,3} - \ldots)^2 \\
&\quad + \tau(N_{2,1} + N_{2,2} - N_{2,3} - \ldots)^2 + \ldots, \\
\Sigma C_n^2 &= \rho(N_{3,1} + N_{3,2} + N_{3,3} + \ldots)^2 \\
&\quad + \sigma(N_{3,1} - N_{3,2} - N_{3,3} - \ldots)^2 + \ldots,
\end{aligned}$$

u. s. w.

a) Wendet man dieſs auf den Fall an, wo nur zwei Gröſsen ξ, v aus den s Gleichungen gesucht werden, unter denen ρ solche sind, in deren jeder die Coefficienten von ξ und v einerlei Zeichen haben, also $s - \rho$ solche, in deren jeder die Coefficienten von ξ und v verschiedene Zeichen haben; so sind die Gleichungen (16) für diesen Fall:

$$Z = -\mathfrak{D} + \mathfrak{G}\xi + \mathfrak{H}v,$$
$$Y = -\mathfrak{D}' + \mathfrak{G}'\xi + \mathfrak{H}'v;$$

$$\text{also} \quad \left.\begin{aligned} \mathfrak{A} &= \frac{\mathfrak{D}\mathfrak{H}' - \mathfrak{D}'\mathfrak{H}}{\mathfrak{G}\mathfrak{H}' - \mathfrak{G}'\mathfrak{H}} \\ \mathfrak{B} &= \frac{\mathfrak{D}'\mathfrak{G} - \mathfrak{D}\mathfrak{G}'}{\mathfrak{G}\mathfrak{H}' - \mathfrak{G}'\mathfrak{H}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (17)$$

und

$$N_{1,1} = \frac{\mathfrak{H}'}{\mathfrak{G}\mathfrak{H}' - \mathfrak{G}'\mathfrak{H}}, \quad N_{1,2} = -\frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{G}\mathfrak{H}' - \mathfrak{G}'\mathfrak{H}},$$

folglich

$$\Sigma A_n^2 = \frac{\rho(\mathfrak{H}' - \mathfrak{H})^2 + (s-\rho)(\mathfrak{H}' + \mathfrak{H})^2}{(\mathfrak{G}\mathfrak{H}' - \mathfrak{G}'\mathfrak{H})^2};$$

das Gewicht der Bestimmung $\xi = \mathfrak{A}$ ist also

$$= \frac{(\mathfrak{G}\mathfrak{H}' - \mathfrak{G}'\mathfrak{H})^2}{\rho(\mathfrak{H}' - \mathfrak{H})^2 + (s-\rho)(\mathfrak{H}' + \mathfrak{H})^2}; \quad \ldots \quad (18)$$

das Gewicht der Bestimmung $v = \mathfrak{B}$ findet sich eben so

$$= \frac{(\mathfrak{G}\mathfrak{H}' - \mathfrak{G}'\mathfrak{H})^2}{\rho(\mathfrak{G}' - \mathfrak{G})^2 + (s-\rho)(\mathfrak{G}' + \mathfrak{G})^2} \quad \ldots \quad (19)$$

b) In eben diesem Falle, wo nur zwei Gröfsen gesucht werden, kann man, wie *Laplace* im zweiten *Suppl. à la Théorie anal. des Probab.*, *p.* 39, bemerkt, kürzer so verfahren: nachdem man in allen s Gleichungen die Coefficienten von ξ positiv gemacht hat, addire man zuerst die ρ Gleichungen, in denen auch die Coefficienten von v positiv sind, und dann addire man die $s - \rho$ Gleichungen, in denen die Coefficienten von v negativ sind; aus den zwei auf diese Art erhaltenen Gleichungen bestimme man ξ und v.

Bei diesem Verfahren seyen die den Gleichungen (13) entsprechenden Gleichungen folgende:

$$\left.\begin{aligned} \Xi &= \mathfrak{E}\xi + \mathfrak{F}v - \mathfrak{Q}, \\ Y &= \mathfrak{E}'\xi + \mathfrak{F}'v - \mathfrak{Q}'; \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (20)$$

so ist

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{A} &= \frac{\mathfrak{Q}\mathfrak{F}' + \mathfrak{Q}'\mathfrak{F}}{\mathfrak{E}\mathfrak{F}' + \mathfrak{E}'\mathfrak{F}} \\ \mathfrak{B} &= \frac{\mathfrak{Q}\mathfrak{E}' - \mathfrak{Q}'\mathfrak{E}}{\mathfrak{E}\mathfrak{F}' + \mathfrak{E}'\mathfrak{F}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (21)$$

und

$$N_{1,1} = \frac{\mathfrak{F}'}{\mathfrak{E}\mathfrak{F}' + \mathfrak{E}'\mathfrak{F}}, \quad N_{1,2} = \frac{\mathfrak{F}}{\mathfrak{E}\mathfrak{F}' + \mathfrak{E}'\mathfrak{F}}.$$

Der Factor P ist hier $= \pm 1$ für die ρ ersteren, und $= 0$ für die $s - \rho$ letzteren Gleichungen; der Factor

Q ist $= 0$ für die ρ ersteren, und $= \pm 1$ für die $s - \rho$ letzteren Gleichungen. Demnach ist $A = \pm N_{1,1}$ für jede von den ρ ersteren, und $= \pm N_{1,2}$ für jede von den $s - \rho$ letzteren Gleichungen, folglich $\frac{1}{\Sigma A_n^2}$ oder das Gewicht der Bestimmung $\xi = \mathfrak{A}$ hier

$$= \frac{1}{\rho N_{1,1}^2 + (s-\rho) N_{1,2}^2}, \text{ d. h. } = \frac{(\mathfrak{E}\mathfrak{F}' + \mathfrak{E}'\mathfrak{F})^2}{\rho \mathfrak{F}'^2 + (s-\rho)\mathfrak{F}^2}. \quad (22)$$

Das Gewicht der Bestimmung $v = \mathfrak{B}$ findet sich eben so

$$= \frac{(\mathfrak{E}\mathfrak{F}' + \mathfrak{E}'\mathfrak{F})^2}{\rho \mathfrak{E}'^2 + (s-\rho)\mathfrak{E}^2} \quad \ldots \quad (23)$$

Es ist aber $\mathfrak{E}$ die Summe der Coefficienten von ξ in den ρ ersteren, $\mathfrak{E}'$ in den $s - \rho$ letzteren Gleichungen, alle diese Coefficienten positiv genommen, daher

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{E} + \mathfrak{E}',$$

denn $\mathfrak{G}$ ist die Summe der Coefficienten von ξ in sämmtlichen s Gleichungen, alle positiv genommen; ferner

$$\mathfrak{G}' = \mathfrak{E} - \mathfrak{E}',$$

denn $\mathfrak{G}'$ ist die Summe der Coefficienten von ξ in den s Gleichungen, so genommen, dafs die Coefficienten von v durchaus positiv werden, also positiv genommen in den ρ ersteren, und negativ in den $s - \rho$ letzteren Gleichungen.

Eben so ist

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{F} - \mathfrak{F}', \quad \mathfrak{D} = \mathfrak{Q} + \mathfrak{Q}',$$
$$\mathfrak{H}' = \mathfrak{F} + \mathfrak{F}', \quad \mathfrak{D}' = \mathfrak{Q} - \mathfrak{Q}'.$$

Substituirt man diese Werthe von $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$, u. s. w. in den Ausdrücken (17), (18) und (19), so erhält man die Ausdrücke (21), (22) und (23). Das hier in b) angeführte Verfahren gibt also dieselben Resultate, wie das vorhergehende.

36.

II. Jetzt gebraucht man gewöhnlich die sogenannte *Methode der kleinsten Quadrate*, d. h. man bestimmt die Gröfsen ξ, v, ζ . . . so, dafs die Summe der Quadrate der Differenzen zwischen den beobachteten und den berechneten Werthen der Functionen F_1, F_2, . . . F_s ein *Minimum* wird, oder man setzt

$$\frac{d.\Sigma\varepsilon_n^2}{d\xi} = 0, \quad \frac{d.\Sigma\varepsilon_n^2}{dv} = 0, \quad \frac{d.\Sigma\varepsilon_n^2}{d\zeta} = 0, \quad \text{u. s. w.,}$$

oder $\Sigma a_n \varepsilon_n = 0$, $\Sigma b_n \varepsilon_n = 0$, $\Sigma c_n \varepsilon_n = 0$, u. s. w.

Hier sind also die in Nro. 34. durch P_n, Q_n, R_n . . . bezeichneten Factoren resp. $= a_n$, b_n, c_n . . . Bezeichnen wir ferner mit *Gaufs* die Coefficienten

$N_{1,1}$, $N_{1,2}$, $N_{1,3}$ . . . hier durch $[\alpha^2]$, $[\alpha\beta]$, $[\alpha\gamma]$ . . .,
$N_{2,1}$, $N_{2,2}$, $N_{2,3}$ . . . » » $[\beta\alpha]$, $[\beta^2]$, $[\beta\gamma]$ . . .,
$N_{3,1}$, $N_{3,2}$, $N_{3,3}$ . . . » » $[\gamma\alpha]$, $[\gamma\beta]$, $[\gamma^2]$ . . .,
u s. w.,

und A_n, B_n, C_n . . . durch α_n, β_n, γ_n . . .;

so entsprechen den Gleichungen (15) folgende:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_n &= a_n[\alpha^2] + b_n[\alpha\beta] + c_n[\alpha\gamma] + \ldots, \\ \beta_n &= a_n[\beta\alpha] + b_n[\beta^2] + c_n[\beta\gamma] + \ldots, \\ \gamma_n &= a_n[\gamma\alpha] + b_n[\gamma\beta] + c_n[\gamma^2] + \ldots, \\ &\text{u. s. w.} \end{aligned}\right\} \quad (24)$$

Da die Factoren α_1, . . . α_n, . . . α_s den Gleichungen (2) Genüge leisten, so hat man

$$\Sigma a_n a_n = 1, \quad \Sigma a_n b_n = 0, \quad \Sigma a_n c_n = 0, \quad \ldots \quad (25)$$

Multiplicirt man diese Gleichungen resp. mit $[\alpha^2]$, $[\alpha\beta]$, $[\alpha\gamma]$, . . ., so erhält man vermöge der ersten von den Gleichungen (24)

$$\Sigma a_n^2 = [\alpha^2], \quad \ldots\ldots \quad (26)$$

und auf ähnliche Art läfst sich beweisen, dafs

$$\Sigma\beta_n^2 = [\beta^2],$$
$$\Sigma\gamma_n^2 = [\gamma^2]$$

ist, u. s. w.

Ferner ist vermöge der zweiten von den Gleichungen (24)

$$\Sigma\alpha_n\beta_n = [\beta\alpha]\,\Sigma\alpha_n a_n + [\beta^2]\,\Sigma\alpha_n b_n + [\beta\gamma]\,\Sigma\alpha_n c_n + \ldots,$$

d. h. $\Sigma\alpha_n\beta_n = [\beta\alpha]$,

und eben so folgt aus der ersten von den Gleichungen (24):

$$\Sigma\alpha_n\beta_n = [\alpha\beta],$$

also ist $[\alpha\beta] = [\beta\alpha]$ . . . . . (27)

Eben so läfst sich beweisen, dafs

$$[\alpha\gamma] = \Sigma\alpha_n\gamma_n = [\gamma\alpha],\quad [\beta\gamma] = \Sigma\beta_n\gamma_n = [\gamma\beta]$$

ist, u. s. w.

Daher ist vermöge der ersten von den Gleichungen (24)

$$\alpha_n = a_n\Sigma\alpha_n^2 + b_n\Sigma\alpha_n\beta_n + c_n\Sigma\alpha_n\gamma_n + \ldots,$$

und mithin nach der ersten von den Gleichungen (25)

$$\left.\begin{array}{l} \Sigma a_n^2\,\Sigma\alpha_n^2 + \Sigma a_n b_n\,\Sigma\alpha_n\beta_n \\ \qquad + \Sigma a_n c_n\,\Sigma\alpha_n\gamma_n + \ldots = 1, \\ \text{und eben so ist} \\ \Sigma a_n b_n\,\Sigma\alpha_n\beta_n + \Sigma b_n^2\,\Sigma\beta_n^2 + \Sigma b_n c_n\,\Sigma\beta_n\gamma_n + \ldots \\ \qquad = \Sigma b_n\beta_n = 1, \\ \text{u. s. w.} \end{array}\right\} (28)$$

Ferner ist vermöge der Gleichungen (24)

$$\begin{aligned} &\alpha_n\Sigma a_n^2 + \beta_n\Sigma a_n b_n + \gamma_n\Sigma a_n c_n + \ldots \\ &= a_n([\alpha^2]\,\Sigma a_n^2 + [\beta\alpha]\,\Sigma a_n b_n + [\gamma\alpha]\,\Sigma a_n c_n + \ldots) \\ &+ b_n([\alpha\beta]\,\Sigma a_n^2 + [\beta^2]\,\Sigma a_n b_n + [\gamma\beta]\,\Sigma a_n c_n + \ldots) \\ &+ c_n([\alpha\gamma]\,\Sigma a_n^2 + [\beta\gamma]\,\Sigma a_n b_n + [\gamma^2]\,\Sigma a_n c_n + \ldots) \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

d. h., wie aus den Gleichungen (27) u. s. w. folgt,

$$= a_n \Sigma a_n \alpha_n + b_n \Sigma a_n \beta_n + c_n \Sigma a_n \gamma_n + \ldots$$

Es ist aber vermöge der ersten von den Gleichungen (2) oder (25) $\Sigma a_n \alpha_n = 1$, und vermöge der Gleichungen (4), (6), . . .

$$\Sigma a_n \beta_n = 0, \quad \Sigma a_n \gamma_n = 0, \ldots,$$

folglich

$$\left.\begin{aligned} &a_n \Sigma a_n^2 + \beta_n \Sigma a_n b_n + \gamma_n \Sigma a_n c_n + \ldots = a_n, \\ &\text{und eben so} \\ &\alpha_n \Sigma a_n b_n + \beta_n \Sigma b_n^2 + \gamma_n \Sigma b_n c_n + \ldots = b_n, \\ &\qquad \text{u. s. w.} \end{aligned}\right\} (29)$$

a) Vermöge der Gleichungen (25) hat man für irgend ein System von Factoren $A_1, \ldots A_n, \ldots A_s$, die ebenfalls den Gleichungen (2) Genüge leisten:

$$\Sigma A_n a_n = \Sigma \alpha_n a_n, \quad \Sigma A_n b_n = \Sigma \alpha_n b_n,$$
$$\Sigma A_n c_n = \Sigma \alpha_n c_n, \ldots$$

Multiplicirt man diese Gleichungen resp. mit $[\alpha^2]$, $[\alpha\beta]$, $[\alpha\gamma]$, . . ., so erhält man

$$\Sigma A_n \alpha_n = \Sigma \alpha_n^2,$$

woraus folgt

$$\Sigma A_n^2 = \Sigma \alpha_n^2 + \Sigma (A_n - \alpha_n)^2.$$

Hieraus erhellt, dafs unter allen Systemen von Factoren, welche den Gleichungen (2) Genüge leisten, dasjenige, für welches ΣA_n^2 den kleinsten Werth erhält, ist $A_1 = \alpha_1, \ldots A_n = \alpha_n, \ldots$ Aber nach Nro. 32, a) wird die Bestimmung von ξ am genauesten (die Grenzen des zu befürchtenden Fehlers bei derselben Wahrscheinlichkeit am engsten, oder der wahrscheinliche Fehler am kleinsten, oder das Gewicht am gröfsten), wenn ΣA_n^2 den kleinsten möglichen Werth hat. Demnach ist das Factorensystem $\alpha_1, \ldots \alpha_n, \ldots$ das vortheilhafteste zur Bestimmung von ξ; und eben so läfst sich be-

weisen, dafs das Factorensystem $\beta_1, \ldots \beta_n, \ldots$ das vortheilhafteste zur Bestimmung von v, das Factorensystem $\gamma_1, \ldots \gamma_n, \ldots$ das vortheilhafteste zur Bestimmung von z ist, u. s. w. Diese Factorensysteme werden aber gebraucht, wenn man die Gleichungen nach der Methode der kleinsten Quadrate behandelt; hier ist nämlich (s. Nro. 34)

$$\mathfrak{A} = \Sigma \alpha_n \delta_n,$$
$$\mathfrak{B} = \Sigma \beta_n \delta_n,$$
$$\mathfrak{C} = \Sigma \gamma_n \delta_n,$$
u. s. w.

Die Methode der kleinsten Quadrate gibt also die genaueste Bestimmung der gesuchten Gröfsen $\xi, v, z \ldots$

b) Das Gewicht der Bestimmung $\xi = \mathfrak{A}$ ist hier nach Nro. 32, a)

$$= \frac{1}{\Sigma \alpha_n^2},$$

oder vermöge der Gleichung (26)

$$= \frac{1}{[\alpha^2]};$$

und eben so das Gewicht der Bestimmung $v = \mathfrak{B}$

$$= \frac{1}{[\beta^2]},$$

das Gewicht der Bestimmung $z = \mathfrak{C}$

$$= \frac{1}{[\gamma^2]},$$

u. s. w.

Der wahrscheinliche Fehler der Bestimmung $\xi = \mathfrak{A}$ ist

$$= 0.67449 \sqrt{K' [\alpha^2]},$$

u. s. w.

Wird nur *eine* Gröfse ξ gesucht, so ist der plausibelste Werth von ξ

$$= \mathfrak{A} = \frac{\Sigma a_n \delta_n}{\Sigma a_n^2},$$

und das Gewicht dieser Bestimmung

$$= \Sigma a_n^2.$$

Sind zwei Gröfsen ξ, v unbekannt, und sucht man die plausibelsten Werthe derselben nach der Methode der kleinsten Quadrate, so ist das Gewicht der Bestimmung von ξ

$$= \frac{\Sigma a_n^2 \Sigma b_n^2 - (\Sigma a_n b_n)^2}{\Sigma b_n^2},$$

und das Gewicht der Bestimmung von v

$$= \frac{\Sigma a_n^2 \Sigma b_n^2 - (\Sigma a_n b_n)^2}{\Sigma a_n^2}.$$

c) Was in Nro. 33. mit E bezeichnet wurde, das ist hier

$$= \Sigma \varepsilon_n^2 - 2\mathfrak{M} + \mathfrak{N},$$

wo

$$\mathfrak{M} = \Sigma a_n \varepsilon_n \Sigma \alpha_n \varepsilon_n + \Sigma b_n \varepsilon_n \Sigma \beta_n \varepsilon_n + \Sigma c_n \varepsilon_n \Sigma \gamma_n \varepsilon_n + \ldots$$

und

$$\begin{aligned}\mathfrak{N} = {} & \Sigma \alpha_n \varepsilon_n (\Sigma \alpha_n \varepsilon_n \Sigma a_n^2 + \Sigma \beta_n \varepsilon_n \Sigma a_n b_n \\ & \quad + \Sigma \gamma_n \varepsilon_n \Sigma a_n c_n + \ldots) \\ & + \Sigma \beta_n \varepsilon_n (\Sigma \alpha_n \varepsilon_n \Sigma a_n b_n + \Sigma \beta_n \varepsilon_n \Sigma b_n^2 \\ & \quad + \Sigma \gamma_n \varepsilon_n \Sigma b_n c_n + \ldots) \\ & + \Sigma \gamma_n \varepsilon_n (\Sigma \alpha_n \varepsilon_n \Sigma a_n c_n + \Sigma \beta_n \varepsilon_n \Sigma b_n c_n \\ & \quad + \Sigma \gamma_n \varepsilon_n \Sigma c_n^2 + \ldots) \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

ist. Dieser Ausdruck für $\mathfrak{N}$ ist vermöge der Gleichungen (29) dem für $\mathfrak{M}$ gleich, folglich

$$\begin{aligned}E = \Sigma \varepsilon_n^2 - \mathfrak{M} = {} & \Sigma \varepsilon_n^2 - \Sigma a_n \varepsilon_n \Sigma \alpha_n \varepsilon_n \\ & - \Sigma b_n \varepsilon_n \Sigma \beta_n \varepsilon_n \\ & - \Sigma c_n \varepsilon_n \Sigma \gamma_n \varepsilon_n - \ldots \quad (30)\end{aligned}$$

G ist hier

$$
\begin{aligned}
= 2r &- \Sigma a_n^2 \Sigma \alpha_n^2 - \Sigma a_n b_n \Sigma \alpha_n \beta_n \\
&\quad - \Sigma a_n c_n \Sigma \alpha_n \gamma_n - \ldots \\
&- \Sigma a_n b_n \Sigma \alpha_n \beta_n - \Sigma b_n^2 \Sigma \beta_n^2 \\
&\quad - \Sigma b_n c_n \Sigma \beta_n \gamma_n - \ldots \\
&- \Sigma a_n c_n \Sigma \alpha_n \gamma_n - \Sigma b_n c_n \Sigma \beta_n \gamma_n \\
&\quad - \Sigma c_n^2 \Sigma \gamma_n^2 - \ldots \\
&- \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}
$$

d. h. vermöge der Gleichungen (28)

$$= 2r - r = r,$$

was sich auch leicht aus dem Ausdrucke (30) ableiten läfst.

Daher ist nach Nro. 33, a) der genäherte Werth von K'

$$= \frac{\Sigma \lambda_n^2}{s-r},$$

wo $\lambda_1, \ldots \lambda_n, \ldots$ die Werthe bezeichnen, welche die Functionen $l_1 - F_1, \ldots l_n - F_n, \ldots$ erhalten, wenn man in denselben für ξ, v, $\zeta \ldots$ ihre plausibelsten Werthe $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$. $\mathfrak{C}, \ldots$ substituirt, oder wo $\Sigma \lambda_n^2$ der kleinste Werth von $\Sigma (l_n - F_n)^2$ ist.

Der mittlere Werth des Quadrats des bei dieser Bestimmung von r zu befürchtenden Fehlers ist nach Nro. 33, a)

$$m^2 = \frac{V' - V^2}{(s-r)^2} = \frac{V' - (s-r)^2 K'^2}{(s-r)^2}.$$

Nach Nro. 33, b) hat man

$$V' = (s - 2r) K''' + (s-1)(s-2r) K'^2 + H$$

oder

$$= (s-2r)(K''' - K'^2) + (s-r)^2 K'^2 - r K'^2 + H,$$

wo H der mittlere Werth von

$$\mathfrak{M}^2 = (\Sigma a_n \varepsilon_n \Sigma \alpha_n \varepsilon_n + \Sigma b_n \varepsilon_n \Sigma \beta_n \varepsilon_n + \Sigma c_n \varepsilon_n \Sigma \gamma_n \varepsilon_n + \ldots)^2$$

ist. Nun ist der mittlere Werth von $(\Sigma a_n \varepsilon_n \Sigma \alpha_n \varepsilon_n)^2$

oder von

$$(\Sigma a_n^2 \varepsilon_n^2 + 2\Sigma a_n \varepsilon_n a_{n'} \varepsilon_{n'}) \times (\Sigma \alpha_n^2 \varepsilon_n^2 + 2\Sigma \alpha_n \varepsilon_n \alpha_{n'} \varepsilon_{n'})$$
$$= K''' \Sigma a_n^2 \alpha_n^2 + K'^2 (\Sigma a_n^2 \Sigma \alpha_n^2 - \Sigma a_n^2 \alpha_n^2)$$
$$+ 4K'^2 \Sigma a_n \alpha_n a_{n'} \alpha_{n'},$$

oder, da

$$2\Sigma a_n \alpha_n a_{n'} \alpha_{n'} = (\Sigma a_n \alpha_n)^2 - \Sigma a_n^2 \alpha_n^2 = 1 - \Sigma a_n^2 \alpha_n^2$$

ist,

$$= (K''' - 3K'^2) \Sigma a_n^2 \alpha_n^2 + K'^2 (2 + \Sigma a_n^2 \Sigma \alpha_n^2);$$

ferner der mittlere Werth von $\Sigma a_n \varepsilon_n \Sigma \alpha_n \varepsilon_n \Sigma b_n \varepsilon_n \Sigma \beta_n \varepsilon_n$

$$= K''' \Sigma a_n b_n \alpha_n \beta_n$$
$$+ K'^2 (\Sigma a_n \alpha_n b_{n'} \beta_{n'} + \Sigma a_n b_n \alpha_{n'} \beta_{n'} + \Sigma a_n \beta_n \alpha_{n'} b_{n'})$$
$$= K''' \Sigma a_n b_n \alpha_n \beta_n$$
$$+ K'^2 (\Sigma a_n \alpha_n \Sigma b_n \beta_n - \Sigma a_n \alpha_n b_n \beta_n)$$
$$+ K'^2 (\Sigma a_n b_n \Sigma \alpha_n \beta_n - \Sigma a_n b_n \alpha_n \beta_n)$$
$$+ K'^2 (\Sigma a_n \beta_n \Sigma \alpha_n b_n - \Sigma a_n \beta_n \alpha_n b_n),$$

oder, da

$$\Sigma a_n \alpha_n = 1, \quad \Sigma b_n \beta_n = 1, \quad \Sigma a_n \beta_n = 0, \quad \Sigma \alpha_n b_n = 0$$

ist,

$$= (K''' - 3K'^2) \Sigma a_n \alpha_n b_n \beta_n + K'^2 (1 + \Sigma a_n b_n \Sigma \alpha_n \beta_n);$$

und eben so der mittlere Werth von

$$\Sigma a_n \varepsilon_n \Sigma \alpha_n \varepsilon_n \Sigma c_n \varepsilon_n \Sigma \gamma_n \varepsilon_n$$
$$= (K''' - 3K'^2) \Sigma a_n \alpha_n c_n \gamma_n + K'^2 (1 + \Sigma a_n c_n \Sigma \alpha_n \gamma_n),$$

u. s. w. Nimmt man diese Ausdrücke zusammen, so erhält man den mittlern Werth von $\mathfrak{M} \Sigma a_n \varepsilon_n \Sigma \alpha_n \varepsilon_n$ mit Anwendung der ersten von den Gleichungen (28)

$$= (K''' - 3K'^2) \Sigma a_n \alpha_n (a_n \alpha_n + b_n \beta_n + c_n \gamma_n + \ldots)$$
$$+ (r + 2) K'^2.$$

Addirt man hiezu die analogen Ausdrücke für $\mathfrak{M} \Sigma b_n \varepsilon_n \Sigma \beta_n \varepsilon_n$, für $\mathfrak{M} \Sigma c_n \varepsilon_n \Sigma \gamma_n \varepsilon_n$ u. s. w., so findet man

$$H = (K''' - 3K'^2)\,\Sigma(a_n\alpha_n + b_n\beta_n + c_n\gamma_n + \ldots)^2 + (r^2 + 2r)\,K'^2,$$

also

$$V' = (s-r)(K''' - K'^2) + (s-r)^2 K'^2 - (K''' - 3K'^2) \times \times [r - \Sigma(a_n\alpha_n + b_n\beta_n + c_n\gamma_n + \ldots)^2]$$

und

$$V' - V^2 = (s-r)(K''' - K'^2) - (K''' - 3K'^2) \times \times [r - \Sigma(a_n\alpha_n + b_n\beta_n + c_n\gamma_n + \ldots)^2], \quad (31)$$

mithin

$$m^2 = \frac{K''' - K'^2}{s-r} - \frac{K''' - 3K'^2}{(s-r)^2}[r - \Sigma(a_n\alpha_n + b_n\beta_n + c_n\gamma_n + \ldots)^2],$$

(vergl. *Gaufs Theor. combin. obs. art.* 39.)

Nimmt man an, dafs $\varphi x = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2x^2}$ sey, so verwandelt sich dieser Ausdruck in den einfachen

$$m^2 = \frac{2K'^2}{s-r}.$$

Setzt man nach Nro. 33, b) und c) den genäherten Werth von $K' = \frac{1}{s}\Sigma\lambda_n^2$, so ist der mittlere Werth des Quadrats des bei dieser Bestimmung von K' zu befürchtenden Fehlers vermöge der Gleichung (11)

$$m'^2 = \frac{1}{s^2}[V' - V^2 + r^2 K'^2],$$

wo man für $V' - V^2$ den Ausdruck (31) hat; nimmt man an, dafs $\varphi x = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2x^2}$ sey, so ist

$$m'^2 = \frac{1}{s^2}(2s - 2r + r^2)K'^2.$$

Nach Nro. 33, b) ist $m'^2 < m^2$, d. h. diese letztere Bestimmung von K' genauer als die erstere, wenn

$$(2s - r)m^2 > rK'^2$$

ist, oder, vorausgesetzt, daſs $\varphi x = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2}$ sey, wenn

$$4s - 2r > (s-r)r$$
$$\text{oder } 4s > r(s+2-r)$$

ist. Diese Bedingung wird für $r=1$, $r=2$, $r=3$ und $r=4$ immer erfüllt, hingegen für $r=5$ nur wenn $s<15$, für $r=6$ nur wenn $s<12$ ist, u. s. w.

d) Durch die Berechnung der Gröſsen $\lambda_1, \ldots \lambda_n, \ldots$ findet man die Unterschiede der durch die einzelnen Beobachtungen gegebenen Werthe der Functionen $F_1, \ldots F_n, \ldots$ von den aus sämmtlichen Beobachtungen nach der vortheilhaftesten Methode durch Rechnung abgeleiteten. Dabei kann nun leicht der Fall eintreten, daſs man eine von den Beobachtungen zu sehr von dem Resultate sämmtlicher Beobachtungen abweichend findet, und daher dieselbe ausschlieſsen will. In diesem Falle kann man, ohne die Rechnung vom Anfang an zu wiederholen, die Resultate, welche man mit Ausschlieſsung jener Beobachtung erhalten haben würde, aus den mit Beibehaltung derselben gefundenen auf folgende Art ableiten:

Die in Nro. 34. durch $\Xi, Y, Z, \ldots$ bezeichneten Gröſsen sind hier resp.

$$= -\Sigma a_n \varepsilon_n, \quad -\Sigma b_n \varepsilon_n, \quad -\Sigma c_n \varepsilon_n, \ldots,$$

und vermöge der Gleichungen (14) hat man unbestimmt, wenn man die Gleichungen (27) u. s. w. berücksichtigt:

$$\xi = \mathfrak{A} + [\alpha^2]\,\Xi + [\alpha\beta]\,Y + [\alpha\gamma]\,Z + \ldots,$$
$$\upsilon = \mathfrak{B} + [\alpha\beta]\,\Xi + [\beta^2]\,Y + [\beta\gamma]\,Z + \ldots,$$
$$\varsigma = \mathfrak{C} + [\alpha\gamma]\,\Xi + [\beta\gamma]\,Y + [\gamma^2]\,Z + \ldots,$$

u. s. w.

Nun wolle man z. B. die n^{te} Beobachtung ausschlieſsen, und durch diese Ausschlieſsung gehen $\Xi, Y, Z, \ldots$, $\mathfrak{A}$ u. s. w. in $\Xi', Y', Z', \ldots$, $\mathfrak{A}'$ u. s. w. über; so wird

man auch haben:

$$\xi = \mathfrak{A}' + [\alpha'^2]\,\Xi' + [\alpha\beta']\,Y' + [\alpha\gamma']\,Z' + \ldots,$$
$$\upsilon = \mathfrak{B}' + [\alpha\beta']\,\Xi' + [\beta'^2]\,Y' + [\beta\gamma']\,Z' + \ldots,$$

u. s. w.,

wo $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$, ... die neuen plausibelsten Werthe von ξ, υ, ..., und $\frac{1}{[\alpha'^2]}$, $\frac{1}{[\beta'^2]}$, ... die Gewichte dieser Bestimmungen von ξ, υ, ... sind.

Es ist aber

$$\Xi' = -(\Sigma a_n \varepsilon_n - a_n \varepsilon_n) = \Xi + a_n \varepsilon_n$$
$$\text{oder} \quad \Xi = \Xi' - a_n \varepsilon_n,$$

und eben so

$$Y = Y' - b_n \varepsilon_n,$$
$$Z = Z' - c_n \varepsilon_n,$$

u. s. w.

Ferner ist vermöge der Gleichungen (1)

$$\begin{aligned}\varepsilon_n &= \delta_n - a_n \xi - b_n \upsilon - c_n \zeta - \ldots \\ &= \delta_n - a_n \mathfrak{A} - b_n \mathfrak{B} - c_n \mathfrak{C} - \ldots \\ &\quad - a_n \Xi - \beta_n Y - \gamma_n Z - \ldots,\end{aligned}$$

oder, da $\delta_n - a_n \mathfrak{A} - b_n \mathfrak{B} - c_n \mathfrak{C} - \ldots = \lambda_n$ ist,

$$\begin{aligned}\varepsilon_n &= \lambda_n - a_n \Xi - \beta_n Y - \gamma_n Z - \ldots \\ &= \lambda_n - a_n \Xi' - \beta_n Y' - \gamma_n Z' - \ldots \\ &\quad + a_n a_n \varepsilon_n + b_n \beta_n \varepsilon_n + c_n \gamma_n \varepsilon_n + \ldots,\end{aligned}$$

folglich

$$\varepsilon_n = \frac{1}{R}(\lambda_n - a_n \Xi' - \beta_n Y' - \gamma_n Z' - \ldots),$$

wenn man der Kürze wegen R für

$$1 - a_n a_n - b_n \beta_n - c_n \gamma_n - \ldots$$

schreibt.

Substituirt man diesen Werth von ε_n in dem unbestimmten Ausdrucke

$$\begin{aligned}\xi &= \mathfrak{A} + [\alpha^2]\,\Xi + [\alpha\beta]\,Y + [\alpha\gamma]\,Z + \ldots \\ &= \mathfrak{A} + [\alpha^2]\,\Xi' + [\alpha\beta]\,Y' + [\alpha\gamma]\,Z' + \ldots - a_n \varepsilon_n,\end{aligned}$$

so erhält man

$$\xi = \mathfrak{A} - \frac{\alpha_n \lambda_n}{R} + \left([\alpha^2] + \frac{\alpha_n^2}{R}\right)\Xi' + \left([\alpha\beta] + \frac{\alpha_n \beta_n}{R}\right) Y' + \left([\alpha\gamma] + \frac{\alpha_n \gamma_n}{R}\right) Z' + \ldots$$

Setzt man hier $\Xi' = 0$, $Y' = 0$, $Z' = 0$, ..., so erhält man den neuen plausibelsten Werth von ξ oder

$$\mathfrak{A}' = \mathfrak{A} - \frac{\alpha_n \lambda_n}{R}.$$

Nimmt man aber blofs den Coefficienten von Ξ in dem vorhergehenden unbestimmten Ausdrucke für ξ, so erhält man

$$[\alpha'^2] = [\alpha^2] + \frac{\alpha_n^2}{R}.$$

Auf ähnliche Art findet man

$$\mathfrak{B}' = \mathfrak{B} - \frac{\beta_n \lambda_n}{R},$$

$$[\beta'^2] = [\beta^2] + \frac{\beta_n^2}{R},$$

u. s. w.,

wo überall $R = 1 - a_n \alpha_n - b_n \beta_n - \ldots$ ist.

37.

a) In dem Falle Nro. 32, b) gilt das in Nro. 36, a) b) in Beziehung auf die Gleichungen (1) Gesagte für die Gleichungen (8). Die Bestimmung von ξ wird am genauesten, wenn man die Factoren $A_1^*, \ldots A_n^*, \ldots$ (s. Nro. 32, b) so wählt, dafs ΣA_n^{*2}, oder die Factoren $A_1, \ldots A_n, \ldots$ so, dafs $\Sigma A_n^2 \mu_n^2$ den kleinsten möglichen Werth erhält; eben so verhält es sich mit der Bestimmung von v, $z \ldots$. Man findet hier die plausibelsten Werthe von ξ, v, $z \ldots$, wenn man $\Sigma\left(\frac{l_n - F_n}{\ }\right)^2$ zu einem *Minimum* macht, oder wenn man setzt

$$\Sigma a_n^* \varepsilon_n^* = 0, \quad \Sigma b_n^* \varepsilon_n^* = 0, \quad \Sigma c_n^* \varepsilon_n^* = 0, \text{ u. s. w.,}$$

oder

$$\Sigma \frac{a_n \varepsilon_n}{\mu_n^2} = 0, \quad \Sigma \frac{b_n \varepsilon_n}{\mu_n^2} = 0, \quad \Sigma \frac{c_n \varepsilon_n}{\mu_n^2} = 0, \text{ u. s. w.,}$$

oder

$$\left.\begin{aligned} 0 &= -\Sigma \frac{a_n \delta_n}{\mu_n^2} + \xi \Sigma \frac{a_n^2}{\mu_n^2} + \upsilon \Sigma \frac{a_n b_n}{\mu_n^2} \\ &\qquad + \zeta \Sigma \frac{a_n c_n}{\mu_n^2} + \ldots, \\ 0 &= -\Sigma \frac{b_n \delta_n}{\mu_n^2} + \xi \Sigma \frac{a_n b_n}{\mu_n^2} + \upsilon \Sigma \frac{b_n^2}{\mu_n^2} \\ &\qquad + \zeta \Sigma \frac{b_n c_n}{\mu_n^2} + \ldots, \\ 0 &= -\Sigma \frac{c_n \delta_n}{\mu_n^2} + \xi \Sigma \frac{a_n c_n}{\mu_n^2} + \upsilon \Sigma \frac{b_n c_n}{\mu_n^2} \\ &\qquad + \zeta \Sigma \frac{c_n^2}{\mu_n^2} + \ldots, \\ &\text{u. s. w.} \end{aligned}\right\} \quad (32)$$

Die bei der unbestimmten Elimination erscheinenden Coefficienten dienen zur Bestimmung der Genauigkeit der Resultate, wie in Nro. 36, b), wobei K'_1 oder der mittlere Werth des Quadrats des Fehlers einer Beobachtung von der Art, zu welcher die erste von den vorliegenden Beobachtungen gehört, an die Stelle des obigen K' zu setzen ist, oder das Gewicht der ersten Beobachtung als Einheit für die Gewichte der Bestimmungen gilt.

Wird nur *eine* Gröfse ξ gesucht, so ist der plausibelste Werth von ξ

$$= \frac{\Sigma \frac{a_n \delta_n}{\mu_n^2}}{\Sigma \frac{a_n^2}{\mu_n^2}},$$

und der wahrscheinliche Fehler dieser Bestimmung

$$= 0.67449 \sqrt{\frac{K'_1}{\Sigma \frac{a_n^2}{\mu_n^2}}},$$

oder das Gewicht dieser Bestimmung, das Gewicht der ersten Beobachtung als Einheit angenommen,

$$= \Sigma \frac{a_n^2}{\mu_n^2}.$$

Bei zwei unbekannten Gröfsen ξ, v ist das Gewicht der plausibelsten Bestimmung von ξ

$$= \frac{\Sigma \frac{a_n^2}{\mu_n^2} \Sigma \frac{b_n^2}{\mu_n^2} - \left(\Sigma \frac{a_n b_n}{\mu_n^2}\right)^2}{\Sigma \frac{b_n^2}{\mu_n^2}},$$

und das Gewicht der plausibelsten Bestimmung von v

$$= \frac{\Sigma \frac{a_n^2}{\mu_n^2} \Sigma \frac{b_n^2}{\mu_n^2} - \left(\Sigma \frac{a_n b_n}{\mu_n^2}\right)^2}{\Sigma \frac{a_n^2}{\mu_n^2}}.$$

Das in Nro. 36, c) Gesagte läfst sich hier anwenden, wenn man K' an die Stelle des obigen K' setzt, und unter $\Sigma \lambda_n^2$ den Werth von $\Sigma \left(\frac{l_n - F_n}{\mu_n}\right)^2$ versteht, in den Functionen $F_1, \ldots F_n, \ldots$ für ξ, v, $z \ldots$ ihre plausibelsten Werthe gesetzt.

b) In dem Falle Nro. 32, c) gilt das in Nro. 36. in Beziehung auf die Gleichungen (1) Gesagte für die Gleichungen (9), wobei $L^2 = K' - K^2$ an die Stelle des obigen K' zu setzen ist.

Um die plausibelsten Werthe von K, ξ, $v \ldots$ zu finden, mufs man setzen

$$\Sigma f_n = 0, \quad \Sigma a_n f_n = 0, \quad \Sigma b_n f_n = 0, \quad \text{u. s. w.},$$

oder

$$\left.\begin{aligned} 0 &= -\Sigma \delta_n + sK + \xi \Sigma a_n + v \Sigma b_n + \ldots, \\ 0 &= -\Sigma a_n \delta_n + K \Sigma a_n + \xi \Sigma a_n^2 + v \Sigma a_n b_n + \ldots, \\ 0 &= -\Sigma b_n \delta_n + K \Sigma b_n + \xi \Sigma o_n b_n + v \Sigma b_n^2 + \ldots, \\ &\text{u. s. w.} \end{aligned}\right\} (33)$$

α) Wird aufser K nur *eine* Gröfse ξ gesucht, so ist der plausibelste Werth von K

$$= \frac{\Sigma a_n^2 \Sigma \delta_n - \Sigma a_n \Sigma a_n \delta_n}{s \Sigma a_n^2 - (\Sigma a_n)^2},$$

und der wahrscheinliche Fehler dieser Bestimmung

$$= 0.67449\, L \sqrt{\frac{\Sigma a_n^2}{s \Sigma a_n^2 - (\Sigma a_n)^2}};$$

ferner der plausibelste Werth von ξ

$$= \frac{s \Sigma a_n \delta_n - \Sigma a_n \Sigma \delta_n}{s \Sigma a_n^2 - (\Sigma a_n)^2},$$

und der wahrscheinliche Fehler dieser Bestimmung

$$= 0.67449\, L \sqrt{\frac{s}{s \Sigma a_n^2 - (\Sigma a_n)^2}}.$$

Die in den Nennern dieser Ausdrücke vorkommende Gröfse $s \Sigma a_n^2 - (\Sigma a_n)$ ist der Summe der Quadrate der Differenzen je zweier von den Factoren $a_1, \ldots a_n, \ldots a_s$ gleich, daher ist diese Bestimmung von K und ξ unbrauchbar, wenn alle diese Factoren einander gleich oder nur wenig von einander verschieden sind.

β) Es bezeichne λ_n den bestimmten Werth von $l_n - F_n$ oder von

$$\delta_n - a_n \xi - b_n \upsilon - \ldots,$$

und Δ_n den bestimmten Werth von $l_n - F_n - K$ oder von

$$\delta_n - K - a_n \xi - b_n \upsilon - \ldots,$$

wenn man für K, ξ, υ . . . ihre durch die Gleichungen (33) gegebenen plausibelsten Werthe substituirt; so ist $\lambda_n = \Delta_n + K$, also, da vermöge der ersten von den Gleichungen (33) $\Sigma \Delta_n = 0$ ist,

$$\Sigma \lambda_n^2 = \Sigma \Delta_n^2 + s K^2.$$

Dem genäherten Ausdrucke für K' nach Nro. 33, b) und c) entspricht hier der genäherte Ausdruck für L^2

oder für $K' - K^2$

$$= \frac{1}{s} \Sigma A_n^2;$$

hieraus erhält man einen genäherten Werth von K'

$$= \frac{1}{s} \Sigma A_n^2 + K^2$$

oder

$$= \frac{1}{s} \Sigma \lambda_n^2.$$

Dem genäherten Ausdrucke für K' nach Nro. 33, a) und Nro. 36, c) entspricht hier der genäherte Ausdruck für $K' - K^2$

$$= \frac{\Sigma A_n^2}{s-r-1},$$

da hier zu den r gesuchten Gröfsen ξ, v . . . noch K als gesuchte Gröfse hinzugekommen ist. Hieraus erhält man einen genäherten Werth von K'

$$= \frac{1}{s-r-1} [\Sigma A_n^2 + (s-r-1) K^2]$$

oder

$$= \frac{1}{s-r-1} [\Sigma \lambda_n^2 - (r+1) K^2].$$

(Die Fortsetzung folgt.)

IV.

Analyse des Meteoreisens von Bohumiliz;

vom

Med. Dr. Ritter von *Holger*.

(Vorgetragen in der physikalisch-chemischen Section der Versammlung der deutschen Naturforscher und Ärzte zu Hamburg am 21. September 1830.)

Dieses neue merkwürdige Meteoreisen ist das jüngste dieser Art. Es wurde im Herbste 1829 bei *Bohumiliz* im Prachiner Kreise in Böhmen gefunden, indem die Pflugschar eines Ackermannes, in ihrem Laufe aufgehalten, den Pflüger aufforderte, die Ursache dieses Aufenthaltes genauer zu erforschen. Von seinem Fall ist nichts bekannt, nur im Vertrauen auf die Haltbarkeit der bekannten Gründe nimmt man seinen meteorischen Ursprung an. Es wog 103 Pf. Baron *Franz* von *Maláva* auf Skalic verehrte es dem böhmischen National-Museum, dieſs übersandte dem k. k. Naturalien-Cabinette zu Wien ein Stück, welches Herrn von *Widtmanstätten* zur Herstellung einer geätzten Fläche mitgetheilt wurde. Von den bei dieser Gelegenheit abgesägten Resten erhielt ich einen zur ersten Analyse; die zweite machte ich von Feilspänen, die mir Hr. von *Widtmanstätten* mit der Bemerkung übergab, dafs sie vollkommen rein wären, und höchstens einen kleinen Überschufs von Eisen enthalten könnten, wie es sich denn später auch so ausweisen wird.

Da bisher bloſs eine vorläufige Analyse desselben von Prof. *Steinmann* bestand, welcher sich bloſs auf die Nachweisung des Nickelgehaltes beschränkte, so war es noch immer Zeit, eine neue zu versuchen, zumal es

nicht durch zu ofte Versuche bestätiget werden kann, daſs die acht Bestandtheile, deren Mehrzahl ich zuerst in den Meteoreisenmassen auffand, sich auch wirklich in allen dergleichen Körpern vorfinden.

Die ausführliche Beschreibung dieser Masse findet sich zusammt *Steinmann's* Analyse in den Jahrbüchern des böhmischen Museums, Bd. I., Heft II., Jahrgang 1830. Sie gehört zu den *derben nickelhältigen Gediegeneisenmassen*, ist sichtbar zusammengesetzt, und läſst sich in dünnen abgesägten Stücken oder an den Ecken durch Hammerschläge in die Theilmassen trennen. Sowohl an dem Stücke, welches ich der ersten Analyse unterwarf, als an der groſsen geätzten Fläche waren diese kleineren Bestandstücke der ganzen Masse deutlich zu unterscheiden, und da sie sich durch lichteres und dunkleres Grau auffallend auszeichneten, so läſst sich vermuthen, daſs nicht leicht bei einem Meteoreisen die quantitativen Analysen so abweichend seyn werden, als bei diesen. Auſserdem bemerkt man noch Einfassungsleisten der beiden Massen, welche von speiſsgelber Farbe sind, und die man für Schwefelkies halten möchte. Dann waren noch zwei schwarze Flecken auf der geätzten Fläche sichtbar, die nur unvollkommen von der Säure angegriffen wurden, und deren einer das Ende eines gekrümmten, durch die ganze Masse laufenden Zapfens zu seyn schien.

Im Chlor löste sich die Masse gleichförmig auf, ohne daſs ein Gerippe, wie bei andern Massen, zurückblieb; auch bemerkte ich weder ausgeschiedenen Schwefel, noch den mindesten Geruch nach entbundenem Hydrothiongas. Dieſs bestärkte mich in der Vermuthung, daſs die Masse selbst nicht, sondern nur die Einfassungsleisten Schwefel enthielten. Denn läugnen konnte ich sein Vorhandenseyn nicht, da ihn *Steinmann* und *Widtman-*

stätten deutlich darin nachgewiesen hatten, und andererseits war ich sicher, dafs das zur ersten Analyse verwendete Stück nichts von den Einfassungsleisten enthalten hatte, und die zur zweiten Analyse verwendeten Feilspäne konnten nichts davon enthalten, wiewohl dieſs sehr schwer anzunehmen ist, da das sich entbindende Hydrothiongas durchaus nicht hätte verborgen bleiben können, indem ich nach ihm mit besonderer Aufmerksamkeit forschte. Das Chlor liefs einen Körper unaufgelöset, der, wie *Steinmann* angibt, theils als dunkelgraues Pulver, theils als lichtgraue, metallisch glänzende Blättchen sich zeigte, und den ich mit ihm für *Eisencarbonid* halte. Er war, wie die Analysen lehrten, stets in wechselnden Verhältnissen vorhanden, und daher als Gemengtheil anzusehen.

Durch einen Strom Hydrothiongas wurde aus der sauren Auflösung nichts gefällt. Als sie dann neutral gemacht wurde, fällte benzoesaures Kali das Eisenoxyd. Hierauf wurden aus der rückständigen Lauge die übrigen Oxyde durch carbonsaures Kali ausgeschieden, und es blieb, was noch bei keiner früheren Analyse der Fall war, ein Körper in dem carbonsauren Kali aufgelöset. Dieser war noch mit Thonerde verunreiniget, konnte aber durch carbonsaures Ammoniak, worin er allein auflöslich war, von ihr getrennt werden. Da er sich in ätzendem und carbonsaurem Kali und in *carbonsaurem Ammoniak* leicht löste, und aus seiner Auflösung in Säuren durch reines Ammoniak weifs gefällt wurde, auch aus seiner Auflösung in carbonsaurem Ammoniak durch blofses Erwärmen mit weifser Farbe sich ausschied, konnte ich ihn mit allem Grunde für *Glycinerde* halten, und sonach wurde das *Glycium* hier zum ersten Male als Bestandtheil der Meteoreisenmassen aufgefunden.

Die gefällten Oxyde waren apfelgrün, bei der zwei-

ten Analyse aber, wo nicht alles Eisen durch das benzoesaure Kali gefällt wurde, dunkelgrün vom carbonsauren Eisenoxydul. Sie wurden in Salpetersäure gelöset, und die Lösung durch Ammoniak zerlegt. *Nickel* und *Kobalt* blieben aufgelöset, deren ersteres durch Ätzlauge, letzteres durch Schwefelammoniak ausgeschieden wurde.

Der durch Ammoniak erhaltene Niederschlag wurde wieder in Salpetersäure gelöset, und die Lösung durch carbonsaures Ammoniak zerlegt. *Kalk* und *Magnesia* blieben nun aufgelöset, und wurden durch kleesaures Ammoniak und durch phosphorsaures Natron getrennt. Hiebei hatte aber das carbonsaure Ammoniak wieder etwas *Beryllerde* aufgelöset, es wurde daher die Lösung, bevor noch das kleesaure Ammoniak zugesetzt wurde, mit Salpetersäure gesättigt, dann durch reines Ammoniak die *Beryllerde* ausgeschieden.

Der in carbonsaurem Ammoniak unlösliche Niederschlag enthielt noch *Eisen*, *Mangan*, *Thonerde*, *Beryllerde*, und bei der zweiten Analyse etwas *Nickel*. Er wurde in Ätzlauge gekocht, diese löste Thon- und Beryllerde auf. Die Auflösung wurde dann zuerst mit Salpetersäure neutralisirt, dann mit einem Überschufs von carbonsaurem Ammoniak versetzt, der die Thonerde fällte und die Beryllerde zurückhielt; letztere wurde dann durch Ätzammoniak auf die angegebene Weise abgeschieden, und zugleich mit der früher gefundenen gewaschen, getrocknet, gewogen und auf Beryllium berechnet.

Was das Kali zurückliefs, wurde in Salpetersäure gelöset; daraus durch benzoesaures Kali zuerst der letzte Rest von *Eisen*, dann durch carbonsaures Kali das *Mangan* gefällt. Bei der zweiten Analyse war letzterer Niederschlag ganz apfelgrün, weil mit der gröfseren Menge

Eisen auch etwas Nickel zurückgehalten worden war. Er mufste daher neuerdings in Salpetersäure gelöset, und in aufgelöstes Nickel- und ausgefälltes Manganoxyd durch carbonsaures Ammoniak zerlegt werden. Endlich wurde das Nickeloxyd durch Ätzlauge gefällt, es war jedoch nicht ganz vom Manganoxyde frei.

In dem vom Chlor ungelöset gelassenen Eisencarbonide war das Eisen nicht so leicht, als in dem der Cap'schen Masse nachzuweisen. Durch das Glühen mit Salpetersäure wurde es nicht rothbraun. Erst als die geglühte Masse in concentrirter *aqua reginae* gekocht wurde, löste sich Eisen in der Säure auf, und konnte durch Reagentien darin nachgewiesen werden; allein gänzliche Zerlegung der Masse wäre erst durch wiederholtes Ausglühen und Kochen mit Säure möglich gewesen.

Von diesem Eisencarbonide erhielt ich bei der ersten Analyse 1.34 (nach *Steinmann* 1.12), bei der zweiten 4.78. Es waren daher auflösliche Bestandtheile bei der ersten Analyse 98.66, bei der zweiten 95.22; diese enthielten folgende Gewichtsmengen der einzelnen Bestandtheile:

	Erste Analyse.	Zweite Analyse.
Eisen	86.67	83.67
Nickel	8.12	7.83
Kobalt	0.59	0.60
Mangan . . .	0.46	0.58
Calcium . . .	0.41	1.08
Glycium . . .	0.12	0.10
Alumium . . .	0.32	0.42
Magnium . . .	0.13	0.10
	96.82.	94.38.
Verlust . . .	1.84.	00.84.

Da ich keinen Grund habe, eine der beiden Analysen für verläfslicher als die andere zu halten, indem ich mir bei keiner von beiden eines merkbaren Versehens bewufst bin, so scheint daraus zu folgen, dafs kein bleibendes Verhältnifs der Bestandtheile in diesen Meteoreisenmassen anzutreffen sey, was ich wohl nie in ihnen zu finden hoffte. Nur das Verhältnifs der Hauptbestandtheile: *Eisen* und *Nickel*, ist, mit Rücksicht auf die ungleiche Menge unauflöslicher Bestandtheile, nach beiden Analysen dasselbe, die Mengen der Nebenbestandtheile scheinen aber keiner Regel zu folgen. Auffallend war es mir, dafs ich Eisen und Nickel hier in derselben Menge, wie im Eisen von Lénarto fand, ich wage aber nicht, darauf einen Schlufs zu gründen, selbst wenn die *Widtmanstätt*'schen Figuren beider Massen, wie es bei flüchtiger Betrachtung zu seyn scheint, einige Übereinstimmung zeigen sollten. — Dafs ich hier das *Glycium* fand, welches ich in keiner früheren Masse auffinden konnte, läfst erwarten, dafs man auch noch mehrere Metalle in solchen Massen auffinden wird. Dafür fand ich aber hier kein *Silicium*, wie in den Massen von Lénarto und Agram, und, noch in keiner Masse *Chrom*, die Ellenbogner ausgenommen, welches doch von Andern in diesen Körpern schon gefunden wurde. Immer geben daher die vielen quantitativen und qualitativen Abweichungen in der Zusammensetzung dieser Körper wenig Hoffnung, eine sichere, empirische Basis unserer Theorien zu finden, und wir scheinen nach so vielen Jahren noch immer nicht einmal an der Schwelle der Werkstätte zu stehen, in welcher diese merkwürdigen Körper bereitet werden.

V.

Ein Beitrag zu der Seite 88 beschriebenen Filtrir- und Extractionsmaschine;

von

Joseph Knezaurek.

Der von mir angegebene Filtrir- und Extractionsapparat hat zum Zwecke, durch Verdichtung der atmosphärischen Luft, welche in den Apparat eingeschlossen und durch Wasser gesperrt ist, das Filtriren und Extrahiren zu beschleunigen.

Damals ist es mir aber nicht eingefallen, dafs durch das entgegengesetzte Verfahren, nämlich durch Verdünnung der atmosphärischen Luft, derselbe Endzweck erreicht werden könne. Es handelte sich nun um Construirung eines solchen Filtrirapparates, in welchem die eingeschlossene Luft verdünnt, und dadurch das Gleichgewicht zwischen ihr und der äufsern atmosphärischen Luft aufgehoben wird.

Der in Fig. 26 dargestellte Apparat leistet dieses: *abcd* ist ein Cylinder von verzinntem Eisen- oder Kupferblech, der oben offen, unten aber verschlossen ist. In diesem Cylinder befindet sich ein anderer *efop* von demselben Materiale, der mit ersterem auf demselben, nur etwas kleinerem Boden befestiget, oben aber ebenfalls offen ist. Bis *mn* wird Wasser oder irgend eine andere, ziemlich dichte metallische Salzauflösung eingefüllt, die jedoch auf das Metall, aus welchem der Filtrirapparat verfertiget ist, keine chemische Einwirkung hat, um das Oxydiren des Metalls zu verhüten. In den inneren Cylinder *efop* wird zum Auffangen der filtrirten oder extrahirten Flüssigkeit ein Gefäfs aus Glas, Porzellan, Zinn etc. aufgestellt. Der Cylinder *ihrs* end-

lich, ebenfalls aus demselben Materiale verfertigt, hat oben einen zinnernen Trichter *q* von 90° oder 45° fest eingelöthet, unten bei *rs* ist derselbe offen, oben hat er zu beiden Seiten flache Handhaben. An dem obern Theil dieses Cylinders ist eine kleine Pippe angebracht, um Luft in den Apparat einzulassen, und um den Cylinder, der bis *mn* in die Sperrflüssigkeit eingesenkt ist, bequem herauszuziehen, endlich um die extrahirte oder filtrirte Flüssigkeit aus dem untergestellten Gefäfse herausnehmen zu können.

Ist so weit alles vorgerichtet, so wird in den Cylinder *efop* das zum Auffangen der filtrirten Flüssigkeit bestimmte Gefäfs aufgestellt, der mit dem Trichter versehene Cylinder *ihrs* in die Sperrflüssigkeit so tief eingesenkt, bis er mit seinen zwei flachen Handhaben *ih* bei *ab* aufliegt, die Pippe geöffnet, und in den Filtrir- oder Extrahirtrichter, der mit Fliefspapier, Leinwand etc. unter vorerwähnten Winkeln von 90° oder 45° inwendig belegt ist, die zu extrahirende oder zu filtrirende Flüssigkeit langsam bis zu der punctirten Linie eingegossen. Sodann verschliefst man die Pippe, hebt den Cylinder *ihrs* bei den zwei flachen Handhaben *ih* etwas in die Höhe (z. B. in die Lage, in welcher er gezeichnet ist), und stellt zwei Bretchen auf *ab*, die so hoch sind, als der Hub beträgt, unter die zwei Handhaben. Durch dieses Emporheben des Filtrircylinders wird die in den Apparat durch die Sperrflüssigkeit eingeschlossene atmosphärische Luft etwas verdünnt, und die innere Sperrflüssigkeit steigt etwas in die Höhe, während dem die äufsere sich in demselben Verhältnisse senkt. Die äufsere und dichtere atmosphärische Luft wirkt nur vermöge ihrer gröfsern Expansivkraft auf das auf dem Filtrum vorhandene Fluidum, und das Filtriren oder Extrahiren geht schnell vor sich. Am Ende öffnet man die Pippe, und hebt den Cylinder aus der Sperr-

flüssigkeit heraus, um die durchfiltrirte Flüssigkeit ausheben zu können.

Je höher der Hub des Filtrircylinders gestellt wird, um desto mehr wird die innere eingeschlossene Luft verdünnt, und das Filtriren geht desto schneller vor sich.

Oft ist es sehr wünschenswerth, schnell zu filtriren, besonders, wenn man es mit vegetabilischen Auflösungen zu thun hat, die schnell durchgetrieben werden müssen, weil sie sonst sich oft zersetzen, und durch Aufnahme atmosphärischen Sauerstoffes ihre Natur verändern. Bei solchen Extractionen ist auch das schnelle Beendigen der Arbeit sehr zu empfehlen, weil bei längerem Aufschub und Verweilen auf dem Filtrum oft Stoffe aufgelöst werden, die man in der Auflösung nicht zu haben wünscht. Dieses ist besonders der Fall, wenn man Vegetabilien extrahirt, die in ihrer chemischen Mischung Gerbestoff und Gallussäure enthalten, deren es so viele gibt.

Verweilt man etwas länger mit der Extraction, so wird der Gerbestoff und die Gallussäure auch mit extrahirt, und verunreinigt und verändert auf diese Art das Extract.

Dieses soll besonders bei pharmaceutischen Arbeiten eben so berücksichtiget werden, so wie man vermeiden soll, die Siedhitze anzuwenden, und zu viel Extractionsfluidum auf die zu extrahirende Substanz aufzugiefsen, weil sich sonst oft die schwerer auflöslichen Bestandtheile mit auflösen, die nicht jedes Mal zur Wesenheit des Extracts gehören, und weil der in vielen Pflanzen vorhandene vegetabilische Eiweifsstoff durch die Siedhitze coagulirt, und das in seine coagulirte Masse eingeschlossene Extract der übrigen extrahirten Masse gleichsam mechanisch entzogen wird, und daher verloren geht.

VI.

Über die Härte der Krystalle;

vom

Prof. *M. L. Frankenheim* in Breslau.

(Beschluſs.)

37) Nachdem wir nun die wissenschaftliche Bedeutung der bei den Phänomenen der Cohäsion anzuwendenden Begriffe, so weit es zu unserem Zwecke Noth thut, festgestellt haben, können wir uns der Untersuchung dessen, worin eigentlich die *Härte* bestehe, ausschlieſsend zuwenden.

Wenn ich z. B. einen Krystall mittelst einer eisernen Nadel zu ritzen versuche, so muſs ich zuerst den Widerstand zu überwinden suchen, der aus der Elasticität des Krystalls und des Eisens entsteht. Dieser Widerstand steigt, bis er die Grenze der Reaction in jenem Körper, bei dem sie kleiner ist, erreicht. Sobald aber die Nadel mit einer Kraft geführt wird, welche die Grenze der Reaction des Krystalles und des Eisens übersteigt, so kann der Widerstand nicht mehr wachsen, und wenn die Reaction des Krystalls die kleinere ist, so widerstehen und geben seine Theile der Bewegung der Nadel mit gleich bleibender Stärke nach. Von zwei der Einwirkung derselben Nadel unterworfenen Körpern wird jener mit geringerer Kraft geritzt, bei dem die Grenze der Reaction niedriger liegt. Allein jene dem Ritzen widerstehende Kraft nennen wir *Härte*, so daſs die Grenzen der Reaction zweier Körper, falls sie auf gleichförmige Weise beobachtet werden, dieselben Gesetze befolgen und in denselben Ursachen gegründet sind, wie die Härte.

Doch waltet zwischen der Kraft, durch welche ein Körper zerrissen oder seine Theile verschoben werden, und zwischen der Härte der Unterschied ob, dafs diese blofs von der Beschaffenheit des Körpers, jene aber grossen Theils auch von der Gestalt des Körpers und der Art der Einwirkung, und nicht blofs von der Gröfse der Berührungsfläche, sondern auch vom Verhältnifs der Länge zur Dicke abhängt. Denn die Gröfse des Widerstandes nimmt mit der Dicke zu, so dafs bei einem kurzen Körper das Gewicht, welches eine bleibende Veränderung mittelst eines Druckes hervorbringt, oft um vieles gröfser ist, als das, was diese Veränderung durch Ausdehnung oder Beugung erzeugen soll. Daher kann ein Krystall oft von einem, unter sonst gleichen Umständen durchaus nicht härteren, so z. B. können die Flächen eines Körpers durch seine Ecken und Kanten, der Diamant durch sein Pulver geritzt werden. Man darf daher nicht fragen, ob der Krystall oder das ritzende Metall, sondern man mufs die Untersuchung darauf beschränken, wer aus zweien mit derselben Nadel geritzten Krystallen der härtere sey *).

*) Zwei ganz glatte Flächen werden durch die wechselseitige Reibung durchaus nicht angegriffen, sondern nur, wenn eine derselben rauh ist. Bei der Reibung von Flächen ungleicher Härte werden beide angegriffen, jedoch der harte Körper bei kleiner Oberfläche stärker als der weichere bei grofser, wie eine Scheibe weichen Eisens und Kupfers, die mit einer bestimmten Geschwindigkeit um ihre Axe gedreht, und an eine dünne Feder oder ein Rädchen, oder einen gezahnten Stift aus Stahl, oder an den Rand eines harten Steines gerieben wird. Wenn bei der Wechselwirkung zweier Körper der eine auch eine Spannung oder einen Seitenzug erleidet, so kann, auch wenn er der härtere ist, seine Reaction kleiner werden, und er eher brechen, als der weichere; so kann

Die Härte fällt also mit der Grenze der Reaction zusammen, in so fern diese auf der Beschaffenheit der Körper beruht; der Unterschied zwischen beiden liegt lediglich in dem, was man durch die Beobachtung zu finden sucht, da nämlich der Werth der Reaction durch Zahlen bestimmt und durch die Härte nur der Ort zu bezeichnen gesucht wird, den der beobachtete Körper in der Reihe der Reactionen einnimmt. Ohne Zweifel gewährt die Kenntnifs des erstern Verhältnisses mehr Nutzen, allein es ist nur in seltenen Fällen bestimmbar. Denn jene Körper, die in hinlänglicher Gröfse vorkommen, wie z. B. die Metalle, haben keine gleichförmige Textur, und die Krystalle, die wohl letztere Eigenschaft besitzen, haben wieder keine zur Erforschung ihrer Cohäsion durch Gewichte taugliche Form. Hiezu kommt, dafs bei den meisten und selbst von den genauesten Beobachtern angestellten Versuchen so grofse Fehler unterlaufen sind, dafs man aus diesen Versuchen kaum die Härtenfolge der Körper herstellen könnte, und man daher bei so bewandten Umständen mit anhaltendem Fleifse und nur einiger Geschicklichkeit durch die Untersuchung des Ritzens Unterschiede zu entdecken vermag, die bis jetzt noch keiner Derjenigen, die den verwickelteren Weg eingeschlagen haben, aufzufinden im Stande war.

38. Doch um auf den eigentlichen Zweck der Untersuchung, die Härteunterschiede in demselben Körper, zurück zu kommen, so beweisen diese augenscheinlich eine nach den verschiedenen Richtungen wechselnde Grenze der Reaction. Indefs thut es vor Allem Noth, dafs wir zum bessern Verständnifs der oben dargestell-

---

ein an einem oder an beiden Enden geklemmter Stahlstab mittelst eines hölzernen Hammers oder durch die Rauhigkeiten eines rotirenden Rades gekrümmt werden.

ten Versuche erforschen, welche Reaction Körper von wechselnder Cohäsionskraft der Nadel beim Ritzen entgegensetzen: Der Widerstand sowohl der dehn- als der brechbaren Körper äufsert sich zwar zuerst auf gleiche Weise, allein wenn die Kraft, womit die Nadel gestrichen wird, die Grenze der Reaction übersteigt, so offenbart sich der Unterschied beider Körper, die Theile der letztern werden gebrochen, jene der erstern verschoben. In den verschobenen Theilen kann aber leicht nicht nur der Widerstand und die Reaction gesteigert, sondern auch die krystallographische Richtung der Theile geändert, und die ohnedies nur geringen Unterschiede der Beobachtung ganz entzogen werden (s. §. 10.). Indefs ist bei weitem der gröfste Theil der Salze und Steine so brechbar, dafs ihre Theile durch die Nadel entweder von einander getrennt werden, oder wenigstens keine Änderung rücksichtlich der Grenze der Reaction erleiden. Nur darf man die Nadel nicht zu stark streichen, weil sonst auch die entfernteren Theile brechen.

Am besten wäre es, und man würde die gröfsten Härteunterschiede erhalten, wenn man auf die Körper so einwirken könnte, dafs ihre Theile nur in bestimmten Richtungen von einander getrennt werden, in allen andern aber an einander haften bleiben. Allein da jeder Theil der Oberfläche mit allen andern zusammenhängt, so kann diese einseitige Trennung nicht durchgesetzt werden, aber dennoch können jene erwähnten Härteunterschiede nie verschwinden, wie uns die Erfahrung und folgende Schlüsse überzeugen.

39) An Krystallen, die uns nur Ebenen und Kanten darbieten, haben auch die Krystallographen bis jetzt nur die Eigenschaften dieser Ebenen untersucht, aber die Richtungen der anziehenden Kräfte müssen auf die zu

den geritzten Flächen senkrechten (Normalen) bezogen werden. Untersuchen wir nun die Cohärenz der Krystalle in der auf die geritztwerdende Fläche senkrechten Richtung *A*, *B* sey die der Bewegung der ritzenden Nadel parallele Richtung, und *C* eine dritte, auf beide senkrechte. Die Cohärenz in der Richtung *A* ist es nun, welche die in der Richtung *B* sich bewegende Nadel zuerst zu überwinden hat. Die streichende Nadel ritzt nämlich die betreffende Fläche desto leichter, je mehr sie dem Drucke nachgibt, und die am meisten geritzte Fläche übt demnach auch die geringste Reaction auf die Nadel aus.

40) Allein aus der Reaction dieser Kraft, die nach allen auf der geritzten Ebene möglichen Linien gleich stark wirkt, können unmöglich die §. 7—18 beschriebenen Unterschiede entstanden seyn, und müssen daher aus den Verschiedenheiten der Reaction in Richtungen, welche der geritzten Ebene parallel sind, erklärt werden. Sobald die Nadel sich einmal eine Furche gebildet hat, und in dieser fortbewegt wird, so werden die *vor* derselben liegenden Theile zusammengedrückt, die Grenze der Reaction wird überschritten und brechen. Ob dieser Bruch nun wirklich blofs durch Compression geschieht, oder, was wahrscheinlicher ist, durch die Ausdehnung, die da immer obwaltet, wo die Körper blofs an einem Theile ihrer Oberfläche zusammengedrückt werden, übergehe ich hier. Aber so viel bleibt ausgemacht, dafs die Theile in der Richtung der Bewegung *B* stärker zusammengedrückt werden, als die in der Richtung *C* oder in was immer für einem andern gegen die Richtung der Nadel unter einem rechten oder schiefen Winkel geneigten Richtungen liegenden Theile. Der Widerstand gegen die Nadel ist daher ein Integrale der Gröfse der einzelnen Functionen und des Neigungs-

winkels. Würden blofs die Theile der Richtung B wirken, und wäre die Reaction aller übrigen Theile $= o$, so würden die Linien, wo der kleinste oder gröfste Widerstand Statt findet, den Richtungen der kleinsten und gröfsten Reaction parallel seyn; aber wo auch die Theile anderer Richtungen ihren Einfluſs äufsern, da ist es möglich, dafs sie nicht mit den Richtungen der gröfsten und kleinsten Reaction zusammenfallen, allein auf keinen Fall können sie weit von denselben entfernt liegen, und zwar um so weniger, je gröfser die Unterschiede zwischen dem Maximum und Minimum des Widerstandes sind. Wenn das Gesetz des Zusammenhanges der Cohärenz mit der Lage der Axen, und des Widerstandes mit dem Neigungswinkel gegen die Richtung der Nadel bekannt wäre, so könnte das hier Angedeutete mathematisch aus einander gesetzt werden *).

41) Noch habe ich der Beobachtungen nicht erwähnt, welche den Einfluſs der dem Striche parallelen Linien beweisen. Man findet nämlich nicht blofs in verschiedenen Ebenen oder in verschiedenen Linien derselben Ebene, sondern auch in derselben Richtung derselben Ebene Härteunterschiede, je nachdem man in der einen oder in der entgegengesetzten Richtung streicht. Nehmen wir einen rhomboëdrischen Kalk, denn an ihm sind diese Härteunterschiede am leichtesten zu entdecken, er ist spröde, ziemlich gleichförmig, und seine Oberflache läfst sich, wegen der grofsen Spaltbarkeit, oft erneuen, und daher die Beobachtung häufig wieder-

*) Jener Theil dieser Function, der von der Lage der Axen abhängt, kann durch die Erscheinungen der Polarisation des Lichtes in Krystallen mit ziemlicher Genauigkeit bestimmt werden; einen Beitrag hiezu hoffe ich bald liefern zu können. Der zweite Theil scheint von dem Cosinus des Neigungswinkels abzuhängen.

holen. Die Linien des gröfsten Widerstandes sind die den längeren Diagonalen parallelen, die des kleineren sind den Kanten und kürzern Diagonalen parallel, die ersteren liegen stets zwischen zwei scharfen oder zwei stumpfen Kanten, alle andern zwischen einer stumpfen und einer scharfen. Bei diesen letztern Linien nun zeigt sich ein äufserst verschiedener Widerstand, wenn man ein Mal von der stumpfen Kante zur scharfen hinüber, und das andere Mal von der scharfen zur stumpfen hinüber streicht; stets ist der erstere der gröfsere. So sind es unter allen Linien auf den Flächen des Rhomboëders blofs die den längern Diagonalen parallelen, die, in beiden Richtungen gestrichen, denselben Härtegrad zeigen; ohne Zweifel wegen der symmetrischen Kanten, von denen sie begrenzt werden. So besitzt die kürzere Diagonale, welche in der einen Richtung eine beinahe jener der längeren Diagonale gleiche Härte zeigt, in der andern Richtung von dem schärfern zum stumpfern Ecke die kleinste am ganzen Krystalle. Ähnliche Erscheinungen bemerkte ich auch an andern Krystallen, besonders auffallend am salpetersauren Natrum, das, so wie in der äufsern Form, auch in allen Härteverhältnissen dem kohlensauren Kalke gleicht.

42) Was nun auch die Ursache dieser Erscheinung ist, so ist sie wenigstens an die Bedingung gebunden, dafs eine Theilungsfläche unter einem stumpfen Winkel gegen die Streichlinie geneiget ist, wo dann jene Richtung die gröfsere Härte zeigt, die gegen die durch den Anfang der Linie gehende Theilungsfläche unter einem stumpfen Winkel geneigt ist, jene die geringere, deren Neigungswinkel ein spitzer ist. Die längere Diagonale ist gegen beide Theilungsflächen, gegen die eine unter einem stumpfen, gegen die andere unter einem spitzen Winkel geneigt, daher hebt eine Wirkung die

andere auf; hingegen bei der kürzern Diagonale, die gegen beide Theilungsflächen unter einem gleichen Winkel geneigt ist, addiren sich beide Wirkungen. Bei jenen Varietäten des rhomboëdrischen Kalkspathes, wo die Kantenecken des Rhomboëders durch die Flächen des sechsseitigen Prismas weggenommen sind, konnte man keine Wirkungen der Art entdecken; und wirklich sind da alle Linien entweder zu einer Theilungsfläche unter einem spitzen, zu den beiden andern unter einem stumpfen Winkel oder umgekehrt geneigt, oder wo sie einer Spaltungsrichtung parallel sind, sind sie gegen eine der beiden andern unter einem spitzen, gegen die zweite unter einem stumpfen Winkel geneigt, so dafs die Wirkungen der Theilungsrichtungen sich entweder ganz aufheben, oder wenigstens wechselseitig schwächen.

43) So konnte auch am Anhydrite mit aller Mühe keine Härtedifferenz gefunden werden, weil die Theilungsflächen unter rechten Winkeln gegen einander geneigt sind, und daher keine Verschiedenheit hinsichtlich der Richtungen der Nadel obwalten kann. Dasselbe findet bei allen auf die Axen des zwei- und zweigliedrigen Systems senkrechten Ebenen Statt, und hindert die genaue Untersuchung an vielen Körpern, deren Theilungsrichtungen, an denen sich die kleinen Härteunterschiede fast allein zeigen, den Flächen parallel sind. Beim Gyps zeigt die Ebene der gröfsten Theilbarkeit durchaus keinen Härteunterschied, während sie in auf diese senkrechten Ebenen, die gegen einander unter einem schiefen Winkel geneigt sind, deutlich hervortritt, so dafs in jeder dieser Ebenen die der Richtung der gröfsten Theilbarkeit parallelen, d. i. die horizontalen Linien, einen gröfsern Widerstand in der Richtung zur scharfen verticalen Kante, als in der zur stumpfen leisten. Ähnliche Erscheinungen entdeckt man an einigen

Prismen und Grenzflächen desselben und auch des zwei- und zwei-, so wie des zwei- und eingliedrigen Systems, allein in den Grenzflächen des sechsgliedrigen und drei- und dreigliedrigen Systems konnte man, mit aller Mühe, keine Spur derselben bemerken, obgleich z. B. an jedem Dreiecke eines nach der Richtung der Flächen theilbaren Octaëders drei schiefwinklige Spaltungsrichtungen vorhanden sind. Aus diesen Beobachtungen, so gering deren Anzahl ist, läfst sich doch auf folgende Weise das allgemeine Gesetz derselben ableiten.

44) Die Function, welche wir suchen, hängt von drei Gröfsen ab: 1) von dem Neigungswinkel α der Theilungsfläche gegen die Ebene der Beobachtung, 2) von dem Winkel β der Kante mit der Streichlinie, 3) von der Kraft ν der Theilbarkeit *(fissionis)*. Diese Kraft, die wir noch ausführlicher abzuhandeln haben, von welcher alle Unterschiede in der Gestalt, Wirkung auf das Licht, Wärmeverhältnisse und Härte der Körper, mit einem Worte alles abhängt, wodurch sich feste Körpor von flüssigen unterscheiden, wirkt sicherlich nach allen Richtungen im Innern des Körpers, allein nach dem Vorgange *Brewster's*, *Fresnel's* und Anderer bei ihren Untersuchungen über die Polarisation des Lichtes sey es uns einstweilen, bis zur vollständigen Beweisführung, gestattet, alles auf gewisse symmetrisch liegende Linien und Ebenen zu beziehen, denen beinahe durchaus auch bei spröden Körpern die Richtung der Theilbarkeit entspricht.

45) Wir haben nun bewiesen, dafs, falls die Theilungsfläche auf die Streichlinie senkrecht steht, keine Verschiedenheit in der Härte Statt finde, allein eine desto gröfsere, je kleiner der Neigungswinkel ist; ferner heben die Wirkungen zweier Theilungsflächen, deren eine unter dem Winkel α, die andere unter dem Winkel $180 - \alpha$ gegen die Streichlinie geneigt sind, sich

wechselseitig auf. Diese letztere Eigenschaft theilen zwar alle Functionen des Cosinus mit einander, allein unter diesen ist die Function cos. α gewifs die einfachste; die erste Eigenschaft hingegen kommt allen Functionen des Sinus von β zu, unter welchen also wiederum sin. β die einfachste ist.

Die Abhängigkeit der Härte von den Winkeln α und β wird also durch cos. α sin. β ausgedrückt. Und wirklich erklären sich aus diesem Gesetze, warum bei den drei schief-, jedoch gleich geneigten Theilungsflächen des Octaëders, bei dem sechsseitigen Prisma des rhomboëdrischen Kalkspathes, wo zwei Theilungsflächen unter demselben, die dritte unter einem verschiedenen Winkel gegen die Streichlinie geneigt sind, durchaus keine Verschiedenheit entdeckt werden kann.

46) Bei den jetzt erwähnten Beispielen war die Kraft der Theilbarkeit überall gleich grofs, aber sonder Zweifel werden bei den Körpern, die nach den verschiedenen Richtungen ungleiche Theilbarkeit besitzen, jene Linien keinen Härteunterschied zeigen, in denen die Summe ν cos. α sin. $\beta = 0$ ist. Allein ν cos. α ist nichts anders als die Projection der Theilbarkeitsrichtung auf die Beobachtungsfläche, und ν cos. α sin. β jener Theil derselben, der auf die Richtung der Streichlinie selber projicirt ist, und der für sich allein oder durch Verbindung mit anderen Gröfsen derselben Art auf Null gebracht, alle Härteunterschiede aufhebt. Die Kraft, aus welcher die Härteunterschiede entspringen, wirkt also nach denselben Gesetzen des Gleichgewichtes, wie die bewegenden Kräfte. Hieraus kann nun zwar nicht mit Sicherheit gefolgert werden, dafs auch die Unterschiede in der Stärke des Widerstandes nach den verschiedenen Richtungen sich nach denselben Gesetzen richten, da die Gröfse der Einwirkung der anliegenden Linien nicht

ausgemittelt werden kann, und die Versuche nicht hinreichen, den Unterschied in der Gröfse der Reaction dem Grade nach bestimmt anzugeben: allein so viel bleibt wahrscheinlich, dafs das Gesetz des Wechsels des Widerstandes nicht viel von dem Verhältnisse $\nu \cos.\alpha \sin.\beta$ abweichen könne.

47) Auch darf man nicht vergessen, dafs hier nur die Bedingungen, an die das Eintreten der erwähnten Erscheinungen geknüpft ist, nicht aber die dynamische Ursache derselben dargestellt wurde. Die Anhänger der atomistischen Theorie *Hauy's*, dafs der Krystall aus einer Anzahl unendlich kleiner Krystalle von der primitiven Form bestehe, werden leicht einsehen, ja darin einen Beleg für ihre Ansicht finden, dafs die Theile der Oberfläche in der Richtung vom scharfen zum stumpfen Ende weniger Widerstand leisten, als in der entgegengesetzten; die aber einer anderen Ansicht über Krystalle zugethan sind, werden in dem aufgestellten Gesetze zugleich die Erklärung der Erscheinung sehen.

48) Aus diesen Beobachtungen kann man auch entnehmen, dafs es bei Untersuchung der Härte nicht allein auf den Zusammenhang der verschiedenen Linien, sondern auch auf den der Theile einer und derselben Linie unter einander ankomme, und nur mit Rücksicht auf die verschiedenen Streichrichtungen und die daraus entspringenden Härteunterschiede in einer und derselben Linie kann man mit Zuverläfsigkeit ausmitteln, in welcher Linie die kleinste, in welcher die gröfste Cohärenz sey, oder welche aus allen auf die beobachtete Ebene senkrechten Ebenen am stärksten oder schwächsten mit den ihnen parallelen Linien zusammenhängen. So kann man aus den an der glänzendsten Fläche des Gypses gemachten Beobachtungen bestimmen, auf wel-

che der beiden andern Theilungsflächen die kleinere, auf welche die gröfsere Cohärenz senkrecht stehe, und aus den gröfsten Verschiedenheiten der auf die Spaltungsrichtungen senkrechten Linien kann man entnehmen, dafs die der streifigen Theilungsfläche parallelen Flächen die geringere, und die der muscheligen parallele die gröfsere Cohärenz besitzen.

Aus den Beobachtungen der Härte an den Flächen der gröfsten Theilbarkeit des Baryts geht hervor, dafs jene die scharfe Kante des schiefwinkeligen Prismas hinwegnehmende Fläche eine stärkere Cohäsionskraft habe, als die an der stumpfen Kante liegende, dagegen im Anhydrite und ähnlichen Körpern besitzen die Flächen *A* die geringste, die Flächen *B* eine gröfsere, und die Flächen *C* die gröfste Cohäsion, und die Fläche an der scharfen Kante des schiefwinkeligen Prismas eine geringere als die an der stumpfen.

49) Das hier von der Lage der Ebenen der gröfsten und kleinsten Cohärenz Gesagte und aus den Beobachtungen an einer und derselben Ebene Gefolgerte wird auch durch Beobachtungen an verschiedenen Ebenen bestätiget, und überhaupt erweist sich durchaus das Gesetz als gültig, dafs jene Ebenen, auf welche die Linien der geringsten Härte senkrecht stehen, auch der Bewegung der Nadel mit der geringsten Kraft widerstehen.

50. An den Abstumpfungen der körp. Winkel beobachtet man dieselben Gesetze wie an denen der ebenen Winkel und Kanten. An jenen Hexaëdern, bei welchen die den Diagonalen der Flächen parallelen Linien härter sind, als die Kanten, bei denen sind stets die Abstumpfungen der Ecke, nämlich die Octaëderflächen, härter als die Hexaëderflächen. Weil alle Winkel rechte sind, so kann an der Abstumpfungsfläche keine Ver-

schiedenheit eintreten. Am rhomboëdrischen Kalke sind die Flächen, die in die stumpfen Ecke gelegt werden, bei weitem härter und cohärenter, als die Abstumpfungen der scharfen Ecke, und die Flächen des sechsseitigen Prismas, durch welche die Ecke an den Seitenkanten weggenommen werden, sind viel härter als die Flächen des Rhomboëders. Bei Krystallen, deren Grundgestalt ein spitzeres Rhomboëder ist, ist das Härteverhältnifs dem beim Kalkspathe beobachteten wahrscheinlich ganz entgegengesetzt *).

51) Bis jetzt haben wir die Gesetze der Härte oder der Grenze der Reaction dargestellt; zur Kenntnifs der Cohäsion ist aber auch Einsicht in die Gesetze der Elasticität erforderlich. Allein in dieser Hinsicht sind noch gar keine Versuche gemacht, auch sind sie sehr schwierig anzustellen. Wahrscheinlich wechselt auch diese Kraft mit den Richtungen, und wenn man das an verschiedenen Körpern Beobachtete auf die verschiedenen Richtungen eines und desselben Körpers beziehen darf, so ist die Elasticität desto gröfser, je gröfser die Grenze der Reaction ist; allein um das Gesetz mit Bestimmtheit auszumitteln, mufs man andere Untersuchungen anstellen, als es hier geschehen konnte. So viel ist aber gewifs, dafs die Stärke und die Grenze der Elasticität in einem und demselben Körper jede eine Function der andern sey.

---

*) Vergl. die Abhandlung *Brewster's* in den *Phil. Trans.* vom Jahre 1818, wo er ein ähnliches Gesetz bei den Polarisationserscheinungen des Lichtes in den verschiedenartigen Krystallen nachweist, und welche so wie jede andere über Polarisation des Lichtes von diesem scharfsinnigen und fleifsigen Beobachter gewifs eben so viel Aufmerksamkeit verdient, als die Arbeiten *Fresnel's* und anderer Franzosen.

Vom Verhältnisse der Cohäsion zu den übrigen Eigenschaften der Krystalle.

52) Es erübriget nun, da die verschiedenen Härteunterschiede beschrieben, die Natur der Härte erörtert, und die Cohärenzverhältnisse der Körper, so weit dieses ohne krystallographische Theorie geschehen konnte, dargestellt sind, noch Einiges zu erwähnen, das durch die Verschiedenheit der Cohärenz der Krystalle Licht erhält. Dahin gehört aber alles, wodurch sich Krystalle von anderen Körpern unterscheiden. Die chemische Mischung und Proportion, das spec. Gewicht, der Zusammenhang der Theile der Elasticität, die Kräfte, welche die Elasticität bedingen und bei der Fortpflanzung des Lichtes und der Wärme thätig sind, was von der Natur der Krystalle abhängt, wie die Gestalt, Theilbarkeit, Polarisation des Lichtes und Wirkung der Wärme, alles dieses steht mit der Cohäsion im engsten Zusammenhange. Je verschiedener die Cohäsionskraft nach den verschiedenen Richtungen ist, je mehr die Gestalt von der Kugelform abweicht, desto bedeutender ist die relative polarisirende Kraft, desto gröfser sind die Unterschiede der Ausdehnung durch die Wärme. Wir können daher behaupten, dafs alle jene Erscheinungen, die an Krystallen anders ausfallen, als an andern nach allen Richtungen gleichförmigen Körpern, blofs in der verschiedenen Vertheilung der Cohäsion ihren Grund haben. Zwar fehlt noch viel, um Alles erklären zu können, allein mit Zeit und Mühe darf man fest hoffen, den gegenwärtig noch dichten Schleier, welcher den Zusammenhang zwischen Licht, Wärme, Electricität und der Cohäsion verhüllt, lüften zu können.

53) Die Gestalt der Körper hängt theils von innern, theils von äufsern Kräften ab, bei Flüssigkeiten walten die letztern, unter welche auch die Schwere gerechnet

werden muſs, bei festen Körpern die erstern vor, wiewohl auch sehr Vieles, z. B. die Krümmung der Oberfläche, das Aneinanderreihen der einzelnen Krystalle, und welche Flächen aus der ganzen Reihe der einzelnen kleinen Krystalle entstehen, durch äuſsere Kräfte bestimmt wird. Nun hat zwar schon *Hauy* durch sein Gesetz der rationalen Verhältnisse die Eigenschaften aller Flächen derselben Reihe ausgemittelt, allein warum bei einer bestimmten Cohäsion eben diese und keine andere Reihe entstehe, warum sich die secundären Flächen in ihrer Härte anders als jene der Grundgestalt verhalten, warum die Krystalle, es möge nun durch Abdampfung oder durch Ausscheidung aus Auflösungen, oder durch Verbindung mehrerer kleiner Krystalle geschehen, sich stets so vergröſsern, daſs die neuen Flächen den alten parallel bleiben, bedarf und verdient wohl eine eigene Erklärung.

54) Auch in dem Streite der Krystallographen, ob die Lage der Flächen stets auf unter einander senkrechte Axen oder bald auf rechtwinkelige, bald auf schiefe zu beziehen sey, geben die Härtebeobachtungen eine entscheidende Stimme für die letzte Meinung ab. Ja sie zeigen sogar, daſs in manchen Krystallen, wo man die Lage der Flächen ohne besondern Zwang auf gerade Axen reduciren kann, die schiefen Axen den geraden vorzuziehen sind, wie bei vielen Gestalten des zwei- und zweigliedrigen Systems, so daſs das rhomboëdrische System mit gleichen Axen und Winkeln das einfache unter allen schiefwinkeligen ist. Bei manchen Krystallen bedarf es nicht einmal einer genauen Untersuchung der Härte und der Winkel, sondern lediglich der Beachtung des Charakters der Flächenverbindung, um die Schiefe der Axen ersichtlich zu machen. So hat *Neumann* die Krystallgestalt der Axinite (*Pogg.* Ann. IV.) zwar aus der Annahme

gerader Axen gut zu erklären, jedoch die Formeln nicht einfach darzustellen vermocht. Nimmt man aber die Flächen *M*, *P*, *y* (wie sie in *Neumann's* Darstellung bezeichnet werden) als die der Grundgestalt, und die Linien, die durch den Durchschnitt der Flächen gebildet werden, als die Axen oder Einheiten des Systemes an, so erhalten alle andern Ebenen, nach der *Weifs*'schen Bezeichnungsart, solche Formeln, dafs die Krystallgestalt des Axiniten unter die einfachsten der Wissenschaft zu zählen kommt. Denn die Coefficienten der Axen sind meistens ∞, 1 manchmal 2, in einem einzigen Falle (bei den Flächen σ) 3, niemals eine höhere Zahl. Ähnliche Bemerkungen drängen sich uns beim Malachit, beim Arsenikkies, deren Krystalle von *Wakkernagel* (*Kastn.* Archiv, V.) nach *Weifs's* Methode trefflich beschrieben worden sind, und bei den meisten andern Krystallen der minder regulären Systeme auf. Kurz, ich nehme keinen Anstand, zu behaupten, dafs bei allen Systemen mit drei gleichen oder ungleichen, geraden oder schiefen Axen die Bildung der Flächen dieselbe sey, oder dafs bei rechter Wahl der Axen die Formeln für die secundären Flächen aus denen der primären durch Vorsetzung der Coefficienten ∞, 0, 1, 2, sehr selten 3 oder einer gröfsern Zahl erhalten werden, und dafs überhaupt die Flächen mit den kleinsten Coefficienten am häufigsten vorkommen. So z. B. kommen in der gesammten Krystallreihe des rhomboëdrischen Kalkes, wie sie *Mohs* aufgestellt hat, blofs die Coefficienten 1, 2, 3, 4 und 5, und unter diesen die kleinern viel häufiger als die gröfsern vor. Das hier Gesagte läfst sich übrigens leicht auf schiefe Axen anwenden und beweisen; bestimmt man statt der Lage der Ebenen die der auf schiefe Coordinaten Senkrechten, so erhält man sehr einfache Formeln, aus denen beinahe mit derselben

Kürze, wie die Formeln *Mohs's*, sich die Gleichungen der Winkel entwickeln lassen.

55) Am engsten hängt mit der Cohärenz die Theilbarkeit der Krystalle nach den verschiedenen Richtungen, oder, um sich genauer auszudrücken, jene Eigenschaft der Krystalle zusammen, vermöge welcher die Bruchflächen stets in bestimmten Ebenen liegen. Diese Theilungsrichtungen zu entdecken, hat wegen des Gebrauches zur Bestimmung der Mineralien und ihrer Krystallgestalt viele Krystallographen beschäftiget, allein den Grund der Theilbarkeit aufzufinden hat, die Meinungen der Atomistiker abgerechnet, noch beinahe Niemand versucht. Man könnte versucht werden, mit Rückblick auf die oben dargestellten Cohäsionsphänomene, die Theilungsebenen für die der kleinsten Cohäsion zu halten, weil in der Richtung dieser Ebenen der Krystall natürlich leichter theilbar seyn müfste, als in jeder andern; allein die Erfahrung widerlegt diesen Schlufs. Die Theilungsrichtungen sind zwar gröfstentheils denen der kleinsten Cohäsion parallel, allein sehr oft auch den Ebenen der gröfsten Härte, und in vielen Krystallen, und eben jenen, die am leichtesten spaltbar und zur Beobachtung der Theilungsrichtung die tauglichsten sind, wie beim Feldspath, Kalkspath, Baryt, sind die Theilungsrichtungen allen Flächen, die zu den ersten Gliedern der Reihe gehören, parallel, so dafs die Theilungsrichtungen mit gleichem Rechte den härtesten wie den weichsten Flächen entsprechen können.

56) Der Ursprung der Theilungsrichtungen liegt also anderswo. Um ihn aufzufinden, untersuchen wir, was bei der Theilung der Körper vorgehe. Zuerst wird ein Theil der Oberfläche zusammengedrückt, dieser Druck pflanzt sich durch den ganzen Körper fort, so dafs alle an einander gränzenden Theile, die zu derselben Zeit

zusammengedrückt oder ausgedehnt werden, eine Welle bilden. Diese von dem ersten Theilchen der Oberfläche ausgehenden Schwingungen verbinden sich bald mit denen, die von andern Theilen der Oberfläche reflectirt werden, sie werden minder regelmäfsig, und an mehreren Orten werden durch Zusammensetzung der Wellen der Druck und die Ausdehnung ein Maximum. Wenn die Grenze der Spannung an keinem Puncte von der Gröfse der Ausdehnung erreicht wird, so entsteht kein Bruch, und die Schwingungen gehen in jene über, die *Weber* mit dem Namen: stehende Schwingungen, bezeichnet hat. Bei einem starken Stofse aber werden manche Körpertheile so sehr ausgedehnt, dafs sie, falls sie streckbar sind, eine bleibende Veränderung erleiden, falls sie aber spröde sind, wie bei den meisten Krystallen, einen Bruch des ganzen Körpers an den Stellen der gröfsten Ausdehnung hervorbringen; woraus auch das wellenförmige Aussehen der meisten Bruchflächen sich leicht erklärt *).

57) Diese vielfach gekrümmte, muschelige Textur der Bruchtheile kann jedoch nur bei spröden Körpern von gleichförmiger Beschaffenheit, wie bei den Glasvarietäten oder deren Cohärenz nach allen Richtungen beinahe gleich stark ist, wie beim Quarz u. a., Statt finden; bei Körpern aber von ungleichförmiger Beschaf-

*) Die hier erwähnten Schwingungen unterscheiden sich von den *stehenden* Schwingungen, die *Chladni*, *Savart*, *Weber* an gläsernen oder hölzernen Platten und Stäben beobachtet haben, und die gröfste Ausdehnung scheint dann einzutreten, wenn die *fortpflanzende* Schwingung in die stehende übergeht. Bei den stehenden Schwingungen wird übrigens die Gröfse der Zusammendrückung und Ausdehnung durch Reibung, Trägheit, Widerstand des umgebenden Mittels etc. schnell verringert.

fenheit, die gleichsam aus Platten oder Fäden zusammengesetzt scheinen, kann diese Textur nicht beobachtet werden. Denn da hängt die Fortpflanzungsweise und Gestalt der Welle nicht blofs von dem Orte der Erregung, sondern auch von der Lage dieser Platten und Fäden ab, so dafs die Wellen, sie mögen an was immer für einem Orte erregt werden, immer eine Gestalt annehmen, die symmetrisch gegen die Richtung der Fäden liegt. So hat auch *Savart (Ann. de Chim. etc. 12.)* die Lage der Knotenlinien an Holzplatten viel mehr von der Richtung der Holzfasern, als wie es bei Körpern von gleichförmiger Structur der Fall ist, von dem Erregungsorte abhängig gefunden. Die Krystalle bestehen zwar nicht aus Platten und Fäden, allein bei den meisten von ihnen walten aus einem andern Grunde dieselben Verschiedenheiten in der Cohärenz ob, welche beim Holze aus der Richtung der Fasern entspringen; darum beachtet auch in ihnen die Welle bei ihrer Fortpflanzung dieselben Gesetze, und der Bruch entsteht am leichtesten und häufigsten in Richtungen, die gegen die Vertheilungsweise der Cohäsionskräfte die am meisten symmetrische Lage besitzen. Es hängt daher die Theilbarkeit von zwei Ursachen ab: von der Cohäsion und der symmetrischen Lage. In den Ebenen der kleinsten Cohäsion vereinigt sich beides, und darum sind die Theilungsrichtungen meistens ihnen parallel; allein diese können auch mit den Ebenen der gröfsten Härte, eben weil auch diese eine so symmetrische Lage gegen die Cohäsionskräfte besitzen, zusammenfallen, wie diefs so oft bei den auf die Axen des zwei- und zweigliedrigen Systems senkrechten Ebenen der Fall ist. In den minder symmetrischen Ebenen schiefer Prismen läfst sich die Spaltbarkeitsrichtung nur bei jenen Krystallen leicht beobachten, wo die kleinste Härte dem Prisma selbst

entspricht. Es sind demnach die Spaltungsebenen nicht immer hart, und man kann sich einzelne in der Richtung weicher Linien gemachte Beobachtungen, wie beim Cyanit (§. 18), leicht erklären. Die Theilungsrichtungen, von so grofsem Nutzen sie auch für die Kenntnifs der Cohäsionsunterschiede innerhalb desselben Körpers sind, dürfen daher für sich allein nie als entscheidend angesehen, und müssen stets mit directen Beobachtungen der Härte verknüpft werden, um entscheiden zu können, ob die Theilungsrichtung allein durch die symmetrische Lage, oder ob auch durch die Stärke der Cohäsion bestimmt worden sey *).

58) Um alle Wirkungen der Cohäsion zu berücksichtigen, sollten wir nun auch von der Fortpflanzung des Lichtes, der Electricität, der Wärme in den Krystallen sprechen, allein diefs würde den beschränkten Zweck dieser Abhandlung überschreiten, und es genüge, hier einige Bemerkungen über die ungleiche Einwirkung der Wärme auf die verschiedenen Krystallrichtungen anzuknüpfen.

Krystalle, die in verschiedenen Richtungen so verschiedene Eigenschaften zeigen, und sich beinahe wie verschiedene Körper verhalten, werden wahrscheinlich von demselben Wärmegrade in verschiedenen Richtungen verschieden ausgedehnt, woher auch die beobach-

*) Warum die Welle und die Bruchfläche oft ganz denselben Gang nehmen, und nicht im Geringsten von einander abweichen, ist wohl schwer zu erklären, jedoch nicht schwerer, als warum die Knotenlinien des Holzes den Fasern parallel sind, oder warum in einer Luftsäule oder einer Glasscheibe öfters derselbe Ton und dieselben Knotenlinien entstehen, wenn auch die Schwingung an einem andern Puncte erregt, oder andere Theile in Bewegung gesetzt werden.

tete Änderung der Winkel rührt. Zwischen Richtungen hingegen, deren Cohäsion gleich ist, waltet auch kein Unterschied in der Einwirkung der Wärme ob, wie wir an Gestalten des regulären Systemes und an den auf die Axen des vier- oder dreigliedrigen Systemes senkrechten Flächen bemerken. Wir wollen nun untersuchen, in welchem Verhältnisse die Wirkung der Wärme mit der Cohäsionskraft stehet. Im Allgemeinen weifs man, dafs die Körper desto mehr ausgedehnt werden, je eine geringere Cohäsion sie besitzen; so dehnen sich Flüssigkeiten stärker aus als feste Körper; Eis, Phosphor etc. mehr als die Metalle; Zink, Blei, Zinn mehr als Eisen, Platin, Gold; und wenn auch andere Veranlassungen, z. B. das specifische Gewicht, die Wärmecapacität, das Atomengewicht einige scheinbare Ausnahmen erzeugen, so können wir doch behaupten, dafs unter verschiedenen, übrigens gleichen und blofs in der Cohäsion abweichenden Körpern, die gröfste Ausdehnung der kleinsten Cohäsion entspreche. Und wenn anders die Ansicht richtig ist, dafs die Wärme die gegen die Cohäsion reagirende Kraft ist, so unterliegt es auch theoretisch keinem Zweifel, dafs die Wärme desto gröfsere Wirkungen hervorbringen werde, je geringer die Cohäsion ist.

59) Wenn sich diefs also so verhält, so wird auch in den Krystallen, wo aufser der Cohäsion alles andere gleich ist, jene Dimension sich mehr ausdehnen müssen, welche die geringste Cohäsion besitzt, und eben in dieser Rücksicht ist die Beobachtung der Ausdehnungen der Krystalle durch die Wärme, wenn auch schwierig, doch von solchem Interesse, da durch dieselben das Verhältnifs der Wärme zur Cohäsion frei von allen fremdartigen Einflüssen ausgemittelt werden kann. Darum dehnt sich an dem schiefen Prisma des Gypses, in dem die Richtung der gröfsten Theilbarkeit die scharfe Kante

hinwegnimmt, die mit stärkerer Cohäsion begabte kürzere Diagonale weniger aus, als die längere, und das Prisma wird durch Wirkung der Wärme schiefer. So wird auch in dem Arragonit, wo die gleiche Spaltungsrichtung Statt findet, die Schiefe vergröfsert. Beim rhomboëdrischen Kalke, wo, wie wir gesehen haben, die Cohäsion in den der Axe parallelen Linien kleiner ist, als in den auf dieselbe senkrechten, dehnt sich der Krystall in der Richtung der Axe mehr aus, als in der darauf senkrechten, und das Rhomboëder nähert sich durch Wirkung der Wärme dem Hexaëder.

6o) Alles diefs geht aus der Theorie der Cohäsion hervor, und stimmt ganz mit jenen Beobachtungen überein, die *Mitscherlich* in seiner berühmten Abhandlung (Comm. der k. Berl. Academie, J. 1825, S. 201 ss.) bekannt gemacht hat. Es bleibt aber noch übrig, das Gesetz der Abhängigkeit zwischen der Gröfse der Ausdehnung der einzelnen Axen oder zwischen den Änderungen der Winkel und der Ausdehnung des ganzen Körpers zu finden. Da die Ausdehnung von der Cohäsion, diese von den verschiedenen Richtungen des Krystalls abhängt, so müssen die Änderungen aller Axen und Winkel durch dasselbe, allein von der Krystallgestalt bedingte, Gesetz ausdrückbar seyn, gesetzt auch, man kennte selbst die Gesetze des Wechsels der Cohäsion nicht. Dadurch wäre man in den Stand gesetzt, wenn α, β, γ die Winkel der krystallographisch gestellten Axen, $1 : b : c$ die Verhältnisse der Gröfsen unter einander bezeichnen, aus der Beobachtung einer dieser fünf Gröfsen die übrigen vier zu berechnen. Allein ehe man an die Erfüllung dieser Hoffnung denken kann, müssen zuvörderst über diesen Gegenstand viel mehr Beobachtungen gemacht werden, und mufs die Art und Weise

der Auffindung und krystallographischen Stellung der Grundgestalt wissenschaftlich ausgemittelt seyn.

61) Unter den von *Mitscherlich* durchforschten Körpern gibt es sowohl isomorphe als dimorphe, und wenn es daher aufser allen Zweifel gesetzt wäre, dafs sowohl der rhomboëdrische als der prismatische kohlensaure Kalk aufser der ungleichen Vertheilung der Cohäsion und den daraus entspringenden Verschiedenheiten von vollkommen gleicher Beschaffenheit sind, so wäre die Erforschung der Wärmeeinwirkung auf diese gleiche und doch verschieden gebildete Materie von grofser Wichtigkeit; allein leider ist die absolute Ausdehnung des Arragonites noch unbekannt. Aber unter den isomorphen Körpern gibt es viele Verbindungen des kohlensauren Kalkes mit kohlensaurem Magnesium und Eisen, und bei allen diesen — mit einer einzigen wenig abweichenden Ausnahme — sind die Ausdehnungen desto gröfser, je gröfser die Neigung der Rhomboëderflächen ist.

Beim reinen kohlensauren Kalk beträgt die Neigung 105°, 4′, die Verringerung 8′, 34½″.

Bei 55 kohlens. Kalk + 45 kohlens. Magnesium beträgt die Neigung 106°, 15′, die Verringerung 4′, 6″.

Bei 60 kohlens. Eisen + 40 kohlens. Magnesium beträgt die Neigung 107°, 0′, die Verringerung 2′, 22″.

Die Schiefe wird also bei allen diesen Körpern durch die Wärme verringert und der Form des Hexaëders näher gebracht, allein die Unterschiede nehmen in einem noch gröfseren Verhältnisse zu, und wenn die Änderungen in demselben, oder wie es wahrscheinlich ist, in einem noch gröfsern Verhältnisse wachsen, so kann es geschehen, dafs diese Unterschiede beim Schmelzpuncte sich um mehrere Grade steigern. Bei der Erkaltung hingegen nimmt die Schiefe des kohlensauren

Kalkes stärker zu, als die der übrigen Krystalle, und bei einer gewissen Temperatur können die Axenwinkel aller dieser Gestalten einander beinahe ganz gleich, und so die isomorphen Krystalle zu wahrhaft homöomorphen werden. Diese Temperatur kann zwar, so lange das Gesetz der Abhängigkeit der Ausdehnung unausgemittelt ist, nicht bestimmt werden, allein höchst wahrscheinlich ist sie $= -\infty$, und die Gestalten der isomorphen Körper kommen der völligen Gleichheit, die sie zwar nie erreichen, immer näher und näher, so dafs alle Unterschiede in den Abmessungen dieser Gestalten blofs von dem verschiedenen Einflufs der Wärme herzurühren scheinen.

62) Über die Gestalt der bis ins Unendliche erkalteten Körper kann man die mannigfachsten Hypothesen wagen; allein wenigstens darf man bemerken, dafs wenn man annimmt, dafs die Gestalten der Körper bei einer unendlich geringen Temperatur einander gleich sind, die Gestalten jener unter ihnen, die eine geringe Ausdehnbarkeit besitzen, auch bei der gewöhnlichen wenig von einander abweichen müssen. So scheinen sich auch die kohlensauren Salze des Kalium, Eisen, Magnesium und anderer dergleichen Körper von ähnlicher chemischer Beschaffenheit und beinahe gleicher Gestalt zu verhalten. Die Gestalten jener Körper aber, die eine grofse Ausdehnbarkeit besitzen, wie z. B. Schwefel, Jod u. dgl. m., können zwar anfangs dieselbe Gestalt gehabt, jedoch durch die Einwirkung der Wärme die bei der gewöhnlichen Lufttemperatur obwaltenden Unterschiede erlangt haben. Es sind daher Krystalle desselben Systemes, deren Cohäsion und Theilbarkeit, wo nicht der Gröfse, doch ihren Verhältnissen nach einander gleich sind, und die durch den Einflufs der Wärme bedeutende Änderungen erleiden, und zwar selbst dann als iso-

morph anzusehen, wenn ihre Winkel auch um mehrere Grade verschieden sind.

63) Wenn wir nun von der hypothetischen Ansicht wieder zur Erfahrung niedersteigen, so können wir, die Wahrheit des früher aufgestellten Verhältnisses zwischen der Cohäsion und der Ausdehnung vorausgesetzt, folgende Resultate als gefunden ansehen:

1. Die Krystalle werden in den Richtungen der kleinsten Cohäsion am meisten ausgedehnt, und wo die Richtung der gröfsten Theilbarkeit auf jene der geringsten Cohäsion senkrecht steht, werden die Dimensionen dieser Richtung vergröfsert.
2. Wo zwei Theilungsflächen von gleicher Gestalt unter einem schiefen Winkel gegen einander geneigt sind, wird die Schiefe durch die Wärme verringert (wie beim Baryt).
3. Wo diese Theilungsebenen sowohl von ungleicher Gestalt als zugleich schiefwinkelig sind, wird die Schiefe des Winkels verringert, der Unterschied der Dimensionen vergröfsert (Cyanit, Gyps).
4. Körper mit Theilungsflächen in der Lage eines Rhomboëders, möge nun dieses ein stumpfes oder spitzes seyn, nähern sich einem Hexaëder.
5. Körper mit Theilungsflächen in der Richtung einer vierseitigen Pyramide nähern sich dem Octaëder.

An verwickelteren Gestalten kann die relative Änderung der einzelnen Dimensionen leicht aus dem, früher über die Cohäsion Gesagten, ausgemittelt werden.

64) Diese Erscheinungen sind leicht zu entdecken; hat man sie aber einmal ins Klare gesetzt, so wird diese Änderung der Winkel das beste Mittel darreichen, die Cohäsion zu bestimmen. Zwar auch die Härte ist leicht auszumitteln; allein unmöglich hält es, jemals auf dem Wege der Beobachtung, sey es nun der Härte, der Co-

häsion oder der Elasticität, die Verhältnisse, die zwischen den Cohäsionskräften in den verschiedenen Richtungen des Krystalls obwalten, kennen zu lernen. Jedoch auf dem Wege der Berechnung der durch die Wärme bewirkten Formänderungen des Krystalls kann und wird es auch gelingen, die mit der Wärme in so engem Zusammenhange stehende Cohäsion dem Calcul zu unterwerfen. Das hier Angedeutete bleibt übrigens künftigen Untersuchungen vorbehalten *).

---

*) Der Übersetzer hat an einigen Stellen die Sprache des Originals, das sich fast ausschliefsend der *Weifs*'schen kryst. Terminologie bedient, in die *Mohs*'sche oder jene übersetzt, wie man sie in der Optik zu brauchen pfleget. Daher kommt es, dafs man auf S. 99, Z. 3 zweiaxig statt zwei- und zweigliedrig; S. 99, Z. 12 v. u. einaxig statt ein- und eingliedrig; S. 100, Z. 5 v. u. doppelaxig statt zwei- und zweigliedrig; S. 200, Z. 16 Tessularsystem statt reguläres System; S. 102, Z. 1 und 2 drei- oder sechsaxig statt drei- und sechsgliedrig; ferner S. 200, Z. 11 octaëdrisches Flufshaloid statt Flufsspath findet. Endlich mufs als sinnstörender Verstofs angemerkt werden, dafs es S. 106, Z. 1 statt *Gefüge*, *Ausbildung* heissen mufs, und S. 101, Z. 22 ist nach dem Worte Kanten einzuschalten: so ist es auch, und der Unterschied der Härte in beiden Richtungen ist sogar hier noch gröfser, als beim Kochsalz.

VII.

Über die chemische Theorie der einfachen und zusammengesetzten Electromotoren;

von

S t. M a r i a n i n i.

(Vom Herrn Verfasser in italien. Sprache eingesandt, und aus derselben frei übersetzt. *)

Seit Langem sucht *La Rive* darzuthun (vergl. dessen Abhandl. in der Zeitschr. für Phys. u. Mathem., Bd. VI., S. 103), dafs die electrischen Erscheinungen des *Volta*'schen Apparates nicht durch die Berührung der heterogenen Körper, sondern durch die chemische Einwirkung der Flüssigkeiten auf die Metalle veranlafst werden, und zwar sowohl in dem Falle, wo die zwei ein Element bildenden Metalle in derselben, als auch, wenn sie in zwei verschiedenen Flüssigkeiten stehen. Gegen ihn tritt nun *Marianini* auf.

Ohne aber die Theorie *Volta's* als die allein genügende aufzustellen, weist er blofs nach, dafs wenigstens die *electrochemische* Ansicht nicht hinreiche, die verschiedenartigen, sowohl in dem einen als dem andern der von *La Rive* unterschiedenen Fälle, sich ergebenden Phänomene zu erklären. Seine Abhandlung zerfällt in drei Abtheilungen, deren erste den Fall einele-

*) Die eingesandte Abhandlung führt den Titel: *Memoria sopra la theoria chimica degli elettromotori voltiani semplici e composti.* Ihr erster Theil: *di alcune circostanze che alterano la facoltà elettromotrice relativa de' metalli*, kam der Redaction eher in einer französischen Übersetzung zu Gesicht, als das Original, und wurde bereits im vorhergehenden Hefte dieser Zeitschrift im Auszuge mitgetheilt. D. R.

mentiger Electromotoren in derselben, die zweite den einelementiger Electromotoren in verschiedenen Flüssigkeiten, und deren dritte zusammengesetzte Electromotoren voraussetzt.

I.

1. Die *erste* Thatsache, die *La Rive* für sich anführt, ist: dafs die Wirkung der chemischen Kräfte an und für sich Electricität entwickle, und bei den Electromotoren jeder Art *stets* chemisch verschiedene Stoffe vorhanden seyen. Allein eben so unwiderstreitbar ist es auch, dafs verschiedenartige Körper bei ihrer Berührung, auch ohne chemisch auf einander zu wirken, Electricität erzeugen, dafs bei der *Volta*'schen Säule stets solche heterogene Körper mit einander in Berührung kommen, und eben so wenig läfst sich läugnen, dafs eine Temperaturänderung an und für sich einen electrischen Strom hervorrufe, und dafs wirklich bei den Electromotoren stets irgend eine Temperaturänderung eintrete.

Die Thatsachen sprechen also gleich stark für jede der drei Theorien: für die Contactelectricität, für die electrochemische Ansicht, und für jene, die alle Erscheinungen blofs aus den Änderungen des Gleichgewichtes der Wärme erklären will; sie können also keiner den Vorzug zuerkennen machen.

Etwas anderes wäre es, wenn man beweisen könnte, dafs die Berührung, die Reibung, die Ungleichheiten der Temperatur und alle andern Mittel, die man bis jetzt zur Electrisirung der Körper angewendet hat, chemische Veränderungen im Innern derselben hervorbringen, dann müfste man der chemischen Erklärungsweise beinahe unbedingt den Vorzug einräumen; allein, den gedachten Beweis hat noch Niemand geführt.

2. Die *zweite* zur Unterstützung der electrochemi-

schen Hypothese angeführte Thatsache ist: dafs zwei Stücke *eines und desselben* Metalls in eine Flüssigkeit getaucht, die sie anzugreifen vermag, einen starken electrischen Strom erzeugen.

Allein es sind hier nur zwei Fälle möglich: entweder sind diese beiden Metallstücke wirklich vollkommen homogen, oder es waltet zwischen ihnen irgend eine Verschiedenheit ob. Im letztern Falle kann die Entstehung des Stromes mit gleichem Rechte, wie aus der electrochemischen, auch aus der *Volta*'schen Hypothese erkläret werden. Im erstern Fall, der übrigens der unwahrscheinlichere ist, da *Volta* in seinen zahlreichen Versuchen nachgewiesen hat, dafs schon die allerkleinste Verschiedenheit zweier Stoffe hinreiche, einen electrischen Strom zu erzeugen, gewährt die electrochemische Ansicht nicht blofs keine hinreichende Erklärung des Factums, sondern dasselbe steht mit dem Grundsatze, den man aufstellen will, nämlich dafs die Flüssigkeit, im Falle ein electrischer Strom eintreten soll, nicht auf die beiden Elemente eines *Volta*'schen Plattenpaares gleich stark einwirken darf, in offenem Widerspruch. Denn wie kann man annehmen, dafs dieselbe Flüssigkeit auf zwei gleich polirte und in Allem identische Streifen desselben Metalls ungleich einwirke?

3. Wir gehen nun weiter zu einigen directen Versuchen, die nach *La Rive* die Wahrheit seiner Theorie darthun sollen: Ein Plattenpaar aus Kupfer und Zinn in einer Säure oder Salzlösung erzeugt einen Strom in der Richtung vom Kupfer zum Zink, hingegen in eine Ammoniaklösung getaucht, einen Strom in der Richtung vom Zinn zum Kupfer, oder mit andern Worten, im ersten Falle ist Kupfer — und Zinn +, und im zweiten Falle Kupfer + und Zinn —. Diefs, meint *La Rive*, könne nur davon herrühren, dafs die Salz- oder Säure-

lösung Zinn stärker als Kupfer, hingegen die Ammoniaklösung Kupfer stärker als Zinn angreift.

Beide Facta sind wahr, allein ob auch der von *La Rive* vermuthete Zusammenhang, ist eine andere Frage. Der von dem gewöhnlichen abweichende electrische Zustand des Kupfers und Zinns kann auch in den Änderungen seinen Grund haben, welche diese Flüssigkeit auf die relative electromotorische Kraft jener Metalle ausübt, und wirklich zeigen directe Versuche, dafs die electromotorische Kraft des Kupfers im Ammoniak sich schwäche, hingegen die des Zinns sich verstärke, und es darf uns daher nicht befremden, dafs das Zinn negative, und das Kupfer positive Electricität zeigt.

Man hat ferner gefunden, dafs die berührten Änderungen der electromotorischen Kraft nicht augenblicklich eintreten, sondern einer gewissen Zeit bedürfen, um bemerkbar zu werden. Bei der ersten Eintauchung des Plattenpaares in Ammoniak wird daher das Kupfer, wie gewöhnlich, $-E$, und das Zinn $+E$ zeigen, und nur erst wenn die Metalle längere Zeit in der Flüssigkeit bleiben, wird die bemerkte Abweichung vor diesem electrischen Verhalten eintreten; lauter Bemerkungen, die durch die Beobachtungen bestätiget werden.

Auch verdient diefs Berücksichtigung, dafs, obgleich Zinn vom Ammoniak weniger angegriffen wird oder werden soll als Kupfer, doch die Steigerung seiner electromotorischen Kraft in dieser Flüssigkeit weit beträchtlicher ist, als die Schwächung der Kraft, die Kupfer in dieser Flüssigkeit erleidet. Denn experimentirt man mit zwei Zinnstreifen, und taucht sie, einen nach dem andern, in Ammoniak, so erhält man viel bedeutendere Abweichungen, als wenn man auf gleiche Weise Kupferstreifen von gleichen Dimensionen wie die Zinnstreifen anwendet. Ja dieser Unterschied ist so grofs, dafs wenn

man während 4′ — 5′ den Zinnstreifen in Ammoniak hält, und hierauf den Kupferstreifen hineintaucht, dieser sich alsogleich positiv, und der erstere negativ zeigt, obgleich das Ammoniak noch nicht Zeit haben konnte, merkbar auf das Kupfer einzuwirken. Wenn man hingegen erst die Kupferplatte, und zwar nicht nur durch 4′ — 5′, sondern auch durch 10 und mehr Minuten in die Ammoniaklösung hält, und später erst die Zinkstreifen hineintaucht, so bemerkt man wohl eine geringere Abweichung der Nadel, als wenn man beide Streifen zu gleicher Zeit in die Flüssigkeit taucht, allein das Kupfer zeigt noch immer $-E$ und das Zink $+E$.

Dafs nicht die verschiedene Stärke der chemischen Einwirkung, sondern lediglich die Änderung der electromotorischen Kraft der Metalle jenes entgegengesetzte Verhalten des Elementes im Ammoniak hervorbringe, dafür zeugt auch, dafs wenn man die beiden Platten auch nur zwei Minuten lang im Ammoniak läfst und dann erst in eine Säure- oder Salzlösung taucht, das Kupfer stets $+E$ und das Zinn $-E$ zeigt.

Bei einem aus Eisen und Kupfer gebildeten Elemente hat *La Rive* ähnliche Erscheinungen wie bei dem aus Kupfer und Zink gebildeten entdeckt, *Marianini* hat aber auch an ihm seine Ansichten bestätiget gefunden. Nur tritt die Änderung der Electricität viel schneller ein, als bei dem Kupfer-Zinnelemente, und es reichen hiezu gewöhnlich 2″ — 3″ hin, was daher kommt, dafs Eisen in der *Volta*'schen Reihe näher an Kupfer liegt, als Zinn, oder dafs jene die electromotorische Kraft steigernde Einwirkung des Ammoniaks sich auf Eisen stärker äussert, oder endlich dafs beide diese Umstände zusammen wirken.

4. Ein zweites, dem erst angeführten analoges Phänomen, das *La Rive* ebenfalls zur Stütze seiner Meinung

anführt, ist folgendes: Reines Gold und Platina in vollkommen reine Salpetersäure getaucht, setzen die Nadel des Multiplicators gar nicht in Bewegung, aber auch nur ein einziger Tropfen Salzsäure in die Flüssigkeit gegossen, und eine geringe chemische Wirkung auf Gold hervorgebracht, bringt einen sehr bedeutenden Strom hervor. Zieht man nun, meint *La Rive*, aus diesem Versuche Folgerungen — als bewiesen vorausgesetzt, dafs die Leitungsfähigkeit der Flüssigkeit durch den Tropfen Salzsäure nicht vergröfsert worden ist — so sieht man, dafs blofs der Statt findenden electrischen Einwirkung der Eintritt des electrischen Stromes zuzuschreiben sey, der vorher nicht bemerkt werden konnte, obgleich die nach der Ansicht der Berührungstheorie günstigsten Umstände zu seinem Entstehen vorhanden waren, die Berührung zweier sehr heterogenen Metalle, wie Gold und Platin, und die am besten leitende Flüssigkeit, die Salpetersäure.

Vor Allem ist in Erinnerung zu bringen, dafs nach der *Volta*'schen Ansicht nicht immer die Verschiedenheit der materiellen Beschaffenheit der Metalle es ist, von welcher die Stärke des electrischen Stromes abhängt, sondern allein die Gröfse der Verschiedenheit der electrischen Zustände, in welche sie bei der wechselseitigen Berührung gerathen. So z. B. erregen nach *Humboldt* zwei Zinkstücke von ungleicher Politur bei ihrer wechselseitigen Berührung einen stärkern electrischen Strom, als Gold und Silber.

Was nun das oben dargestellte Phänomen betrifft, so ist es wahr, dafs seine Erklärung nach der electrochemischen Ansicht allen Anforderungen genüge, allein eben so genügend ist es auch aus den schon oft erwähnten Änderungen zu erklären, welche die Flüssigkeiten in der relativen electromotorischen Kraft der Metalle

hervorbringen; und was noch mehr sagen will, eben bei den beiden Metallen, Gold und Platin, zeigen sich, ausser den von *La Rive* erwähnten, mehrere andere Erscheinungen, die zwar wohl aus der Annahme solcher Änderungen sich begreifen lassen, aber nach der electrochemischen Ansicht gänzlich unerklärbar scheinen. Ich führe einige dergleichen Versuche an.

Zwei Platten reinen Goldes gleichzeitig in Salpetersäure, gemischt mit einigen Tropfen Salzsäure, getaucht, brachten gar keine Bewegung am Multiplicator hervor. Wurden die Platten nafs gemacht, getrocknet *), und dann noch ein Mal in dieselbe Säure getaucht, so zeigte sich wiederum keine Wirkung; wurde aber die eine Platte nach der andern eingetaucht, so zeigte sich eine merkliche Abweichung der Nadel von Seite der Platte, die zuerst hineingebracht worden war, d. h. sie zeigte negative Electricität. Je länger der Zwischenraum zwischen den beiden Eintauchungen war, desto gröfser war die Abweichung, in ungefähr 2′ erreichte sie ihr Maximum von ungefähr 8°. Jedoch war die Steigerung der Wirkung in den ersten Momenten bedeutender, wie in den spätern. Die Platten waren rechtwinkelig, 7 Millimeter breit, und ungefähr 2 $^1/_2$ Centimeter tief in die Flüssigkeit getaucht.

An zwei Platinplatten zeigten sich ähnliche Wirkungen, auch bei diesen erschien die zuerst eingetauchte Platte negativ-electrisch; nur waren die unter gleichen Umständen eintretenden Abweichungen gröfser, als bei den Goldplatten, und das Maximum trat in kürzerer Zeit ein. Die Wirkung des Königswasser auf Gold und Pla-

*) Wo nicht ausdrücklich das Gegentheil bemerkt wird, ist immer zu verstehen, dafs die Platte oder die Platten bei jedem einzelnen Versuche nafs gemacht und getrocknet wurden.

tin besteht also darin, dafs es die relative electromotorische Kraft derselben erhöht, und zwar in einem höhern Grade beim Platin als beim Golde.

Diese Erscheinungen können durchaus nicht in der Electricität ihren Grund haben, die sich etwa unmittelbar durch die chemische Einwirkung der Säure auf die Metalle entwickeln soll. Denn erstlich, wenn man auch die eingetauchte Platte einige Zeit der Luft aussetzt, und dann zugleich mit der andern abermals in die Flüssigkeit taucht, verhält sie sich dennoch negativ gegen die andere. Zweitens bleibt die eingetauchte Platte, auch wenn sie trocken geworden, Tage, Monate, ja vielleicht sogar Jahre lang electro-negativ gegen jene Platte, die nicht in die Flüssigkeit getaucht worden war. Drittens erfolgen alle diese Erscheinungen gleichmäfsig, es möge während der ganzen Zeit des Versuches die Communication mit dem Meere hergestellt seyn oder nicht.

Aber vielleicht ist die später in die Flüssigkeit gebrachte Platte die weniger angegriffene? — Ich glaube, nein! Denn bringt man die benetzte und die trockene Platte auch in eine andere Flüssigkeit, so bleibt die Richtung des Stromes doch dieselbe, und selbst wenn diese Flüssigkeit 20—30fach verdünnte Salpetersäure ist, die doch nach unseren gegenwärtigen Kentnissen in der Chemie weder Gold noch Platin angreift, zeigt sich in der angezeigten Richtung eine Abweichung, die drei Mal so stark ist, als die, welche man in derselben concentrirten Säure bemerkt.

Wie wird man sich daher nach dem Vorhergegangenen die Entstehung des beim Eintauchen von Platin und Gold in Königswasser eintretenden Stromes zu erklären haben? Wohl nicht anders, als dafs in beiden durch Wirkung der Säure die relative electromotorische Kraft erhöhet worden, jedoch da diese Erhöhung, wie

wir sahen, in einem stärkern Grade beim Platin als beim Golde Statt findet, nimmt dieses positive, jenes negative Electricität an. Dieſs ist so wahr, daſs wenn man zuerst die Platin- und später die Goldplatte in die Flüssigkeit bringt, die Abweichung wächst, hingegen im umgekehrten Falle, wo zuerst die Gold- und später die Platinplatte eingetaucht wird, merklich kleiner wird. Ja wenn das Gold um etwas mehr als $1\,{}^1/_2{}'$ früher als das Platin in die Flüssigkeit kommt, so zeigt es $-E$, und das Platin im Gegentheile $+E$.

Wir haben bis jetzt nur von der zweiten Hälfte des *La Rive*'schen Versuches gesprochen, was die erste Hälfte betrifft, nämlich den Mangel an Wirkung beim Eintauchen eines Gold-Platin-Elementes in reine Salpetersäure, so bestreitet *Marianini* deren Richtigkeit, und führt an, daſs er im Gegentheile alle jene Versuche, die er mit Gold- und Platinplatten in Königswasser angestellt hat, in reiner Salpetersäure wiederholt, und, die Intensität ausgenommen, indem in ersterer eine Abweichung von selbst $10° - 12°$, in letzterer hingegen von kaum $2° - 3°$ hervorgebracht wurde, vollkommen gleiche Resultate erhalten habe.

Man könnte die Reinheit der Säure oder der Metalle bezweifeln. — Allein die erstere wurde von Hrn. *Bizio*, einem äuſserst verdienstvollen Chemiker, bereitet, und die letztern von Hrn. *Bussolin* gereinigt, der ohnehin wegen seiner Geschicklichkeit in metallurgischen und besonders in docimastischen Arbeiten rühmlichst bekannt ist. Auch der Zweifel könnte sich erheben, ob nicht die Salpetersäure aus der atmosphärischen Luft, die besonders in Venedig immer mit Salzsäure geschwängert ist, dieselbe an sich gezogen, und daher als Königswasser gewirket habe; jedoch zur Entfernung dieses Verdachtes lieſs *Marianini* mit Fleiſs das Glas mit Salpetersäure,

die zu den obigen Versuchen gedient hatte, durch mehrere Tage in der freien Luft stehen, und wiederholte dann die Versuche. Allein geschweige dafs sich eine Steigerung der Wirkung gezeigt hätte, so trug dieser Umstand im Gegentheile zur Verminderung derselben bei, und nach ungefähr 40 Tagen brachte die Flüssigkeit auf Gold und Platin gerade die entgegengesetzte Wirkung wie früher hervor, d. h. sie verminderte die relative electromotorische Kraft dieser Metalle, statt sie zu vermehren.

Das Gesagte beweist hinlänglich, dafs die von *Marianini* bemerkten Wirkungen nicht Verunreinigungen der angewendeten Stoffe zuzuschreiben sind, und dafs folglich das von *La Rive* erwähnte Ausbleiben aller Wirkung vielleicht davon komme, dafs seine Salpetersäure bei ihrem Gebrauch bereits eine grofse Menge Wasser absorbirt hatte, oder dafs dessen Multiplicator weniger empfindlich war, als der *Marianini's*. Allein was nun auch die Ursache dieser Abweichung in den Resultaten *La Rive's* und *Marianini's* ist, so viel bleibt gewifs, dafs die electro-chemische Theorie die früher aus einander gesetzten Erscheinungen nicht herzuleiten vermag.

Vielleicht macht eines Tages ein geschickter Chemiker die gedachten Veränderungen, welche Säuren auf Gold und Platin hervorbringen, zum Gegenstande seiner Forschungen; denn für jetzt bleibt es ein Curiosum, warum Platin in einer Säure, die Gold stärker angreift, dennoch eine gröfsere Veränderung des Zustandes der Oberfläche erleidet, als letzteres, warum ähnliche Erscheinungen selbst in Säuren eintreten, von denen weder Platin noch Gold angegriffen wird, und endlich warum diese Säuren nur eine geringe Verdünnung zu erfahren brauchen, um dann auf die erwähnten Metalle eine entgegengesetzte Wirkung auszuüben. — Doch

gehen wir wieder auf die electrochemische Theorie zurück.

5. Eine Thatsache, sagt *La Rive*, die aufser Zweifel setzt, dafs es lediglich die chemische Wirkung sey, die an dem weniger löslichen Metalle den positiv-electrischen Zustand hervorruft, ist folgende: Bringt man Eisen und Blei in concentrirte Salpetersäure, so zeigt sich das Eisen im ersten Momente negativ, weil noch keine chemische Wirkung Statt findet, allein sobald die energische chemische Einwirkung beginnt, oder wenn man das in die Säure getauchte Stück des Eisens einen Augenblick der Luft aussetzt, was den Eintritt der chemischen Wirkung hervorruft, so wird dasselbe vorher negative Eisen in derselben Flüssigkeit positiv, und zwar mit einer beträchtlichen Intensität.

Diese Thatsache würde freilich viel beweisen, wenn man nur vorerst begreiflich gemacht hätte, warum im ersten Momente der Eintauchung die Wirkung, die $= o$ auf Eisen, nicht auch $= o$ auf Blei ist, das doch überdiefs in den nächsten Momenten eine viel geringere Wirkung erleidet. Einfacher stellt sich die Sache dar, wenn man den Wechsel der Electricität aus den Veränderungen der relativen electromotorischen Kraft der Metalle durch Einwirkung der Säure herleitet, und für diese Meinung sprechen auch folgende Thatsachen:

a) Nimmt man zwei polirte Eisenplatten, verbindet sie mittelst des Multiplicatordrahtes, und taucht eine *nach* der andern in concentrirte Salpetersäure, so zeigt die Abweichung der Nadel, dafs die früher eingetauchte Platte $+E$, die spätere $-E$ besitzt. Je gröfser der Zwischenraum zwischen der Eintauchung der ersten und jener der zweiten Platte, desto stärker ist die Abweichung, in einigen Minuten hat sie völlig oder beinahe ihr Maximum erreicht.

Dieser Versuch zeigt, dafs die Säure das Eisen electro-negativer macht, als es in seinem natürlichen Zustande ist.

b) Zwei Bleiplatten zeigen ähnliche Erscheinungen, nur in einem viel stärkern Grade, folglich wird durch Salpetersäure auch die electromotorische Kraft des Bleies, und zwar in einem noch höheren Grade als die des Eisens erhöhet. Taucht man folglich, wie in dem Versuche *La Rive's*, eine Eisen- und eine Bleiplatte gleichzeitig in die Flüssigkeit, und läfst sie einige Zeit in derselben, so erhält Blei $-E$ und Eisen $+E$, eben weil die electromotorische Kraft des Bleies dergestalt vermehrt wird, dafs sie die des Eisens bei weitem übertrifft, ungeachtet auch die letztere gesteigert worden ist.

c) Aus demselben Grunde erhält man, wenn man zuerst die Blei- und hierauf die Eisenplatte in die Säure bringt, *augenblicklich* $+E$ im Eisen und $-E$ im Blei, und man kann nun beide noch so lange Zeit in der Flüssigkeit lassen, die Intensität des Stromes wächst nicht, und die Schwingungen der Nadel erreichen nicht wieder die Gröfse des Ausschlages der ersten Momente. Darum, wenn *La Rive* das Eisen einen Augenblick der Luft aussetzt, ist es nicht die gesteigerte chemische Wirkung, die macht, dafs es beim abermaligen Eintauchen in die Flüssigkeit sich gegen das Blei positiv-electrisch verhält, sondern der Grund liegt darin, dafs während man das Eisen in die Luft hält, die Flüssigkeit in dem eingetaucht bleibenden Blei jene die electromotorische Kraft steigernde Veränderung hervorbringt, und wirklich

d) bringt man, während man das Eisen der Luft aussetzt, auch das Blei aus der Flüssigkeit, trocknet und polirt es, und taucht beide Platten gleichzeitig wieder in die Flüssigkeit, so zeigt das Eisen $-E$, das Blei $+E$, und zwar in einem stärkeren Grade als beim er-

sten Momente der früheren Eintauchung. Soll also hier, angenommen, dafs wirklich die Aussetzung des befeuchteten Eisens an die Luft die chemisehe Verwandtschaft steigert, diese gesteigerte Kraft das Eisen ein Mal, statt es positiver zu machen, vielmehr negativer als früher machen, und das andere Mal (wo man das Blei in der Flüssigkeit liefs) wirklich einen negativ-electrischen Zustand im Eisen hervorzurufen im Stande seyn? Befremdend zum wenigsten wäre es.

Wenn man auf dieselbe Weise die andern von *La Rive* angeführten, den obigen analogen Versuche erwägt, so gelangt man auf gleiche Resultate. Es scheint daher nicht *für* die electrochemische Theorie zu sprechen, dafs verschiedene Metalle ein verschiedenes electrisches Verhalten gegen einander äufsern, je nachdem man sie längere Zeit in concentrirter oder in verdünnter Salpetersäure stehen läfst, während andererseits sie in beiden Flüssigkeiten im ersten Momente ihrer Eintauchung, wo die Einwirkung der Flüssigkeiten noch nicht den Zustand ihrer Oberflächen dergestalt modificiren konnte, dafs eine Änderung der relativen electromotorischen Kraft entstanden wäre, genau dasselbe Verhalten zeigen *).

*) Hieraus widerlegt sich der Einwurf, der *Marianini* von *La Rive* gemacht worden ist, dafs auch angenommen, die Richtung des Stromes in einem *Volta*'schen Elemente hänge nur von der relativen Beschaffenheit der beiden Metalle ab, doch *Marianini's* Folgerungen aus diesem Principe sich nicht bewahrheiten lassen. So führt *La Rive* zum Belege die in *Marianini's* Abhandlung enthaltene Tafel der electromotorischen Reihenfolge der Körper an, mit dem Beisatze, dafs der jedem einzelnen Körper angewiesene Platz nur dann der rechte sey, wenn man dieselbe leitende Flüssigkeit, wie *Marianini*, anwendet. Eben so, meint er, beruhe die Tafel der Leitfä-

II.

6. Das bisher Vorgetragene scheint nun dargethan zu haben, dafs die electrochemische Theorie unzurei-

---

higkeit der Flüssigkeiten auf dem Principe, dafs jene Flüssigkeit am besten leite, bei welcher der stärkste Strom Statt findet; allein man braucht blofs das hinein getauchte *Volta*'sche Element, oder nur eines der Metalle, aus denen letzteres besteht, zu ändern, und alsogleich ist die Reihe der Flüssigkeiten eine ganz andere.

Dagegen läfst sich nun erwiedern: *a*) dafs *Marianini's* Tafel der metallinischen Electromotoren, *einige Zusätze ausgenommen*, ganz identisch ist mit der von *Volta* ohne Anwendung von Flüssigkeiten angegebenen und von andern Physikern bestätigten; *b*) dafs *Marianini* bei Construction dieser Tafel nicht eine, sondern mehrere Flüssigkeiten angewendet habe; *c*) dafs diese Flüssigkeiten weder in concentrirten Säuren, noch in starken Salz- oder alkalinischen Auflösungen bestanden, und nichts desto weniger *ausdrücklich* blofs auf die Wirkung des ersten Momentes der Eintauchung des Plattenpaares in die Flüssigkeit gesehen wurde, eben weil *Marianini's* Absicht war, eine Tafel der Electromotoren in ihrem natürlichen Zustande und nicht in dem durch die umgebende Flüssigkeit oder durch andere, in der berührten Abhandlung vielfach besprochene, Umstände veränderten Zustande zu geben.

Was den Angriff *La Rive's* gegen die Tafel der Leitfähigkeit betrifft, so möge er die Bemerkung *Marianini's* nachlesen, wo dieser denselben Einwurf sich selber macht, und noch hinzusetzt, dafs eben wegen dieser Veränderlichkeit der Leitfähigkeit er seine Versuche auf eine geringe Anzahl Leiter beschränkt habe, und wo er auch eine Methode zur Vermeidung solcher Anomalien vorschlägt.

Übrigens mögen immerhin *Marianini's* Tafeln noch einige Unvollkommenheiten enthalten, er verspricht bei Wiederaufnahme seiner Arbeiten sie zu verbessern; al-

chend zur Erklärung der Phänomene bei einfachen *Volta*'schen Elementen in einer und derselben Flüssigkeit sey; gehen wir nun über zu dem Falle, wo die zwei Platten des Elementes in verschiedenen Flüssigkeiten stehen. Wir werden da allem Anscheine nach mehr Widersprüche mit der electrochemischen Ansicht finden; denn stehen beide Platten in einer und derselben Flüssigkeit, so ist — *La Rive* bemerkt es selbst — das durch die Flüssigkeit am stärksten angegriffene Metall gewöhnlich auch das positivere, und folglich gehet bei der Erklärung der Phänomene die Ansicht des gelehrten Genfers mit der *Volta's* Hand in Hand, und was letztere betrifft, so hat sie noch wenig Widersprüche in ihrem Wege gefunden. Allein wenn die Platten in verschiedenen Flüssigkeiten stehen, dann — wir werden es gleich sehen — häufen sich die Widersprüche und die unerklärbaren Facten zusehends, und es hängt blofs vom Experimentator ab, ein so grofses Heer hievon aufzustellen, als ihm beliebt.

Marianini füllte ein Glas mit schwacher Schwefelsäure, ein anderes mit destillirtem Wasser, und setzte die Flüssigkeiten mittelst einer heberförmigen Röhre voll reinem destillirten Wasser in Verbindung. In die Säure brachte er eine Eisenplatte, die mit dem einen Ende des Multiplicators in Verbindung stand, während an dem andern eine wohl polirte Zinkplatte befestiget war, die in das destillirte Wasser hineintauchte. Die Abweichung der Nadel zeigt beim Zinke $+E$, und doch wird *unstreitbar* Zink ungleich weniger von destillirtem Wasser, als Eisen von Schwefelsäure angegriffen. *Marianini* brachte statt der Eisenplatte eine Blei-, eine Messing-, eine Kupferplatte an, die Erscheinung blieb die-

---

lein das darf man doch nicht sagen, dafs sie in ihrem Principe falsch sind!

selbe; er vertauschte die Zinkplatte mit einer Bleiplatte, auch diese zeigte sich im Vergleich mit Eisen, Messing, Kupfer positiv.

Der Schwefelsäure ward Salpetersäure substituirt, und mittelst eines Platindrahtes mit dem reinen Wasser in Verbindung gesetzt, ein dicker Silberdraht in die Säure, eine Kupferplatte ins Wasser getaucht, und beide mittelst des Multiplicators verbunden. Die Nadel zeigte, dafs sich das Kupfer, und nicht das Silber positiv electrisirte. *Marianini* brachte statt des Kupfers andere Metalle aus der Reihe derjenigen an, die sich nach *Volta* positiv gegen Silber verhalten, wie Eisen, Blei, Zink, und bei allen zeigte das Silber — *E.* Und *doch* ist die Wirkung der Salpetersäure auf Silber sehr stark, die des Wassers auf Kupfer äufserst schwach.

Vielleicht wird man uns nun glauben, dafs nicht die chemische Einwirkung die Ursache der *Volta*'schen Ströme ist, allein wir wollen die Thatsachen anführen, die beweisen, dafs sie nicht einmal den geringsten directen Einfluſs auf dieselben hat.

Man gebe in ein Glas mit 6 Theilen Wasser verdünnte Schwefelsäure, in ein anderes destillirtes Wasser, und stelle die Communication zwischen beiden Gläsern durch einen mit destillirtem Wasser getränkten Papierstreifen her, eine Zink- und eine Platinplatte werden mittelst des Multiplicatordrahtes verbunden, das Zink in die Säure, das Platin ins Wasser getaucht. Die Declination der Nadel beträgt 11°. Man trockne nun die Platten und wiederhole den Versuch, sobald die Nadel zur Ruhe gekommen ist, aber tauche jetzt das Platin in die Säure und das Zink ins Wasser. Die Abweichung beträgt wiederum 11°. Und doch findet beim Eintauchen des Zinks in die Säure ein heftiges Aufbrausen, eine bedeutende chemische Wirkung Statt, während beim

Eintauchen des Platins in die Säure sich nicht die geringste Spur einer solchen Wirkung zeigt.

Wendet man statt der Schwefel-, Salpetersäure, statt Platin und Zink, Silber und Zink an, so zeigt sich jedes Mal eine Abweichung von 6°, ob nun das Zink in die Säure oder ins Wasser getaucht wurde. Plattenpaare aus Stahl und Zink, Kupfer und Zink, Eisen und Zink gaben ganz analoge Resultate *).

7. Konnten diese der electrochemischen Theorie so widersprechenden Erscheinungen, wird man fragen, dem Scharfblick *La Rive's* entgehen? Keineswegs. *La Rive* selber bemerkt, dafs wenn man in den einen Arm einer Uförmig gekrümmten Röhre Salpeter-, und in den andern Arm concentrirte Schwefelsäure gibt, und das Zinkende des Multiplicators in die Schwefel-, das Kupferende in die Salpetersäure gibt, das Zink sich positiv gegen das Kupfer verhält, obgleich letzteres stärker durch die Salpetersäure, als ersteres durch die Schwefelsäure angegriffen wird. »Allein,« argumentirt nun *La Rive*, » auch mit ganz gleichartigen Kupfer-, Zink-, Bleiplatten u. s. w. bemerkt man dasselbe, d. h. die stärker angegriffene Platte zeigt — *E*; wie darf man sich also » wundern, dafs dasselbe auch bei Platten verschiedener

*) Durch analoge Versuche beweist man auch die Unzulänglichkeit der thermoelectrischen Ansicht *Nobili's*: dafs der Strom stets vom wärmeren Metall zum kälteren ströme. Setzt man nämlich das erwärmte Wasser eines Recipienten mit dem kalten eines andern durch einen nassen Papierstreifen in Verbindung; so sieht man, dafs der electrische Strom bald von der heifsen Flüssigkeit zur kalten, bald von der kalten zur erwärmten geht, je nachdem die electro-positive Platte des *Volta*'schen Elementes in der erwärmten oder in der kalten Flüssigkeit steht.

»Natur geschieht, oder wie kann man daraus eine Fol»gerung zu Gunsten der Berührungstheorie ziehen?«

Was würde aber *La Rive* entgegnen, wenn irgend ein Verfechter der *Volta*'schen Ansicht das gebrauchte Argument umkehren, und etwa so schliefsen würde: Weil es *sowohl* bei gleichartigen *als* bei ungleichartigen Metallen geschehen kann, dafs bald das stärker, bald das schwächer angegriffene — *E* zeigt, so kann man aus allen dergleichen Facten durchaus keine Folgerung zu Gunsten der electrochemischen Theorie ziehen. Vielleicht, wird dieser Verfechter hinzufügen, eher eine dagegen.

Vielleicht hat *La Rive* selbst seine Beweisführung nicht für ganz zureichend gefunden, wenigstens beschäftiget er sich unmittelbar darauf, eine Erklärung dieser seiner Ansicht widersprechenden Phänomene zu geben, und zwar eine geistreiche Erklärung — diefs räumen wir ein — und die auch das beweist, dafs wenigstens der Urheber der electrochemischen Theorie die festeste Überzeugung von ihrer Statthaftigkeit hat. Doch hören wir ihn selbst:

»Man kann,« sagt er, »über diese anscheinen»den Anomalien leicht Rechenschaft geben, wenn »man bedenkt, dafs die beiden electrischen Grundstoffe, »die durch Einwirkung der Salpetersäure sich auf der »Oberfläche des in diese Säure getauchten Metalls von »einander trennen, sich entweder *unmittelbar* wieder »vereinigen oder zu diesem Ende *einen Kreislauf begin»nen* können. In dem fraglichen Falle bewirkt die Leich»tigkeit, mit der die Electricität vom Metall in die Sal»petersäure übergeht, und die Schwierigkeit, mit der »sie beim Übergange vom Metall in die Schwefelsäure »zu kämpfen hat, dafs der gröfste Theil der Grundstoffe »sich *unmittelbar* wieder vereiniget, und nur ein klei-

» ner Theil den Kreislauf beginnt. Aus demselben Grunde » durchlaufen die beiden an der Oberfläche des in der » Schwefelsäure stehenden Metalls getrennten Grund- » stoffe, die durch die chemische Einwirkung, der eine » in die Säure, der andere in das Metall überführt wer- » den, gröfstentheils den weiteren aber minder schwie- » rigern Weg, den ihnen die Peripherie des Kreises dar- » bietet, weil sie hier nur den leichten Übergang vom » Metall in die Salpetersäure zu bestehen haben, wäh- » rend bei directer Wiedervereinigung sie vom Metall » in die Schwefelsäure übergehen müfsten. Und darum, » wiewohl auch hier durch die Einwirkung der Schwe- » felsäure auf das Metall sich weniger Electricität ent- » wickle, als durch die der Salpetersäure, gewinne der » durch die erste Säure hervorgebrachte Strom (jener » Theil der Electricität, welcher den Kreislauf einschlägt) » über den durch die zweite erregten die Oberhand, und » bestimme so die von der Hauptrichtung des Stromes » abhängenden Anzeigen des Instruments. «

In dieser Erklärung ist nun zwar, für gewöhnliche Verstandeskräfte, manches unverständlich. *Zuerst*, wie es denn eigentlich möglich sey, dafs die durch die chemische Einwirkung getrennten Grundstoffe, beim Fortbestehen der Ursache ihrer Trennung an demselben Orte, wo diese waltet, sich *unmittelbar* wieder vereinigen. *Zweitens*, wie man denn sagen könne, die durch die Schwefelsäure zersetzten Grundstoffe brauchten zu ihrer Wiedervereinigung nicht durch die — wohl gemerkt, ein Glied der Kette ausmachende — Schwefelsäure zu gehen. Denn entweder stellt man sich vor, dafs der in die Säure übertragene Theil der beiden Grundstoffe dort ruhig abwartet, bis der andere die Kette durchlaufende bei ihm eintrifft, und dann mufs der letztere den Übergang von der Salpeter- in die Schwefelsäure bestehen,

oder man meint, dafs sich beide Principien in der Salpetersäure begegnen, und dann mufs der erste Grundstoff die Schwefelsäure durchströmen; in keinem Falle kann man beide Principien von diesem so mühevollen Übergange dispensiren. *Drittens* bleibt es räthselhaft, warum denn, da beide Metalle sich mit gleichartiger Electricität laden, die schwächere derselben vorwalten soll. Denn entweder besteht der Unterschied der Electricität beider Metalle blofs in der Menge, und dann besitzen beide dieselbe Spannung, und es findet folglich gar kein Strom Statt, oder der Unterschied erstreckt sich auch auf die Spannung; dann aber mufs jenes Metall, dessen Spannung stärker ist, vorwalten, welche Hindernisse auch der Electricität im Wege stehen.

Allein dafs uns so manches unverständlich geblieben, kann uns höchstens an einer gründlichen Würdigung dieser Erklärung *La Rive's* hindern, erlaubt wird es immerhin seyn, die Sache wenigstens oberflächlich zu betrachten.

Stellen wir einmal das Zinn in Salpeter-, und das Kupfer in concentrirte oder verdünnte Schwefelsäure; auch in diesem Falle müfste, wenn die Erklärung *La Rive's* die wahre ist, die Leichtigkeit der unmittelbaren Zusammensetzung der beiden Grundstoffe in der Salpeter-, und die Schwierigkeit dieser Wiedervereinigung in jener Flüssigkeit, in der sich das Kupfer befindet, im Zink $-E$, im Kupfer $+E$ erzeugen — leider erfolgt das Gegentheil.

Es ist zu bedauern, dafs in den angeführten Auszug nicht auch die Versuche aufgenommen sind, durch welche *La Rive* geradezu bewiesen hat, dafs wenn die Leichtigkeit des Überganges auf beiden Seiten gleich ist, das Kupfer wie gewöhnlich $+E$, und das Zink $-E$ erhält; es wäre nicht uninteressant, diese Versuche zu wieder-

holen, insbesondere da trotz allen Bemühungen *Marianini's*, den beiden Flüssigkeiten eine gleiche Leitfähigkeit zu ertheilen, und trotz den mannigfachsten Modificationen ihrer Leitfähigkeit und sonstigen Beschaffenheit, es ihm nie gelingen wollte, im Kupferzink- oder in was immer für einem andern, z. B. in einem Messingzink-, Eisenzink-, Zinnzink-Elemente einen der *Volta*'schen Ansicht widersprechenden Strom hervorzurufen *).

8. Es möge hier noch eine Erfahrung Platz finden, die aus zwei Versuchen *Becquerel's* hergeleitet worden ist. Letzterer hat nämlich entdeckt, dafs ein wohl polirter Zinkstreifen in Berührung mit einer salpetersauren Zinklösung — *E* bekömmt, so oft man in die Auflösung einen Tropfen Salpeter- oder Schwefelsäure giefst, und dafs Eisen in Berührung mit einer Lösung von Eisenvitriol + *E* erhält, wenn man in diese Auflösung einen Tropfen Schwefelsäure bringt.

Marianini vereinigte nun beide Versuche, setzte die Eisen- und die Zinkplatte mittelst des Multiplicatordrahtes, die salpetersaure Zink- und schwefelsaure Eisenlösung mittelst eines mit destillirtem Wasser durchnäfsten Asbeststranges in Verbindung, und tröpfelte nun gleichzeitig in die salpetersaure Zinklösung Salpe-

*) Übrigens wäre es eben nichts Unmögliches, eine Flüssigkeit zu finden, die in einem Kupferzink-Plattenpaare einen dem gewöhnlichen entgegengesetzten Strom zu erregen vermöchte; man brauchte zu dem Ende blofs eine Flüssigkeit aufzusuchen, die im Kupfer dieselbe Veränderung hervorbrächte, welche der electrische Strom an demselben hervorbringt, und die wir bereits besprochen haben. Hat *La Rive* einen dergleichen Leiter gefunden, so ist ihm um diese Entdeckung Dank zu wissen, aber zu Gunsten der electrochemischen Ansicht beweist sie dennoch nichts.

ter-, in die schwefelsaure Eisenlösung Schwefelsäure. Ist nun die chemische Wirkung der Grund des electrischen Stromes, so mufs der Strom vom Zink ($-E$) zum Eisen ($+E$) gehen; allein es fand das Gegentheil Statt, das Eisen zeigte $-E$, das Zink $+E$. Diese Thatsache beweist *zum wenigsten*, dafs aufser den chemischen Wirkungen es noch eine andere, und im gegenwärtigen Falle kräftigere Ursache des electrischen Stromes gebe. Dieser Versuch wurde übrigens mannigfach, sowohl in Betreff der Stärke der Salzlösungen als der Menge der hinzugetröpfelten Säure abgeändert; aber stets ergaben sich dieselben Resultate, blofs die Intensität war verschieden.

Doch noch einem Einwurf ist zu begegnen. Man nimmt nämlich, nach der electrochemischen Ansicht, gewöhnlich an, dafs das stärker angegriffene Metall im Verhältnifs zum schwächer angegriffenen $+E$ zeigt, und könnte nun bei dem angeführten Versuche sagen: dafs wiewohl die *absolute* chemische Wirkung der Flüssigkeiten auf die Metalle einen Strom vom Zink zum Eisen erregt hätte, doch durch die *relative* chemische Wirkung, d. i. weil das Zink stärker angegriffen wird, als das Eisen, die Richtung des Stromes in die entgegengesetzte verwandelt worden wäre. Allein *Marianini* verdünnte die salpetersaure Auflösung, in welcher die Zinkplatte stand, so sehr als möglich, und gab hingegen zur schwefelsauren Lösung, in welcher das Eisen stand, äusserst viel Säure hinzu, so dafs die Schwefelsäure in einem einige tausend Male concentrirterem Zustande als die Salpetersäure sich befand, und dafs daher das Eisen offenbar viel stärker angegriffen wurde, als das Zink: jedoch die Richtung des Stromes war und blieb dieselbe. Also auch die relative chemische Wirkung konnte keinen erklecklichen Erfolg gehabt haben. Ja nicht einmal der Reaction der Säuren auf einander selbst kann

die Entstehung des electrischen Stromes zugeschrieben werden, da, wie ebenfalls *Becquerel* entdeckt hat, sich die Salpetersäure in Berührung mit Schwefelsäure negativ electrisirt.

III.

Da nach der electrochemischen Theorie die Electricität der *Volta*'schen Apparate blofs von der verschiedenen Wirkung der Flüssigkeiten auf die Metalle erzeugt wird, und die Berührung zwischen den heterogenen Platten nur dazu dient, den Übergang der Electricität zu erleichtern: so kann man leicht auf den Gedanken kommen, dafs man in einem zusammengesetzten Apparat auch Electricität erzeugen könnte, ohne Zwischenkunft einer unmittelbaren Berührung.

So richtete *Marianini* einen Becherapparat von sechs Plattenpaaren her, wo er sich als Flüssigkeit stark gesalzenen Wassers bediente, bog aber, statt die Kupfer- an die Zinkplatten zu löthen, das aus dem Becher hervorragende Stück jeder Platte um, und setzte sie dadurch mit einander in Verbindung, dafs er sie paarweise in (sechs) Schalen voll Quecksilber tauchte. Die durch diesen Apparat hervorgebrachten electrischen Spannungen, die Einwirkungen auf die Geschmacksnerven und die Abweichungen der Nadel waren, wie voraus zu sehen, dieselben, wie wenn die Platten jedes Paares an einander gelöthet worden wären. Allein wie man an die Stelle des die metallinische Verbindung herstellenden Quecksilbers reines Wasser brachte, so verschwanden die Spannungen und die andern electrischen Zeichen gänzlich.

Zwar greift — wenigstens nach der electrochemischen Theorie — das reine Wasser Zink stärker als Kupfer an, man hätte also hier zwei Electromotoren von

einer gleichen Elementenzahl und ganz entgegengesetzter Richtung, und könnte *Marianini's* Versuche entgegen stellen, dafs obgleich die chemischen Wirkungen der beiden Flüssigkeiten auf die Metalle von ungleicher Stärke sind, doch die erzeugten electrischen Spannungen einander gleichen, und da sie einander entgegengesetzt sind, die electrischen Ströme sich wechselseitig aufheben müssen. Allein rührt wirklich die Electricität von der chemischen Einwirkung her, wie kann man da von Gleichheit der Spannung reden, wo diese Wirkungen von so ungleicher Stärke sind? Und umgekehrt, wie erklärt denn die electrochemische Theorie, dafs falls nun die Anzahl der Platten des *Volta'*schen Apparates dieselbe bleibt, es gar keinen Unterschied in der Spannung mache, ob man nun die Metalle in die eine oder in die andere Flüssigkeit, in verdünnte Salpeter- oder in Blausäure, in destillirtes Wasser oder in Alkohol taucht, oder den feuchten Leiter mit Scheiben aus salpetersaurem Sodium ersetzt?

Je entscheidender ein Argument ist, desto mehr verdient es geprüft zu werden. Wir haben daher zu untersuchen, ob denn wirklich Säulen aus derselben Anzahl Plattenpaare, jedoch in verschiedenen Leitern, genau dieselbe Spannung zeigen, und ob denn die Anzeigen eines mit dem Condensator in Verbindung gesetzten Electrometers genau genug sind, um jede, auch die kleinste Differenz anzugeben. Bewegen doch eilf Paare einer *Volta'*schen Säule, die aus theils polirten, theils matten Kupferstreifen zusammengesetzt ist, den Goldstreifen des Electrometers nicht im mindesten, während der Multiplicator eine Abweichung von mehreren Graden zeigt, und auf gleiche Weise könnten daher in den Spannungen der Metalle bei einer verschiedenen chemi-

schen Einwirkung der umgebenden Flüssigkeit Unterschiede obwalten, die kein Electrometer anzeigt.

Zur Aufhellung dieses Umstandes wandte *Marianini* zwei Apparate an, jeden von vier Zink-Kupfer-Elementen, den einen mit einer gesättigten salzsauren Sodiumlösung, den andern mit Regenwasser. Der erste lenkte den Multiplicator um 30°, der zweite um 6° ab. Die beiden Apparate wurden nun in Verbindung gesetzt, aber so, dafs die beiden Ströme in entgegengesetzter Richtung strömten, jedoch der Multiplicator gab gar keine Anzeige mehr. Wäre nun ein Unterschied in der Spannung vorhanden gewesen, so hätte der Multiplicator ihn anzeigen müssen. Wir können also aus dem Nichtseyn der Folge auf das Nichtseyn des Grundes zurückschliefsen, und das Daseyn eines wie immer gearteten Unterschiedes in der Spannung electrischer Körper in verschiedenen Flüssigkeiten geradezu abläugnen.

Ich glaube nicht, dafs irgend ein Verfechter *La Rive's* den Einwurf dadurch wird beseitigen können, dafs er vorgibt, in diesen und ähnlichen Versuchen übten die angewendeten Flüssigkeiten auf die Metalle gar keine chemische Wirkung aus; denn woher käme sonst die Electricität, die sich bei der Anwendung einer dieser Flüssigkeiten allein zeigt? Aber könnten nicht trotz der verschiedenen chemischen Kraft der Flüssigkeiten die von ihnen erzeugten Spannungen dennoch gleich stark seyn? Gut, fragt man dagegen, aber wie erklärst du das? worin hat diese Anomalie, denn das bleibt sie nach der electrochemischen Ansicht sicher, ihren Grund? Vermehrt etwa eine Steigerung der chemischen Kräfte blofs die Menge der entwickelten Electricität, ohne ihre Spannung zu ändern, gleichwie es die Vermehrung der Berührungspuncte thut? Diese Annahme ist wohl zulässig, wenn in den beiden Flüssigkeiten die auf die Me-

talle wirkende Substanz dieselbe, und blofs ihre in der Auflösung enthaltene Menge verschieden ist; allein sie ist durchaus nicht anwendbar, wenn es sich um zwei Flüssigkeiten ganz verschiedener Natur handelt. Denn wie z. B. könnte man annehmen, dafs die durch die Einwirkung des reinen Wassers auf Kupfer und Zink entwickelte electrische Spannung jener gleich komme, welche durch die Einwirkung eines Salzes, Alkali's oder einer Säure auf dieselben Metalle entwickelt wird!

Gegen diesen meinen auf der Beständigkeit der electrischen Spannung der Säule in den verschiedensten Flüssigkeiten gebauten Beweisgrund könnte ein Anhänger der neuen Lehre noch den Einwurf machen: dafs die in jedem Elemente der *Volta*'schen Säule eintretende Veränderung des electrischen Gleichgewichtes nicht aus der mehr oder minder starken Einwirkung der Flüssigkeit auf die Metalle, sondern aus dem Unterschiede, der zwischen der Einwirkung auf das eine und der auf das nächste Metall obwaltet, seinen Grund habe, und dafs da dieser Unterschied stets derselbe bleibt, da auch bei was immer für einer Macht der Flüssigkeit die Spannung des Apparates sich nicht verändere.

Es dürfte den Erfinder dieses Einwurfes beleidigen, wenn man ihm entgegnete: falls er die Beständigkeit in der Differenz der chemischen Wirkungen nur durch die Beständigkeit der electrischen Spannungen darzuthun vermag, so leide seine ganze Theorie an einem *circulus vitiosus;* lieber wollen wir ihm einen Versuch anführen, bei welchem, ungeachtet die Differenz der chemischen Einwirkung auf die zwei Metalle nicht dieselbe blieb, doch die Spannungen sich nicht im geringsten änderten.

Acht Gläser destillirtes Wasser und acht Gläser verdünnte Schwefelsäure wurden, ein Glas Wasser mit einem Glase Säure abwechselnd, hinter einander gestellt,

die Zinkplatte eines *Volta*'schen Elementes in das erste Glas Wasser, seine Kupferplatte in das erste Glas Schwefelsäure, die Zinkplatte eines zweiten Elementes in das zweite Glas Wasser, die Kupferplatte in das zweite Glas Säure u. s. f. gebracht; das erste Glas Säure mit dem zweiten Glase Wasser, das zweite Glas Säure mit dem dritten Glase Wasser u. s. w. durch Asbeststränge in Verbindung gesetzt. Man hatte also einen Electromotor von acht Plattenpaaren, dessen Zinkplatten in Wasser, und dessen Kupferplatten in Schwefelsäure standen. Und doch zeigte er ganz dieselbe Spannung wie ein anderer ähnlicher Apparat, in dem alle Gläser mit destillirtem Wasser gefüllt waren. Nun ist doch offenbar der Unterschied zwischen der chemischen Wirkung des Wassers auf Zink und des Wassers auf Kupfer nicht gleich dem Unterschiede zwischen der Wirkung des Wassers auf Zink und der Schwefelsäure auf Kupfer. Woher also bei dieser Ungleichheit der Unterschiede der chemischen Wirkungen die Gleichheit der Spannungen?

9. Über den Einfluſs der Zahl der Elemente auf die Wirkungen der Säure gibt die electrochemische Theorie *La Rive's* auf eine sinnreiche Weise Aufschluſs.

»Die beiden an den zwei Polen der Säule angehäuften electrischen Principien,« sagt *La Rive*, »suchen »sich gegenseitig zu neutralisiren, und wenn die Pole »nicht durch einen Leiter verbunden sind, so dient ihnen die Säule selber als solcher. Daher kann keine der »beiden Electricitäten eine gewisse Spannung überschreiten, deren Gröſse von der geringeren oder gröſseren »Leichtigkeit abhängt welche der *Volta*'sche Apparat »dem Durchgange der beiden Fluida gewährt. Nun ist »aber erwiesen, daſs je gröſser die Anzahl der Platten »ist, desto mehr auch der Widerstand wächst und der

»Durchgang erschweret wird, daher auch die Spannung »mit der Anzahl der Plattenpaare zunehmen wird.«

Vorerst erlaube man uns eine Frage: Findet dieses Streben zur Neutralisation auf zwei Wegen, dem einen durch den Electromotor und dem andern durch den die Pole verknüpfenden Leiter blofs in der zusammengesetzten, oder findet er auch in der einfachen Kette Statt? Gibt man das Letztere zu, so mufs man uns schon eine zweite Frage verzeihen: Warum schlagen denn die beiden Electricitäten, statt den feuchten Leiter zu durchströmen, den ihnen offenen, und ungleich besser leitenden, durch die Metalle ein? — Schneidet man, vielleicht eben wegen der jetzt gezogenen Folgerung, den einfachen Electromotoren den einen der zwei Wege durch einen Machtspruch ab, so mufs man schon die Mühe auf sich nehmen, uns zu erklären: auf welche Weise denn im zusammengesetzten Apparat eine Eigenschaft entstehe, die den Elementen, aus denen er besteht, nicht eigen ist.

Hierauf erwiedern nun die Chemo-Electriker: Die Menge der durch den einfachen Electromotor entwickelten electrischen Fluida ist äufserst beträchtlich; der gröfste Theil schlägt freilich den metallinischen Weg zu seiner Wiedervereinigung ein, allein es bleibt noch immer genug Electricität übrig, die sich durch den feuchten Leiter fortbewegen mufs. Hingegen bei der Verbindung mehrerer Plattenpaare wachse die Spannung so sehr, dafs die Menge, die in diesem Falle durch den Electromotor selber strömen könnte, sich verringert.

Aber, müssen wir erstens in Erinnerung bringen, das Abwechseln feuchter und metallinischer Leiter kann zwar allerdings die Menge der Electricität verringern, die in einer gegebenen Zeit den Apparat durchströmt,

allein sie kann durchaus nicht, auch nur im geringsten, die Spannung des Apparates verändern. Ferner wenn, wie diese Ansicht voraussetzt, bei geschlossener Kette zwei Ströme obwalten, die der bisher beobachteten Richtung gerade entgegengesetzt sind, warum hat man noch nicht die geringste Spur hievon entdeckt? Wir wissen, dafs wenn man die Kette schliefst, die Kraft der Säule wegen der Wirkung, welche der Strom auf die Platten übt, sich vermindert, und dafs, wenn man die Säule durch einen entgegengesetzten Strom durchströmen läfst, ihre Kraft gesteigert wird. Warum also wird, wenn man die Kette durch einen noch unvollkommenern Leiter, als die Säule selber ist, schliefst, z. B. durch eine *Ritter*'sche Ladungssäule von mehr Platten, als der Electromotor selber zählt, die Kraft des letzteren, statt (durch den entgegengesetzten Strom) gesteigert zu werden, immer schwächer?

Aus dem Gesagten folgt, dafs entweder die erwähnten entgegengesetzten Ströme gar nicht Statt finden, oder dafs wenigstens das falsch ist, was in der erwähnten Abhandlung *La Rive's* steht: »Dafs das »Verhältnifs der Electricität, welche durch den die »Pole der Säule verknüpfenden Leiter geht, zu jener, »welche die Säule selber durchströmt, von dem Ver»hältnisse der Leitungsfähigkeit des Leiters und der »Säule abhänge.«

Und dann, wie soll man annehmen, dafs die beiden electrischen Principien in die Säule zurück zu strömen suchen, um sich in ihr zu neutralisiren, da doch das eigentliche Wesen dieses Apparates eben in seinem Streben besteht, die beiden Electricitäten aus einander zu halten, und die eine Electricität am positiven, die andere am negativen Pole anzuhäufen?

Und endlich, wenn man die Erklärung *La Rive's*

annimmt, so sollte man nie mittelst eines Condensators eine Spannung am Pole entdecken können; denn wie grofs auch die Anzahl der Plattenpaare der Säule ist, so bietet sie doch immer dem electrischen Fluidum einen viel bessern Leiter an, als die isolirende Schichte des Condensators ist. Doch nehmen wir an, dafs die wie immer geartete Leitungsfähigkeit des Condensators hinreiche, oder dafs seine Capacität die schlechtere Leitung ersetze: in diesem Falle können wir wenigstens einigermafsen Rechenschaft geben, warum die Spannung eines Apparates dieselbe bleibt, wie auch immer die Beschaffenheit des flüssigen Leiters sich ändert. Denn wenn man eine Flüssigkeit anwendet, welche die Metalle stärker angreift, so erhält man nach der electrochemischen Theorie zwar eine gröfsere Spannung, allein da diese Flüssigkeit auch ein besserer Leiter ist, so kann das electrische Fluidum leichter in dasselbe zurückströmen, und die Spannung nimmt daher wieder ab; daher an den Polen die Anzeigen des Condensators dieselben bleiben müssen.

Indessen zeigt auch diese neue Hypothese sich unzureichend, um einige Versuche, die leicht zu erdenken waren, zu erklären.

So blieb die Spannung eines Becherapparates in Regenwasser dieselbe, es mochte die Oberfläche der zwischen den einzelnen Platten stehenden Flüssigkeit auf das Fünf- bis Sechsfache vergröfsert werden, obgleich doch hiedurch die Schwierigkeit des Zurückströmens der Electricität in den Apparat bedeutend gesteigert worden war. Bei einem Becherapparat, der an einem mit einem Condensator versehenen Electrometer eine Spannung von 12° anzeigte, wurden zwischen die einzelnen Elemente sechs Gläser mit Wasser, die unter sich und mit den Elementen durch kleine Kupferbögen

communicirten, gestellt, so dafs man einen Apparat von 56 Paaren hatte, von denen blofs 8 wirksam, und die 48 übrigen blofs Abwechslungen nasser und metallinischer Leiter waren, die, wie bekannt, den Durchgang des electrischen Fluidums aufserordentlich erschweren; aber die Spannung war noch immer 12°, nicht mehr, nicht weniger. Statt 48 wurden 80 solche Wechsel von nassen und metallinischen Leitern eingeschoben, hierdurch wurde der Strom so verzögert, dafs er keinen Geschmack auf der Zunge, keine Zuckungen am Frosche, keine Abweichung am Multiplicator mehr hervorbrachte; jedoch die Spannung war um nichts gewachsen. Die Wechsel wurden bis auf 310 vermehrt, allein die Spannung vergröfserte sich nicht, veränderte sich auch dann nicht, wenn man statt des Meerwassers, das in den Schalen sich befand, sich einer schlechter oder besser leitenden Flüssigkeit bediente.

Es wurden ähnliche Versuche mit Apparaten von fünf, drei und zwei Elementen angestellt, einmal die 310 Wechsel zwischen zwei Elementen angebracht, und doch änderte sich die Spannung der beiden Elemente nicht im Geringsten. *Folglich* kann die Gröfse der Spannung nicht von der Leichtigkeit des Durchganges der Electricität durch den *Volta*'schen Apparat abhängen, *folglich* existiren die von *La Rive* erdachten rückgängigen Ströme entweder gar nicht, oder sie üben wenigstens keinen Einfluſs auf die Spannung der Electromotoren.

Das Phänomen der Wasserzersetzung wird von *La Rive* ebenfalls in der Voraussetzung der beiden Strafsen der zwei Electricitäten auf der Reise zu ihrer Wiedervereinigung erklärt. Ändert sich das Verhältnifs zwischen der Leitfähigkeit des Leiters zu jener der Säule, so mufs jener Theil der Electricität, welcher den Leiter selbst durchströmt, gleichmäfsig variiren, und folglich auch, nach *La Rive*, die zersetzende Kraft des Apparates. Indefs kann man aus folgendem Versuche ersehen, dafs die Sache sich nicht immer so verhält.

Ein Becherapparat von 80 Elementen zersetzte Wasser ziemlich schnell mittelst zweier an den zwei Polen befindlichen, und in eine gekrümmte Röhre voll Wasser getauchten Platindrähte. Man setzte dem Apparate

zwanzig unthätige Elemente zu, wie in dem Versuche des vorigen Paragraphs. Die Zersetzung ging weit weniger schnell vor sich, obgleich die Kette lange Zeit genug offen gehalten wurde, um dafs der Apparat die während des Schlusses der Kette verlorene Kraft hätte wieder erhalten können. Noch langsamer ging die Entwickelung vor sich, wenn man der Säule 20 andere unwirksame Elemente hinzusetzte, und endlich nach Hinzugabe von 60 andern ähnlichen Paaren ging die zersetzende Kraft fast ganz verloren. Nun aber hatte sich die Leitungsfähigkeit des Apparates doch sicherlich vermindert, die des Leiters war dieselbe geblieben, warum also strömte die Electricität nicht jetzt reichlicher durch den Leiter ab, und warum ging folglich die Wasserzersetzung nicht rascher vor sich? Warum erfolgte vielmehr das Gegentheil? — Wir antworten: weil die Wasserzersetzung unter die Reihe jener Phänomene gehört, die nicht blofs von der Spannung, sondern auch von der Geschwindigkeit des electrischen Stromes abhängen; folglich wenn unter übrigens gleichen Umständen die eine oder die andere dieser beiden Bedingungen verschwindet, auch die zersetzende Kraft des Apparates schwächer wird.

Oder wie will *La Rive* mit seiner Ansicht das Factum vereinigen, dafs wenn man einen Electromotor von 100 Elementen an drei oder vier wie immer gelegenen Puncten unterbricht, und an jeder dieser Unterbrechungsstellen einen Wasserzersetzungsapparat anbringt, die Menge des Gases, die sich in einer gewissen Zeit entwickelt, allenthalben gleich grofs ist?

10. Was wir bisher sagten, scheint dargethan zu haben, dafs die electrochemische Theorie, einen so talentvollen Vertheidiger sie auch an *La Rive* gefunden hat, doch nicht hinreiche, die mannigfachen Erscheinungen der einfachen oder zusammengesetzten Electromotoren zu erklären; man erlaube uns nur noch eine Bemerkung.

Die Ansicht *Volta's*, vielleicht ist sie auch nur Hypothese, d. h. vielleicht beruht sie nicht auf unbestreitbaren Thatsachen, oder vielleicht ist der Zusammenhang zwischen diesen Thatsachen und den Erscheinungen der Säule ein blofs zufälliger: allein sie erklärt *alle* Phänomene, erklärt sie auf eine leichte, ungezwungene Weise,

und man räume ihr daher einstweilen den Vorzug vor der electrochemischen Theorie ein.

Was wir hier aber unter der Theorie *Volta's* verstanden haben wollen, ist nicht, wie Einige noch immer zu glauben scheinen, die Theorie der gewöhnlichen Säule, die nur specieller Fall der allgemeinen Theorie der Electromotoren ist, die *Volta* viele Jahre früher lehrte, ehe er noch die Säule entdeckt hatte. In dieser Theorie betrachtet man den durch einen Electromotor erregten Strom als die Resultirende der einfachen Ströme, welche die im Electromotor selber sich begegnenden und bekämpfenden electromotorischen Kräfte erregen, wie die Berührung der Metalle unter sich oder mit Flüssigkeiten, der Flüssigkeiten unter einander u. dgl. m. Keineswegs wird in ihr die Wirkung der Flüssigkeiten auf die Metalle als gleichgültig vernachläfsigt, sondern im Gegentheile hat *Volta* selbst durch zahlreiche Versuche zu zeigen versucht, dafs es Fälle geben kann, wo diese Wirkung mächtiger als die durch Berührung zweier Metalle erzeugte auftritt, wiewohl für gewöhnlich letztere die stärkere ist. Auf diesem Wege, indem sie die Kräfte der Electromotoren des ersten und zweiten Ranges in Übereinstimmung zu bringen suchten, wufsten die Anhänger *Volta's* ihren Apparaten die gröfstmöglichste Stärke zu verleihen. Auf diesem Principe beruhen *Zamboni's* trockene Säulen, auf ihm *Ridolfi's* Becherapparat, wo die Zinkplatten in einer alkalinischen Lösung, die Kupferplatten in einer verdünnten Säure stehen. Auf ihm beruht *Becquerel's* Methode, Ströme von gleichbleibender Stärke zu erhalten, indem er die durch die Berührung der Metalle entstehenden Ströme mit den durch die chemische Einwirkung der verschiedenen Säuren auf die Metalle erzeugten zusammenwirken läfst.

Die Thatsache, aus der alle electrischen Phänomene abgeleitet werden können — die Physiker haben sie noch nicht gefunden. Vielleicht liegt sie in der mechanischen Wirkung der Körper, die entsteht, wenn man sie mit einander in Berührung setzt, so meint wenigstens *Configliachi*, der eifrigste unter den Schülern *Volta's*; vielleicht in der chemischen Kraft der Körper, die unter den gedachten Umständen thätig wird, so wollen *Parrot*

und *Heidmann;* vielleicht in den eintretenden Änderungen der Temperatur, nach *Dal Negro* und *Nobili;* vielleicht in dem Streben der Materie, in ihre kleinsten Theile zu zerfallen, ein Streben, das in dem Zustande der Verdünnung insbesondere hervortritt, und durch die originellen Versuche *Fusinieri's* dargethan worden ist; Versuche, die ein weites Feld eröffnen, und die uns vielleicht dereinst nicht blofs die electrischen Phänomene, sondern alle jene, die wir gegenwärtig dem Daseyn unwägbarer oder gar hypothetisch angenommener Flüssigkeiten zuzuschreiben pflegen, blofs als Resultate der Wirkung der kleinsten Theilchen der Körper auf einander darstellen werden. Bis dahin erheischt die Wichtigkeit der electrischen Erscheinungen, dafs man wenigstens eine Classe derselben, die der sogenannten galvanischen Electricität, mit einer sie alle umfassenden, ausnahmlosen Theorie zu umfassen vermöge; und aus diesem Gesichtspuncte verdient diese Arbeit *Marianini's* besondere Würdigung.

VIII.

Vanadium, ein neues Metall.

(Aus einem Schreiben des Hrn. *J. Berzelius* an den Herausgeber *A. B.*)

Stockholm, am 18. März 1831.

Professor *Sefström* hat im vorigen Sommer ein neues, recht interessantes Metall entdeckt, welches er Vanadium genannt hat. Es kommt in dem Eisenerz zu Taberg in Småland vor, scheint aber in demselben in so geringer Menge vorhanden zu seyn, dafs man es nicht darin gefunden hat, sondern in dem daraus verfertigten Eisen. *Sefström* zieht es aus der Frischschlacke von dem Eisenwerke Eckersholm in Småland, und hat daraus schon so viel ausgezogen, dafs man es näher hat untersuchen können. Da *Sefström's* Geschäfte ihm nicht Zeit dazu lassen, hat er mir diese Untersuchung anvertraut, die bald beendigt werden wird.

Das Vanadium ist eben so schwierig zu reduciren wie Titan, ist grau, und in andern Säuren, als Salpetersäure und Königswasser, nicht auflöslich. Sein Atomgewicht ist 855.8. Es hat drei Oxyde. Das erste ist $V + O$, verbindet sich nicht mit andern Körpern, ist ein vortrefflicher Leiter der Electricität, ein starker Electromotor, negativ-electrisch gegen Zink, schwarz, und nicht schmelzbar. Das zweite ist $V + 2O$, schwarz, nicht schmelzbar; es verbindet sich mit Säuren zu Salzen, die wasserfrei, braun, und mit Wasser schön dunkelblau sind. Mit Basen verbindet es sich ebenfalls, und gibt mit den Alkalien krystallisirbare braune Verbindungen. Das dritte $= V + 3O$ ist eine Säure, schmelzbar, krystallisirend, gelb oder roth nach Verschiedenheit des Aggregatzustandes, gibt gelbe und farbenlose Salze, theils nach verschiedenem Sättigungszustand, theils nach ungleicher Stärke der Basen; die schwächeren bringen immer gefärbte Salze hervor. Die Säure und das Oxyd verbinden sich in mehreren Verhältnissen, und werden dadurch löslich in Wasser, mit Purpur-, schön dunkelgrauer, gelbgrauer uud oranger Farbe. Mit Schwefel kann das Vanadium in zwei Verhältnissen verbunden werden, und beide Stufen bringen Schwefelsalze mit Schwefelbasen hervor. Die von $V + 2S$ sind in der Auflösung eben so schön und reich purpurfarben, wie die mangansauren Salze. Die von $V + 3S$ sind rothbraun.

Dieses ist nun die gedrängte Charakteristik des neuen Metalls. *Wöhler* hat schon entdeckt, dafs das sogenannte chromsaure Blei von Zimapan in Mexiko nicht chromsaures, sondern vanadiumsaures Blei ist; ich habe Gelegenheit gehabt, dieses zu bestätigen.

ZEITSCHRIFT

FÜR

PHYSIK UND MATHEMATIK.

I.

Beschreibung der Amalgamation der Silbererze zu Arany-Idka;

von

Dr. *Wehrle*, k. k. Bergrath und Prof. in Schemnitz.

Der Zweck der Amalgamation ist die Gewinnung des Silbers der Silbererze; sie unterscheidet sich von der Einträuk- oder Verbleiarbeit darin, dafs sie als Auflösungsmittel Quecksilber anwendet, und dafs die Auflösung des Silbers schon bei einer Temperatur von 40° *R.* erfolgt, dagegen die Auflösung des Silbers mittelst Blei erst dann Statt findet, wenn die Erze geschmolzen sind, auch entzieht das Blei den Sulfuriden (Lechen, Steinen) das Silber nie vollständig, daher diese einer gleichen Behandlung wiederholt unterzogen werden müssen, dagegen das Quecksilber den Erzen bis auf drei Denär oder ein Quintchen im Centner das Silber vollständig entzieht, endlich ist die Trennung des Silbers vom Quecksilber leicht und ohne allen Abgang möglich, dagegen durch das Abtreiben des Bleies vom Silber immer ein Abgang des Silbers unvermeidlich ist, und ein nicht unbedeutender Theil des Silbers in die Glätte und in den Herd sich zieht, aus welcher er ohne neue Abgänge nicht darstellbar ist. Diese Umstände, so wie auch der geringe Brennmaterialsbedarf, welchen die Amalgamation erheischt, und die leichte Übersicht, welche sie

gestattet, macht dieselbe besonders wichtig und für den Bergbau höchst nützlich; obwohl daher *Born*, *Charpentier*, *Fragoso*, *Helms*, *Lampadius*, *Schwab*, *Rösler* und *Widemann* dieselbe bereits beschrieben haben, so dürfte doch eine specielle Darstellung dieses Prozesses nicht ohne Interesse seyn.

Die Amalgamation der Silbererze ist zu Arany-Idka erst seit acht Jahren im Betriebe, sie wurde durch den Mangel an Blei und Brennmateriale in dieser Gegend durchaus nothwendig, durch die thätige Einwirkung des Herrn Oberinspectors Grafen von *Sereny* und des Herrn Bergraths *Georg* von *Thonhauser* in Ausführung gebracht, und in der neuesten Zeit auch auf die Schwarzkupfer ausgedehnt, welche früher durch den Saigerprozefs zu Tajowa in Niederungarn entsilbert wurden, weil man sich von ihrem Nutzen für den oberungarischen District vollkommen überzeugte.

Das Amalgamirwerk zu Arany-Idka löset aufser den königlichen silberhältigen Gefällen blofs jene der Bartholomäi und Mathei Stollner Gewerkschaft ein, weil diese gemeinschaftlich ein kleines Pochwerk besitzen, in welchem sie ihre Erze pochen und ihre Pochgänge zu Schlich verarbeiten; die andern Gewerken bringen ihre Erze nach Altwasser in die Einlösung, wo dieselben mit den silberhältigen Kupfererzen verschmolzen werden.

Die Ursache, warum manche Gewerkschaften ihre silberhältigen Erze bei der Altwasserhütte einlösen, ist doppelt: erstens enthalten ihre Erze oft zugleich einlösungswürdige Mengen von Kupfer, welches die Amalgamirhütte nicht vergütet, zweitens fehlt es ihnen an Poch- und Mahlwerken; da aber das Amalgamirwerk nur Mehle und Schliche einlöst, so sind sie dadurch zur Einlösung bei der Altwasserhütte gewissermafsen genöthigt.

Die königl. Gefälle werden in dem Antoni-, Stephani-

und Johanni-Pochwerke gepocht, und in dem obern Stephani- und obern Johanni-Pochwerke in jedem mit zwei eisernen Mahlgängen gemahlen, von welchen jeder in 24 Stunden 10 bis 12 Centner Mehl erzeugt.

Die Pochwerke übernehmen die Erze weder nach dem Gewichte noch nach dem Halte, sondern blofs summarisch; der Abgang, welchen demnach der Berg durch das Mahlen und Stampfen der Erze erleidet, ist nicht bekannt, schätzungsweise dürfte er 2 pCt. nicht übersteigen.

Da die Amalgamirkosten 1 fl. 10 kr. C. M. per Centn. des Erzes betragen, das Erz mag arm oder reich an Silber seyn, so ist es klar, dafs der Berg seine Gefälle zu concentriren suchen mufs. Die Concentrirungsabgänge betragen aber laut Ausweisen vom vorigen Jahre $10^{9}/_{10}$ pCt., wovon 2 pCt. dem Pochen und Mahlen zur Last fallen.

Bei armen, das ist 2 bis 3 Loth an Silber haltenden, Erzen steigt der Concentrirungsabgang bis 20 pCt., und bei Pochgängen, deren Silbergehalt in 1000 Centner nicht 200 Lothe erreicht, dürfte er 30 pCt. betragen, obwohl es genau nicht bekannt ist. Durch eine eigene Siebsatzmaschine, welche der thätige Herr Werkverwalter *Johann Tutschnag* einrichtete, und welche sich von den gewöhnlichen Siebsätzen dadurch unterscheidet, dafs nicht das Sieb, sondern das Wasser stofsweise gehoben wird, ist es gelungen, 75 pCt. des Erzes der Pochgänge der nassen Aufbereitung zu entziehen, und dadurch den Abgang der Concentrationsarbeiten wesentlich zu vermindern.

Indem man durch die Concentration den Gehalt der Erze und Schliche zu erhöhen strebt, vermindert man wesentlich die Abgänge der Amalgamation. Die Erfahrung lehrt nämlich, dafs die Amalgamationsrückstände

immer 3 Denär bis 1 Quintchen an Silber enthalten, die amalgamirten Erze mögen 2 oder 8 Loth im Centner enthalten; ein Quintchen beträgt aber bei zweilöthigen Erzen den achten Theil oder 12.5 pCt., bei dreilöthigen Erzen den zwölften Theil oder 8 pCt., bei vierlöthigen Erzen den sechzehnten Theil oder 6 pCt., bei achtlöthigen Erzen endlich den 32sten Theil oder 3 pCt.

Es wird daher deutlich, dafs durch eine zweckmässige Concentration der Erze sowohl der Berg als die Hütte gewinnt; der erstere dadurch, dafs er weniger Schmelzkosten zahlt, die Hütte dadurch, weil sie geringere Abgänge erleidet. Ein Beispiel soll das Gesagte bestätigen.

Der Berg besitze 100 Centner dreilöthige Erze; will er solche bei der Hütte zur Amalgamation einlösen, so mufs derselbe per Centner 1 fl. 10 kr., also 116 fl. 40 kr. Conv. Münze Schmelzkosten bezahlen; concentrirt er aber dieselben auf 40 Centner und auf 7 Loth Silbergehalt, so hat derselbe nur 46 fl. 40 kr. C. M. zu bezahlen, und wird in diesem Falle 37 fl. 21 kr. C. M. mehr empfangen, obwohl er der Hütte 6 pCt. Silber weniger übergibt, wie aus folgender Rechnung ersichtlich ist:

100 Centner Erz à 3 Loth Silber enthalten 300 Loth oder 18 M 12 Loth; hievon der 5 pCt. Feuerabgang oder 15 Loth, bleibt 17 M. 13 Loth.

Die Mark à 24 fl. C. M., beträgt die

Vergütung	427 fl.	30 kr.	C. M.
hievon die Schmelzkosten mit . .	116 »	40 »	»
bleibt .	310 fl.	50 kr.	C. M.
hievon der zehnte Theil Frohne mit	31 »	5 »	»
verbleibt reine Gebühr	279 fl.	45 kr.	C. M.

Im zweiten Falle, löset der Gewerk 40 Centner 7löthige Erze ein, so enthalten diese 40 × 7 = 280 Loth,

oder 17 Mark 8 Loth Silber; hievon 5 pCt. Feuerabgang mit 14 Loth, bleibt 16 M. 10 Loth.
Die Mark à 23 fl. C. M., beträgt die

Vergütung	399 fl.	— kr.	C. M.
hievon die Schmelzkosten mit . .	46 »	40 »	»
bleibt .	352 fl.	20 kr.	C. M.
von diesem Betrage ab die 10 pCt.			
Frohne mit	35 »	14 »	»
verbleibt reine Gebühr	317 fl.	6 kr.	C. M.

also die obigen 37 fl. 21 kr. C. M. mehr. Der Vortheil mufs mit den Abgängen der Concentration im verkehrten Verhältnisse stehen.

Bei den Schmelzhütten ist das Einlösungs-System für die ärmern Zeuge günstiger, indem

die 2 bis $4^1/_4$ löthigen Erze per Cent.	1 fl.	30 kr.	C. M.
» $4^1/_2$ » $6^1/_4$ » » » »	2 »	— »	»
» $6^1/_2$ bis höchsthältigen » »	3 »	— »	»

bezahlen müssen.

Offenbar wird bei diesem Einlösungs-Systeme der Berg für jede Concentration gestraft, für jede Herabsetzung des Haltes der Erze aber belohnt, wie folgende Beispiele erweisen:

Der Berg löse bei der Hütte 100 Centner obiger, also 3löthiger Erze ein, so enthalten diese $3 \times 100 =$ $= 300$ Lothe $= 18$ M. 12 Loth Silber; hievon der 5 pCt. Feuerabgang $=$ 15 Loth, bleibt 17 M. 13 Loth.
Die Mark à 24 fl. C. M., beträgt die

Vergütung	427 fl.	30 kr.	C. M.
hievon die Schmelzkosten à 1 fl. 30 kr.	150 »	— »	»
bleibt .	249 »	45 »	»
hievon ferner die 10 pCt. Frohne mit	27 »	45 »	»
verbleibt reine Gebühr	249 »	45 »	»

Wollte man nun diese Erze auf 60 pCt. concentri-

ren, und diese Concentration mit 6 pCt. Abgang, wie oben, bewirken, so würde der Centner der concentrirten Erze 4 1/2 Loth Silber, und 60 Centner demnach = 60 × 4.5 = 270 Lothe oder 16 M. 14 Loth Silber enthalten; der 5 pCt. Feuerabgang mit 13 Loth 2 Quintel, würde zurückbleiben 16 M. 2 Quintel.

Diese beträgt à 24 fl.	384 fl.	45 kr.	C. M.
hievon die Schmelzkosten à 2 fl. per Centner	120 »	— »	»
würde zurücklassen	264 fl.	45 kr.	C. M.
hievon die Frohne mit 10 pCt. oder	26 »	24 1/2 kr.	C. M.
verbleibt reine Gebühr	238 fl.	20 1/2 kr.	C. M.

also 11 fl. 35 kr. C. M. weniger, als man für 100 Centner 3löthige Erze erhalten würde.

Hat dagegen der Bergmann reiche Erze, so gewinnt er, wenn er denselben mehrere pCt. Sand oder taubes Gestein zumengt, wie aus dem Folgenden ersichtlich ist.

Man nehme an, er habe 100 Centner 7löthige Erze; diese enthalten demnach 7 × 100 = 700 oder 43 M. 12 L. Silber, so beträgt der Feuerabgang à 5 pCt. 35 Loth, es bleibt demnach 41 M. 9 Loth.

Die Mark à 24 fl., beträgt	987 fl.	30 kr.	C. M.
hievon die Schmelzkosten à 3 fl. 3 kr. mit	305 »	— »	»
bleibt	682 fl.	30 kr.	C. M.
hievon die 10 pCt. Frohne mit . .	68 »	15 »	»
verbleibt reine Gebühr	614 fl.	15 kr.	C. M.

Theilt man diesen 100 Centnern Erz 20 Centner taubes Gestein zu, so werden die 120 Centner auch obige Silbermenge im Werthe von 987 fl. 30 kr. enthalten; da sie aber durch diese Beimengung unter 6 Loth herabfallen, so bezahlt der Centner nur 2 fl., also 240 fl. C. M. Schmelzkosten, es werden daher statt

682 fl. 30 kr.	747 »	30 kr.	C. M.

zurückbleiben; von diesen die Frohne
mit . . . . . 74 fl. 46 kr. C. M.
bleibt reine Gebühr . . . . . 672 » 44 » »
also 58 fl. 29 kr. C. M. mehr, als wenn der Bergmann das reine 7löthige Erz eingelöst hätte.

Es geht hieraus deutlich hervor, dafs die Amalgamation und das Einlösungssystem derselben für den Bergbau sehr vortheilhaft sey, indem der Berg durch dieselbe bei der Einlösung von 100 Centner 2 bis 4 1/4löthigen Erzen . . . . . 33 fl. 20 kr. C. M.
von 4 1/2 bis 6 1/4löthigen Erzen . . 83 » 20 » »
bei 100 Centner 6 1/2 bis höchstlöthigen Erzen aber . . . . . 183 » 20 » »
blofs zu Folge der geringern Amalgamirkosten gegen die Schmelzkosten erspare, und überdiefs durch zweckmäfsige Concentration noch mehr gewinnen kann.

Diese Verhältnisse allein sind schon geeignet, der Amalgamation das Wort zu führen; denn die 2 pCt. Poch- und Mahlabgänge werden durch die geringern Amalgamirkosten vollständig ersetzt, wie aus Folgendem hervorgeht.

Eine Gewerkschaft löse 400 Centner 4löthige Erze ein, so mufs dieselbe bei der Schmelzhütte 600 fl. C. M. Schmelzkosten bezahlen, bei der Amalgamirhütte bezahlt dieselbe 466 fl. 40 kr., also 133 fl. 20 kr. weniger, dagegen werden derselben 2 Mark Silber weniger vergütet, weil diese beim Pochen und Mahlen der Erze verloren gingen; wird der Werth dieses Silbers mit 48 fl. von obigen 133 fl. 20 kr. in Abzug gebracht, so bleiben der Gewerkschaft noch 85 fl. 20 kr. C. M. zu Guten, was dem Werthe von 3 1/2 Mark Silber entspricht; würde demnach der Mahl- und Pochabgang 5 1/2 pCt. übersteigen, so würde erst die Amalgamation gegen die Verbleiung im Nachtheile stehen, was aber bei weniger Achtsamkeit nicht möglich ist.

Die Abgänge der Concentration werden durch die bewirkte Verminderung der Schmelzkosten wieder ersetzt; wo dieſs nicht geschieht, findet keine Concentration Statt.

Die Poch-, Wasch- uud Mahlwerke erzeugen

a) trocken gepochtes Mehl,
b) gemahlenes Mehl,
c) Setzgängmehl,
d) Schliche, und
e) Schlamm.

Der Gehalt dieser Geschicke wechselt im Silber von 2 bis 10 Loth, der Durchschnittsgehalt beträgt aber 5 Loth. Eine Mark dieses Silbers enthält ein Denär Gold; hievon machen nur die gewerkschaftlichen Matheistollner Erze eine Ausnahme, indem ihr Goldgehalt in jeder Mark des Silbers 4 Denär beträgt; doch diese Gewerkschaft bringt jährlich nur 150 bis 200 Centner 5löthigen Mehls in die Einlösung. Die gesammte Einlösung beträgt 20 bis 21000 Centner Mehl im Durchschnittsgehalte von 5 Loth.

Das Amalgamirwerk übernimmt diese Mehle nach dem Gewicht ohne Aufschlag und ohne irgend ein Remedium, es bestimmt den Nässegehalt durch vorsichtiges Abtrocknen des Mehles auf einer kupfernen Pfanne nach gewöhnlicher und allgemein üblicher Weise, und führt denselben so wie das trockne Gewicht des Mehles sichtlich im Anschlage an.

Die Probe wird ohne Zusatz von Bleioxyd und Boraxglas, sondern bloſs mit Zusatz von 8 Schören Blei vorgenommen; bei Differenzen, welche 1 Loth nicht übersteigen, werden die Proben buchhälterisch ausgeglichen.

Die Vergütung erfolgt nach Abschlag des 5 pCtigen Feuerabganges und des 10 pCtigen Frohnabzuges

ohne Berücksichtigung der Denäre und des Goldgehaltes.

Die Amalgamations-Gebäude sind eine halbe Stunde von dem Berge entfernt, und erst seit acht Jahren vollständig hergestellt; sie bestehen

a) aus dem Erz- oder Mehlkram,
b) der Rosthütte,
c) den Mühlen,
d) dem Quicksaal,
e) dem Preſszimmer,
f) dem Probiergaaden,
g) der Materialkammer,
h) den Beamtenswohnungen, und
i) der Schmiede.

Die eigentlichen Manipulations-Gebäude folgen in jener Reihenfolge auf einander, in welcher die ganze Manipulation selbst fortschreitet; und ihre Einrichtung muſs zweckmäſsig genannt werden. Reinlichkeit und Ordnung herrscht überall.

Die Arany-Idkaer Erze, und daher auch ihre Mehle, enthalten prismatoidischen Antimonglanz (Antimonsulfurid, Grauspiesglanzerz, *W.*), wie das äuſsere Ansehen und das chemische Verhalten deutlich beweiset, indem sie sämmtlich vor dem Löthrohre einen weiſsen Dampf verbreiten, welcher die Kohle weiſs beschlägt; einige enthalten Arsenikkies, dessen Arsenikgehalt sich durch den Knoblauchgeruch ausspricht. Die meisten enthalten zugleich Blei, und zwar als hexaëdrischen Bleiglanz (Bleisulfurid), welches sowohl durch die naturhistorischen Eigenschaften als auch durch die Erhaltung eines bleiischen Amalgams erwiesen wird, welches man bei stärkerer Röstung und gröſserem Salzzuschlage stets erhält. Die Erze enthalten ferner Spuren von Kupferkies, doch beträgt der Kupfergehalt selten ein halb Procent,

und kann nur auf nassem Wege nachgewiesen werden; das erzeugte Amalgam enthält den ganzen Kupfergehalt der Erze, indem die Rückstände keine Spur desselben enthalten. Endlich enthalten die Erze nebst Spuren von Gold vorzüglich rhomboëdrischen Quarz (Kieselerde oder Siliciumoxyd) und Eisenkies (Eisenpersulfurid).

1000 Centner Mehl enthalten gewöhnlich eine Mark Gold; von diesem geht der vierte Theil in das Amalgam, wird aber nicht vergütet, der andere Theil bleibt in den Rückständen.

Neuere Versuche haben zwar in Niederungarn ausser allen Zweifel gesetzt, dafs das Gold aus den kiesigen und bleiischen Pochgängen durch die Zeller Goldmühle gewonnen werden kann, und 1000 Centner Pochgänge, welche sonst zu Kremnitz mittelst dem Sichertroge 8, höchstens 10 Loth Gold lieferten, geben nun 14 bis 18 Loth desselben; es ist daher auch wahrscheinlich, dafs die Arany-Idkaer Mehle, welche in 1000 Centner 16 Loth Gold enthalten, in dieser Mühle ebenfalls Gold liefern werden, um so mehr, da nicht zu zweifeln ist, dafs das Gold in denselben wirklich blofs gediegen vorkomme, indem es bei einigen von dem Herrn Werksverwalter *Tutschnag* eingeleiteten Versuchen als Mühlgold dargestellt und amalgamirt wurde; es ist nun zu versuchen, ob die Mehle vor der Verröstung, wie dieſs zu Kremnitz und Schemnitz bereits geschieht, oder nach erfolgter Entsilberung durch die Goldmühle geleitet werden sollen. Fallen die Versuche, wie nicht zu zweifeln, glücklich aus, so wird der Berg zu Arany-Idka jährlich um 7660 fl. C. M. mehr Nutzen ausweisen, uud das Haupthindernifs, welches der allgemeinen Einführung der Amalgamation im Wege stand, wird behoben.

Die Amalgamation der Erze zu Arany-Idka zerfällt in folgende Arbeiten:

a) das Beschicken der Erze,
b) » Rösten der Beschickung,
c) » Abreutern des Rostes,
d) » Mahlen desselben,
e) » Füllen der Fässer und das Anquicken,
f) » Probenehmen,
g) » Verdünnen des Breies,
h) » Ablassen des Amalgams,
i) » Durchseihen desselben,
k) » Auspressen desselben,
l) » Ausglühen,
m) » Schmelzen des Glühsilbers,
n) » Weifssieden.

a) Das Beschicken der Erze.

Die Beschickung hat den Zweck, immer einen gleichen Silbergehalt der zur Amalgamation bestimmten Mehle zu bewirken, und sie mit der zu ihrer vollständigen Zerlegung nöthigen Salzmenge zu vermischen.

Eine Gleichförmigkeit des Silbergehaltes ist in der currenten Manipulation nöthig, weil nach der Silbermenge die Quecksilbermenge bestimmt wird, welche bei einem ungleichen Silbergehalte bald vermehrt und bald vermindert werden müfste, und daher leicht Irrungen und ungleichförmige Resultate bewirken würde.

Der Beschickungsgehalt richtet sich nach dem Durchschnittsgehalt der eingelösten Mehle, dieser beträgt, wie oben gesagt wurde, 5 Loth, welchen Gehalt daher auch die Beschickung erhält. Dafs ein gröfserer Gehalt der Beschickung vortheilhafter seyn mufs, ist klar, wenn man bedenkt, dafs die Amalgamirrückstände immer einen gleichen Gehalt haben, daher bei reicherer Beschickung die Abgänge geringer ausfallen müssen. Dafs aber die Beschickung 7- bis 8löthig seyn müsse, wie *Berzelius*

anführt, ist irrig, indem man eben so gut 2- als 20löthige Erze amalgamiren kann, wenn man eine verhältnifsmässig grofse Quecksilbermenge zutheilt, für jede 5 Lothe Silber sind 50 Pfunde Quecksilber erforderlich; man kann zwar mit geringern Mengen Quecksilber auslangen, aber es ist nicht rathsam, damit zu sparen, um so mehr, da es der currenten Manipulation nicht lange entzogen wird.

In der ältern Zeit betrachtete man einen 16- bis 20pfündigen Lechgehalt der Beschickung für die Amalgamation unentbehrlich, doch die vortheilhafte Amalgamation der Schwarzkupfer, welche höchstens 1 per Cent Schwefel enthalten, die zu Arany-Idka gemachte Erfahrung, welcher zu Folge auch ganz dürre Erze vollständig entsilbert werden können, beweisen die Unrichtigkeit dieser Ansicht, daher man auch zu Arany-Idka blofs den Silbergehalt, nicht aber den Schwefel- oder Lechgehalt der Beschickung beachtet, obwohl derselbe gewöhnlich zu Folge der Beschaffenheit der Erze 10 pCt. beträgt. Den gattirten Mehlen theilt man 10 pCt. Minutiensalz und 2 pCt. Pfannenstein zu; ersteres bezieht man aus der Marmorosch gegen eine Bezahlung von 12 kr. C. M. per Centner und 52 kr. Fuhrlohn, daher dem Werke der Centner Salz 1 fl. 4 kr. C. M. kostet, den Pfannenstein bezieht das Werk von der Saline zu Soovar.

Die Nothwendigkeit des Salzes hat sich auch hier erwiesen. Die Menge desselben hängt von der Lechmenge der Erze ab, und kann, wie später gezeigt wird, vermindert werden, wenn man die Mehle früher abschwefelt, und ihnen dann erst das Salz zutheilt, oder wenn man dürre, das ist schwefelarme Erze zu amalgamiren hat, welche eben so wie das Schwarzkupfer mit 6 pCt. Salz eben so gute Resultate liefern, als die kiesigen oder dürren Erze mit 12 pCt.

Die Gattirung der Mehle geschieht schon in dem Erzkrame, die Beschickung derselben mit Salz aber in dem Beschickungsgraben für jede Ofenladung insbesondere, indem man 350 Pf. Trockengewicht der Mehle mit 35 Pf. Minutiensalz und 7 Pf. Pfannenstein innigst mengt. Die vier Vormesser erhalten für das Abwägen eines jeden Centners Erz $^1/_4$ kr., und für das Mengen der Beschickung eben so viel.

b) Das Rösten.

Diese Arbeit ist für die Amalgamation die wichtigste, denn die Resultate hängen ganz von derselben ab.

Sie findet in den bekannten Flammenröstöfen Statt, welche aus feuerfestem Sandstein gebaut sind. Die Breite des Herdes von der Eintragsöffnung bis zur Hinterwand beträgt 8 Fuſs, die Länge an der Hinterwand 6 Fuſs. Die Höhe des Gewölbes ist 21 Zoll, die Länge der Schürgasse ist gleich der Breite des Herdes, übrigens 16 Zoll hoch und 15 Zoll breit. Der Fuchs- oder der Flammenzug ist 10 Zoll vom Herdpflaster entfernt, 30 Zoll lang und 6 Zoll hoch.

Die Arbeitsthür hat eine Breite von 36 Zoll, und eine Höhe von 18 Zoll; sie ist während der Operation immer offen, und der Arbeiter rührt mittelst einem eisernen Rechen die Masse unausgesetzt, so wie er sie auch von Zeit zu Zeit mittelst einer Schaufel wendet, wodurch ihre vollständige Verröstung sehr befördert wird. Die Menge des beschickten Erzmehles, welches auf ein Mal eingetragen wird, beträgt 392 Pf., und besteht, wie schon gesagt wurde, aus 350 Pf. Erzmehl, 35 Pf. Minutiensalz, und 7 Pf. Pfannenstein.

Man unterscheidet vier Perioden der Röstung:

a) die Abtrocknungsperiode,

b) » Anzündperiode,

c) die Abschwefelungsperiode, und endlich

d) » Gaarröstperiode.

Die Abtrocknungsperiode dauert nur einige Minuten, denn da der Ofen bereits heifs ist, wenn die Beschickung eingetragen wird, und diese nicht sehr nafs ist, so trocknet sie bald aus, und das Salz verknistert.

Ist beides erfolgt, so beginnt der Arbeiter zu heitzen, und steigert die Temperatur so lange, bis die ganze Masse in einen lichtroth glühenden Zustand versetzt (angezündet) wird, welches in $^5/_4$ Stunden erfolgt, daher der Arbeiter auf die Stunde angewiesen ist; nach dieser Zeit hört das Heitzen auf, und es beginnt die Abschwefelungsperiode, obwohl auch schon während der Anzündperiode eine bedeutende Menge Schwefel oxydirt wird; der Arbeiter mufs nun die glühende und heftig dampfende Masse fleifsig rühren und wenden. Während dieser Periode strömt die atmosphärische Luft nicht nur durch die Arbeitsthür, sondern auch durch den Rost (auf welchem nun kein Brennmaterial liegt, durch welches sie zerlegt werden könnte), über den Herd, wodurch die Oxydation des Schwefels und der Metalle sehr begünstigt wird. Die Abschwefelungsperiode dauert vier Stunden, nach welcher Zeit der Ofen bedeutend abgekühlt, und das Mehl ganz dunkel geworden ist.

Das Mehl verbreitet nun einen schwachen Geruch nach Chlor, dagegen es in der Anzündperiode und in den zwei ersten Stunden der Abschwefelungsperiode einen ausgezeichneten Geruch nach schwefeliger Säure verbreitet, welche sich wirklich in dieser Epoche in bedeutender Menge entwickelt.

Wird das abgeschwefelte Mehl mit verdünnter und erwärmter Chlorwasserstoffsäure übergossen, so entwickelt sich keine Spur Schwefelwasserstoffgas, welches auf eine vollständige Zerlegung der Sulfuride deutet.

Der Rost besitzt einen ausgezeichneten metallischen Geschmack, und enthält bedeutende Mengen von Eisen- und Kupfervitriol. Mit Ammoniak digerirt färbte sich die Flüssigkeit blau, und gab mit Salpetersäure neutralisirt einen deutlichen weifsen Niederschlag, welcher im Sonnenlichte schwarz wurde; als das abgeschwefelte Mehl wiederholt mit Ammoniak digerirt wurde, bis sich dieses nicht mehr färbte, und auch mit Salpetersäure neutralisirt keinen Niederschlag gab, lieferte es nach der gewöhnlichen Probe noch 2 Loth, 2 Quintchen Silber, woraus hervorgeht, dafs das Silber sich in demselben nur zum Theil als Silber-Chlorid (Hornsilber) befinde.

Die Beendigung der Abschwefelungsperiode wird nur durch die Stunde, nicht aber durch irgend ein empirisches Kennzeichen angedeutet, und das Resultat derselben mufs um so besser seyn, je höher die Temperatur ist, welche der Ofen während der Anzündungsperiode erhalten hat.

Ist die für die Abschwefelungsperiode bestimmte Zeit verflossen, so beginnt der Arbeiter neuerdings zu heitzen, und unterhält durch 1 $^1/_4$ Stunde eine hohe Temperatur, welche Zeitperiode die Gaarröstperiode genannt wird.

Während dieser Periode verbreiten die Erzmehle einen ausgezeichneten Chlorgeruch; werden dieselben auf gleiche Weise behandelt, wie die abgeschwefelten, so zieht das reine Ammoniak weniger Hornsilber heraus, und es wird daher sehr wahrscheinlich, dafs ein Theil des Silber-Chlorids bei dieser erhöhten Temperatur durch Einwirkung der Metalloxyde zerlegt werde.

Die gaargerösteten Mehle werden in eine kupferne, auf einem eisernen Karren ruhende Pfanne, welche unter die Arbeitsthür gefahren wird, gesammelt, und auf den Kühlplatz, welcher an der Rückseite der Öfen an-

gebracht ist, gestürzt; sie haben eine braunrothe Farbe, ein geringeres specifisches und absolutes Gewicht, ihr Volumen dagegen ist vergrösert.

Die Röstung wird durch vier Arbeiter geleitet, welche sich in zwölfstündigen Schichten abwechseln; in jeder Schicht arbeitet ein Vorröster und ein Nachröster, der erstere erhält 24 kr., der zweite aber 21 kr. C. M. per Schicht. Die Zahl der Röstöfen ist 6, die sämmtliche Zahl der Vorröster demnach 12, und eben so grofs jene der Nachröster. Alle 24 Stunden werden in sämmtlichen Röstöfen 77 Centner und 40 Pfund Erzmehle mit der oben angeführten Salzmenge vermengt verröstet. Die Menge des Flugstaubes ist sehr gering, und der Gehalt desselben nur 2 bis 3 Loth per Centner. Die Theorie dieses Röstprocesses ist folgende:

Zuerst entweicht das Wasser. Hat das Erz jene Temperatur erhalten, welche zur Verflüchtigung des Schwefels nöthig ist, so fängt dieser an zu brennen, und es bildet sich schwefelige Säure. Das Kochsalz wird während dieser Zeit nicht zerlegt, sondern befördert nur die Oxydation durch die galvanische Thätigkeit, die es befördert; es bilden sich zugleich schwefelsaure Metallsalze, namentlich schwefelsaures Eisenoxydul, schwefelsaures Kupfer, Mangan und Zinkoxyd. Erst bei der Gaarröstperiode werden die gebildeten schwefelsauren Metallsalze, vorzüglich das schwefelsaure Eisen- und Kupferoxyd, zerlegt, und die sich aus denselben ausscheidende Schwefelsäure, in Verbindung des Wasserdampfes der atmosphärischen Luft, welche über den Herd streicht, zersetzt nun das Kochsalz, indem der Sauerstoff des Wassers an das Natrium, der Wasserstoff an das Chlor, die Schwefelsäure aber an das gebildete Natriumoxyd tritt. Die Chlorwasserstoffsäure wird durch das Manganoxyd, so wie auch durch die andern Metall-

oxyde zerlegt, entweicht zum Theil als solche, zum Theil als Chlor.

Die Menge der Chloride im Roste vermindert sich mit der Temperatur in der Gaarröstperiode, und verschwindet endlich ganz, wenn diese anhaltend und stark genug war, indem sich manche als Chloride verflüchtigen, manche aber, so z. B. das Silber- und Kupfer-Chlorid, zerlegt werden.

Die abgeschwefelten Mehle enthalten das Silber zum Theil metallisch, zum Theil höchst wahrscheinlich als schwefelsaures Silber, sie enthalten viel schwefelsaure Salze, und beinahe das ganze noch unzerlegte Natrium-Chlorid; bringt man sie ins Wasser, so verwandelt sich das schwefelsaure Silberoxyd in Silber-Chlorid, welches demnach vom Ammoniak gelöst wird.

Die Gaarröstperiode bewirkt nur die Zerlegung des schwefelsauren Eisen-, und zum Theil auch jene des schwefelsauren Kupferoxyds; da aber während derselben ein Theil des Silbers verflüchtiget, und durch eine partielle Zusammensinterung der Masse ein Theil desselben eingeschlossen wird, so wird dieselbe, vorzüglich wenn die Temperatur zu hoch gesteigert wird, mehr schädlich als nützlich; sie ist übrigens überflüssig, weil man diese Salze, wenn sie ja bei der Amalgamation nachtheilig wirken sollten, zweckmäfsiger und vollständiger durch Auslaugen entfernen, dadurch eine gröfsere Reinheit des Amalgams bezwecken, und überdiefs den kostspieligen Brennmaterialsaufwand der Gaarröstperiode ersparen könnte.

Dafs die Gaarröstperiode überflüssig ist, wird auch durch Erfahrung bestätiget, denn die Analyse der entschwefelten und der gaargerösteten Mehle hat aufser allen Zweifel gesetzt, dafs die Menge des Silber-Chlorids in dem letztern bedeutend geringer als in

dem erstern ist, die Ansicht von *Gmelin*, *Berzelius*, *Karsten*, *Lampadius* und *Rivero* daher nicht bestätigt werde, indem diese das Silber in dem Roste als Silber-Chlorid enthaltend annehmen; nachdem ferner die entschwefelten Mehle gar keine Spur von Sulfuriden enthalten, so wurde ein Versuch eingeleitet, die blofs entschwefelten Erze zu amalgamiren.

Der Versuch wurde in einem kleinen Fasse und mit 3 Centner der Erzmehle vorgenommen, und die Rückstände nur 3 Denär reichhältig gefunden. Der Versuch wurde nochmals im kleinen Fasse, und endlich mit 12 Centner in einem grofsen Fasse vorgenommen. Die Resultate blieben sich gleich, wie der folgende Ausweis zeigt.

A u s w e i s

der Ausfälle von abgeführten Amalgamations-Versuchen mit blofser Abschwefelung, also ohne Gaarröstung der Erze.

	Gewicht d. verquickten Mehls		Zugesetzt				Zurück erhalten						Ergibt sich Abgang								Silbergehalt d. Rückstände.			Silber, feines.		
			Queck-silber.		Eisen-kugeln		Amal-gam.		Queck-silber.		Ei-sen-zaine.		am Queck-silber im Ganz.		oder per Cent-ner Mehl.		Ei-sen-zaine im Ganz.		oder per Cent-ner Mehl.							
	Ctr.	Pf.	Pf.	Lth.	Pf.	Lth.	Pf.	Lth.	Pf.	Lth.	Pf.	Lth.	Pf.	Lth.	Pf.	Lth.	Pf.	Lth.	Pf.	Lth.	Qtl.	Den.		Lth.	Qtl.	Den.
In einem gros-sen Fasse . .	12	—	400	—	100	—	32	9	398	14	97	—	1	18	—	4	3	—	—	8	1	—		7	—	2

Bei dem Versuche im Grofsen, bei welchem zugleich auf die Menge des verbrauchten Quecksilbers Rücksicht genommen wurde, zeigten sich an diesem grofse Abgänge, welches aber blofs dem Umstande zugeschrieben werden mufs, dafs die Menge des Amalgams gering war, und dafs das Ausglühen desselben in gläsernen Retorten Statt fand.

Denn glüht man in einem Apparate, er mag seyn, welcher er wolle, ein Mal 70 Loth, das zweite Mal aber 70 Mark Amalgam aus, so wird der Abgang an Quecksilber bei gleichen Apparaten auch jedes Mal gleich seyn. Dieser Abgang betrage bei 70 Loth Amalgam 1 Loth, so ist dieses Loth $^1/_{60}$ des Quecksilbers, indem 70 Loth Amalgam 60 Loth Quecksilber enthalten; bei 70 Mark Amalgam wird er aber auch nur 1 Loth, also $^1/_{960}$ Theil des Quecksilbers im Amalgam betragen. Die gröfseren Abgänge an Quecksilber, welche demnach aus dem vorliegenden Ausweise dieses Versuches hervorgehen, dürfen gegen die günstigen Resultate desselben in Beziehung auf das Silber nicht als wichtig betrachtet werden, da es nicht zu zweifeln ist, dafs wenn mehrere hundert Mark des erzeugten Amalgams auf ein Mal werden ausgeglüht werden, dieser Abgang jenem der currenten Manipulation gleich seyn wird.

Wirklich ist auch bei näherer Untersuchung dieses Gegenstandes kein Grund ersichtlich, warum dieser Abgang wirklich vermehrt werden sollte, denn die gröfsere Menge von schwefelsauren Salzen kann wohl einen grösseren Verbrauch des Eisens, durch welches das Quecksilber vor jeder Oxydation geschützt wird, nicht aber die Oxydation des Quecksilbers selbst bedingen. Will man aber annehmen, dafs diese Salze das Zerschlagen des Quecksilbers, und daher auch den Abgang desselben vermehren, so darf man nicht übersehen, dafs in

diesem Falle auch die Rückstände hältiger an Silber ausfallen müfsten, da das zerschlagene Quecksilber silberhältig wäre, was die Resultate der Versuche widerlegen. Überdiefs könnte man, wenn diefs wirklich der Fall seyn sollte, die Salze durch Auslaugen entfernen, und durch Krystallisation aus denselben den gröfsten Theil des unzerlegten Salzes erhalten.

Sämmtliche Metall-Sulfuride und Arsenide der Beschickung werden durch die Röstung oxydirt. Oxydation ist daher die Hauptwirkung derselben, sie wird durch das Salz befördert, und blofs defshalb, nicht aber wegen der Bildung des Silber-Chlorids ist dessen Zutheilung nöthig.

Die Oxydation ist aber nur während der Abschwefelungsperiode möglich, weil bei der jetzigen Construction der Öfen nur während derselben reine atmosphärische Luft über den Herd streicht; soll die Oxydation auch während der Anzündperiode erfolgen, so mufs der Röstofen eine zweckmäfsige Veränderung durch Vorrichtung eines nach der ganzen Breite des Herdes angebrachten 6 bis 8″ breiten Canals erhalten, wie aus Figur 27, 28 und 29 ersichtlich ist. Der Luftcanal wird unter die aus gufseisernen Platten bestehende Herdsohle geleitet, wodurch die einströmende Luft erwärmt, und der Herd nicht abgekühlt wird. Die Mafse des Ofens können ganz die oben angeführten bleiben. Die vollständige Röstung der Erzmehle erfolgt in einem solchen Ofen in 2 Stunden, dagegen dieselbe in den gewöhnlichen in $6\frac{1}{2}$ Stunden, und mit Beseitigung der Gaarröstung in $5\frac{1}{4}$ Stunden erfolgt.

100 Centner Erzmehle bedürfen in dem gewöhnlichen Ofen 4 Kubikklafter Ruthenbürteln und $4\frac{3}{4}$ Klafter Röstholz. In den Fig. 27, 28 und 29 verzeichneten Ofen wird man, wie aus den Resultaten desselben im Kleinen

geschlossen werden kann, höchstens von jeder Holzart 3 Klafter bedürfen, und daher fast ein Drittel Brennmaterial ersparen; eine Unterbrechung der Feuerung und eine nachtheilige Abkühlung des Ofens ist, bei der angeführten Construction desselben, überflüssig.

Wird durch eine vorläufige Verröstung der Erzmehle der Schwefelgehalt derselben vermindert, so kann man auch mit dem Salzzuschlag bis 5 pCt. herabgehen, weil dasselbe nun auch weniger zerlegt werden kann; es ganz zu beseitigen, ist nicht rathsam, weil eine vollständige Oxydation mancher natürlicher Verbindungen nur durch Beihülfe von Salz möglich wird. Dieses wird bei der Schwarzkupfer-Amalgamation bestätigt, welche mit 5 pCt. Salz verröstet und amalgamirt, vollständig entsilbert werden kann, indem die Rückstände auch nur 3 Denär, höchstens 1 Quintchen Silber enthalten.

Das Gold ist in dem Roste nicht als Aurat enthalten, welches sich im Wasser auflösen, und goldfreie Rückstände zurücklassen müfste, was durch eine Untersuchung nicht bestätiget wurde; aus gleichem Grunde kann das Gold nicht im Roste als Chlorid enthalten seyn. Es im Roste als Oxyd befindlich zu betrachten, ist nicht zulässig, da bei der Temperatur der Gaarröstperiode dessen Zerlegung erfolgen müfste, und der Rost, mit Wasser und mit Salzsäure wiederholt behandelt, sich goldhältig erwies, da doch die Salzsäure das Goldoxyd aufgelöst hätte. Eine unbekannte Verbindung des Goldes in dem Roste anzunehmen, ist durch keine Erfahrung begründet; da aber das Silber in demselben im metallischen Zustande zum Theil enthalten ist, so dürfte die Annahme, dafs das Gold auch in solchem Zustande in demselben befindlich ist, die gröfste Wahrscheinlichkeit für sich haben, und es bleibt daher zu untersuchen übrig, warum das im Roste befindliche Gold nicht von

dem Quecksilber aufgenommen werde. Diese Erscheinung kann durch mehrere Umstände begründet werden:

a) durch die geringe Verwandtschaft des Goldes zum silberhältigen Quecksilber,

b) durch eine zu geringe Menge desselben,

c) durch eine unzweckmäfsige Vorrichtung.

Dafs das Gold zu dem reinen Quecksilber eine grössere Verwandtschaft als zu dem silberhältigen Quecksilber besitzt, geht zum Theil aus dem Umstande hervor, dafs dasselbe aus der Verbindung mit dem Quecksilber durch Silber gefällt wird. Denn man nehme 1 Loth Gold, und bringe es in 100 Pfund Quecksilber, so erhält man, wenn man das Quecksilber durch Leder preſst, bei 16 Grad *R.* gar kein Amalgam; ein Beweis, dafs das Gold vollständig aufgelöst ist. Mengt man nun 8 Loth fein zertheiltes Silber hinzu, und preſst, wenn sich dieses vollständig amalgamirt hat, das Quecksilber abermals durch das Leder, so erhält man 56 $^1/_2$ Loth Amalgam, welches ausgeglüht 8 $^1/_2$ Loth Silber, und wenn dieses in Salpetersäure gelöst wird, 1 Loth Gold liefert; man erhält also das ganze Gold, dagegen von dem Silber $^1/_2$ Loth im Quecksilber zurückbleibt. Aus diesem Versuche scheint hervorzugehen, dafs man die Amalgamation des Goldes nicht mit jener des Silbers zugleich vornehmen solle.

In Beziehung auf die Silbermenge hat die Erfahrung gelehrt, dafs die Entsilberung der Erze mittelst Amalgamation nicht unter 3 Denär per Centner erfolge, welchen Gehalt daher bei zweckmäfsig geleiteter Operation die Amalgamirrückstände immer zeigen. Die Erze enthalten in einer Mark des Silbers 1 Denär in Gold; eine Mark Silber ist aber in 3 Centner des Erzmehles enthalten, welche demnach 1 Denär Gold enthalten. Die Menge ist freilich sehr gering, aber 1000 Centner Pochgänge

enthalten in Salzburg nur 5 Loth oder 80 Denär Gold, und doch werden 4 Lothe des Goldes mittelst der Goldmühlen gewonnen. Es ist kein Grund vorhanden, anzunehmen, dafs das Gold in Salzburg andere Eigenschaften besitzen soll, als jenes zu Arany-Idka, wo in 1000 Centner Erzmehlen 16 Loth Gold enthalten sind; man kann also diese Menge nicht gering nennen, und darf derselben nicht die Ursache zuschreiben, da in Salzburg geringere Mengen wirklich ausgebracht werden, und dasselbe bei gleichen Goldmengen zu Kremnitz und Schemnitz wirklich geschieht.

Im Salzburgischen und in Niederungarn werden aber die Pochgänge nicht gemahlen, sondern gepocht, dagegen die gerösteten Mehle zu Arany-Idka gemahlen werden; sollte vielleicht dieser Umstand auf die Goldgewinnung nachtheilig wirken? Die Amalgamation findet nicht in den *Born*'schen horizontalen Fässern, sondern in den Quickmühlen Statt, in welchen die göldischen Zeuge durch eine Quecksilberlage getrieben werden; weder das Quecksilber noch die Erze enthalten gediegenes Silber, und das erhaltene Gold enthält nur so viel von demselben, als das natürliche Gold enthält. Sollte dieses abweichende Verfahren und der Mangel an Silber zur Aufnahme des Goldes beitragen? Wahrscheinlich sind diese Umstände von gröfserem Belange, als man bis jetzt gedacht het, und da darüber Versuche baldigst angestellt werden dürften, so ist zu erwarten, dafs dieselben dieses Dunkel vollständig aufklären werden.

c) Das Absieben oder Abreutern der Graupen.

Wenn die Röstmanipulation in den bestehenden Röstöfen noch so vorsichtig geleitet wird, so ist ein Zusammenbacken des Mehls an einzelnen Stellen doch unver-

meidlich. Diese zusammengebackenen Massen, Graupeln genannt, enthalten oft rohe Erzmehle eingeschlossen, und vermehren daher den Gehalt der Rückstände, weil sie durch Quecksilber nicht entsilbert werden können, man hat es daher für zweckmäfsig erkannt, dieselben abzusondern, sie zu schroten, mit 2 pCt. Salz zu versetzen, und neuerdings zu verrösten; gewöhnlich geschieht diefs am Samstage, wo alle durch die Woche abgefallenen Graupeln verröstet werden.

Die Reutermaschine besteht aus einem unter 7 bis 8 Grad geneigten, an der schmalen und geneigten Seite offenen, an den andern Seiten mit einem 2 Zoll hohen Rande versehenen, 4 Fufs langen und 15 Zoll breiten Siebe, welches in einem geschlossenen, in 2 Theile getheilten Kasten mittelst Wasserkraft bewegt wird. Das offene Ende des Siebes ragt in jedem Stande in den vordern Kasten, in welchen demnach die Graupen fallen.

Der Rost wird mittelst eines trichterförmigen Kastens allmählich auf das Sieb gestürzt.

Gewöhnlich erhält man 15 bis 20 pCt. Graupeln, doch ist die Menge derselben um so gröfser, je gröfser die Temperatur in der Anzünd- und in der Gaarröstperiode, und je geringer der Fleifs des Arbeiters war.

Das Abreutern ist die Arbeit des Müllers, welcher auch die erhaltenen Graupen schrotet und mahlet. Er steht im Gedinge, wird per Centner rohen Gewicht mit 3 kr. C. M. bezahlt, wo er das Reutern, das Schroten und das Mahlen besorgen mufs.

d) Das Mahlen des abgesiebten Rostes.

Diese Arbeit geschieht in den gewöhnlichen Kornmühlen, welche aber keine Beuteln haben. Die Mühlsteine haben 42 Zoll im Durchmesser, und werden aus dem Hlinicker Steinbruche in der Nähe von Schemnitz

bezogen; ein Stück desselben kommt dem Werke auf 16 bis 24 fl. C. M., und dauert 3 bis 4 Monate als Laufer, und 6 bis 8 Wochen als Bodenstein. Arany-Idka besitzt drei solche Mahlmühlen, jede mit drei Gängen; zur Bedienung derselben sind neun Müllergesellen, unter welche als Bezahlung so viele Groschen vertheilt werden, als Centner rohes Gewicht an Erz verarbeitet wurde; sie sind aber dafür zugleich verpflichtet, das nöthige Leuchtmateriale und die Schmiere der Maschinen zu bestreiten.

Zur Übersicht sämmtlicher Mühlen ist überdiefs ein Mühlmeister mit einem Taglohn per 30 kr. C. M. angestellt.

Eine Mühle mahlt für jede Stunde 90 bis 120 Pfund. je nachdem die Wassermenge grofs ist.

Obwohl das Mahlen eine rein mechanische Sache ist, so übt sie doch einen wesentlichen Einflufs auf die Manipulations-Resultate.

Der Müller, welcher nach dem Centner gezahlt ist, kann durch die Erzeugung eines gröbern Mehls seinen Zweck geschwinder erreichen, und sich daher die Arbeit erleichtern, gibt aber dadurch Veranlassung zu reichern Rückständen; es dürfte daher zweckmäfsiger seyn, den Müller im Tagelohn zu halten, da es sehr schwierig ist, die Feinheit der Mehle genau zu untersuchen.

Bei der Vermahlung des Rostes wird kein Abgang verrechnet, obwohl ein solcher unvermeidlich ist. Die Ursache liegt in der schweren Bestimmbarkeit dieses Abganges; denn da der Rost während dem Mahlen befeuchtet werden mufs, um dessen Verstaubung zu hindern, da er überdiefs an der atmosphärischen Luft Wasser anzieht, so müfste man zur richtigen Bestimmung das Mehl neuerdings trocknen, was in der fortlaufenden Manipulation nicht möglich ist, daher man sich damit begnügt,

den Abgang sämmtlicher Manipulationen summarisch aufzuführen.

e) Das Anquicken.

Diese Operation findet in den von *Born*'schen horizontalen Fässern Statt, von welchen der Quicksaal acht grofse und ein kleines Probefafs besitzt. Die Fässer sind von Tannenholz, sie haben einen Durchmesser von 42″ und 5 Fufs Länge, äufserlich zwar eine bauchige Form, um die Befestigung der Reife zu gestatten, doch im Innern sind sie vollkommen cylinderförmig, um eine gleichförmige Vertheilung des Quecksilbers und der eisernen Kugeln zu bewirken, welche sich sonst nach dem Mittelpuncte drängen, und sie geschwinder zerstören würden.

Ein neues Fafs kostet dem Werke an Binderarbeit 8 fl., an Schmiedarbeit per Pfund 6 kr. C. M.; erhält der Schmied die Reife und Schrauben von einem verbrauchten Fasse, so erhält derselbe für das Beschlagen eines Fasses 4 fl. C. M.

Das überschlächtige Wasserrad, durch welches diese Fässer in Bewegung gesetzt werden, hat 36 Fufs im Durchmesser. An der Welle desselben befinden sich zwei Kammräder von 8 Fufs Durchmesser, deren Zähne, 72 an der Zahl, in die an beiden Seiten des Kammrades gelegenen, 4 Fufs im Durchmesser haltenden, Getriebe greifen, welche 36 Triebstäbe besitzen.

Die Achse der Quickfässer steht der Achse der Getriebe entgegen, und läfst sich mit der letztern durch eine verschiebbare eiserne Büchse verbinden, wodurch die Fässer in Gang gesetzt, durch Verschiebung dieser Büchsen aber sogleich wieder arretirt werden können. Zu Folge der mechanischen Construction der Kamm- und Getrieberäder machen die Fässer eine doppelte Zahl der Umdrehungen von jener des Wasserrades, gewöhnlich per Minute 18 bis 24 Umdrehungen.

Ein jedes Faſs erhält 12 Centner gemahlene Mehle, 1 Centner eiserne Kugeln, und 18 Kannen à 5 W. Maſs, also 90 Maſs heiſses Wasser, welches in einem hölzernen Bottiche gewärmt wird, in dessen Mitte ein eiserner Ofen angebracht ist.

Das Quecksilber im Gewichte von 4 Centner wird erst eine Stunde später eingetragen.

In den frühern Jahren hat man sich statt der eisernen Kugeln eiserner Schienen bedient; da man sich aber überzeugte, daſs die Fässer nur 50 Amalgamationen aushielten, wenn sie mit eisernen Schienen geladen wurden, und sie mit Kugeln 85 bis 95 Amalgamationen aushalten, so zieht man nun die letztern vor.

Das Füllen geschieht mittelst kupferner Trichter, und der Arbeiter hat dabei Zweierlei zu beachten:

a) daſs das Mehl, mit Wasser angemacht, keine Klumpen bilde,

b) daſs der Brei weder zu dick noch zu dünn ausfalle.

Das erstere verhindert er durch sorgfältiges Rühren in dem Momente der Füllung, das zweite wird zum Theil durch die Wassermenge bestimmt, doch erfordert die Beschaffenheit der Mehle manchmal eine Abweichung; 18 Kannen Wasser sind durchaus nothwendig. Nach einer Stunde, und ehe das Quecksilber eingefüllt wird, untersucht der Arbeiter den Brei, und setzt etwas Wasser zu, wenn er zu dick ist; ein zu dünner Brei hinterläſst immer reichere Rückstände, als ein dicker, daher der erste vorzüglich vermieden werden muſs.

Hat man das Quecksilber eingefüllt, so werden die Fässer geschlossen und durch 16 Stunden im Gange erhalten, indem man ihnen per Minute 18 bis 24 Umdrehungen gibt; eine geringe Zahl Umdrehungen veranlaſst reichere Rückstände, und eine gröſsere Zahl derselben

veranlafst viel zerschlagenes Quecksilber, beides mufs vermieden werden.

War die Röstung vollständig und nicht zu übertrieben, hatte das Mehl den gehörigen Grad der Feinheit, der Brei die zweckmäfsige Consistenz, war das Wasser heifs und die Bewegung der Fässer entsprechend, so ist in 16 Stunden die Amalgamation vollendet; eigentlich erfolgt dieselbe schon in 12 Stunden, und wird nur zur gröfseren Sicherheit 16 Stunden fortgesetzt.

Das Anquicken, so wie alle hiezu gehörigen Arbeiten, nämlich das Füllen der Fässer, das Verdünnen des Breies, das Ablassen des Amalgams und das Verwaschen der Rückstände, werden von 4 Anquickern und 4 Anquickjungen besorgt; von den erstern erhalten 2 täglich 23 kr., die 2 andern aber 21 kr., die letztern erhalten täglich 12 kr. C. M.

f) Probenahme.

Da es doch möglich wäre, dafs eine der oben angeführten Ursachen die vollständige Entsilberung der Mehle verhindert hätte, so wird nach erfolgter Arretirung der Fässer die Probe genommen.

Man hebt zu diesem Zwecke mittelst eines an einer Stange befestigten Bechers aus allen Theilen des Fasses etwas von dem Brei heraus, verwischt denselben in eigenen, mit eingebogenem Rande versehenen Schüsseln, aus welchen das Quecksilber nicht herausgeführt werden kann. Die erhaltene Trübe wird der Ruhe überlassen, das Wasser dann abgegossen, die Mehle aber auf eisernen Schaufeln getrocknet, auf einer erwärmten eisernen Platte fein gerieben, und auf gleiche Weise, wie das Erz, eingewogen.

g) Das Verdünnen des Breies.

Während der docimastischen Untersuchung der Rückstände werden die Fässer mit Wasser voll gefüllt, neuerdings in Bewegung gesetzt, und in derselben so lange erhalten, bis die Resultate der Probe bekannt sind.

Der Zweck dieser Operation ist die Abscheidung des amalgamhältigen Quecksilbers, welches gröfstentheils in dem Brei fein zertheilt enthalten ist, und welches sich aus dem verdünnten Breie zu Folge des grofsen spec. Gewichtes bald vollständig abscheidet.

Ist die Probe beendet, so wird das Amalgam abgelassen, die Rückstände mögen reich oder arm gefunden werden, nur werden die ersten, worunter man jene begreift, deren Gehalt an Silber 1 Quintchen 2 Denär übersteigt, aufgefangen, um sie in kleinen Parthien wieder den Erzen zuzutheilen; jene Rückstände, welche diesen Gehalt nicht erreichen, werden der wilden Fluth überlassen, obwohl 1000 Centner derselben 1 Mark Gold und 250 Lothe Silber enthalten.

Der Abgang an Silber, welcher durch den quintlichen Gehalt der Rückstände herbeigeführt wird, ist geringer als jener der Roharbeit bei der Silberhütte, denn er beträgt 5 pCt., während der letztere eigentlich 11.8 pCt. beträgt. Denn 100 Centner Erze und Schliche, deren Gehalt per Centner $^7/_8$ Loth ist, und welche demnach 87.5 Loth Silber enthalten, werden mit 16 pCt. Kalk und 120 pCt. Frischschlacke beschickt. Da diese Beschickung 25 Centner Leche liefert, so erhält man an Rohschlacken $16 + 120 + 75 = 211$ Centner. Diese enthalten aber per Centner 1 Denär, also 211 Denär $=$ 52 Quintchen oder 13 Loth Silber. Da die zugetheilten Frischschlacken per Centner 3 Denär, also 360 Denär oder 22.5 Lothe Silber enthielten, so hatte man eigentlich in der Vormafs $87.5 + 22.5 = 110$ Lothe Silber; von

diesen gingen aber 13 Loth in die Schlacke, welches den oben angeführten 11.8 pCt. gleich ist. Nun erleiden aber die erzeugten Leche noch einen Abgang an Silber bei den folgenden Manipulationen, wodurch deutlich wird, dafs die Eintränkarbeit der Amalgamation in Hinsicht auf die Silbergewinnung nachsteht.

Die Eintränkarbeit gewinnt aber $^{19}/_{20}$ des Goldes, welches die Amalgamation nicht darstellt. Da 1000 Centner der Erzmehle 16 Lothe Gold enthalten, so beträgt daher für jede 1000 Centner Erzmehle der Goldverlust 346 fl. 48 kr., um welchen Betrag demnach die Amalgamirkosten per 1000 Centner erhöht werden. Da aber für jede Mark Silber die Scheidkosten 1 fl. C. M. betragen, in den 1000 Centner Erzen aber 312 Mark und 8 Loth göldiges Silber enthalten ist, so müssen von obiger Summe 312 fl. 30 kr. C. M. in Abschlag gebracht werden, wonach der eigentliche Verlust für den Berg nur 346 fl. 48 kr. — 312 fl. 30 kr. = 34 fl. 18 kr. beträgt, was für jeden Centner des Erzes nur 2 kr. C. M. ausmacht. Gelingt es übrigens, durch die oben angedeuteten Versuche das Gold auch zu gewinnen, so wird auch dieser Verlust beseitigt; es geht aber aus dieser Darstellung zugleich hervor, dafs der Nutzen gröfser seyn wird, wenn man das Gold für sich, als wenn man es mit dem Silber verbunden darstellt, weil die Scheidkosten im letzten Falle den Goldwerth beinahe ganz aufheben.

h) Das Ablassen des Amalgams.

Jedes Fafs besitzt zu diesem Zwecke, dem Fülloche gegenüber, eine mit einem messingenen Zapfen verschliefsbare Öffnung von 1 Zoll im Durchmesser, mittelst welcher das Amalgam haltende Quecksilber in ein Gefäfs abgelassen werden kann; ist dieses geschehen, so werden die Rückstände in einen Bottich geleitet, in

welchem sich das noch in demselben befindliche amalgamhältige Quecksilber sammelt, dagegen das unhältige über den Rand des Gefäfses abfliefst.

Es wird nun von dem Schliche durch Waschen befreit, der letzte Antheil Wasser aber mittelst eines Schwamms weggenommen, und in reine Gefäfse gebracht, in welchen es abgewogen wird. Der Gewichtszugang, welchen das Quecksilber erfahren hat, ist gleich der rohen Silbermenge, welche in demselben enthalten ist. Das amalgamhältige Quecksilber wird nun in das Prefszimmer gebracht, während der weitern Bearbeitung des Amalgams werden die Fässer neu gefüllt, in jedes Fafs aber 2 Pfund Eisenkugeln zugetheilt, weil von den 100 Pfunden, welche man der ersten Manipulation zutheilte, diese Menge zu Folge der Manipulation wirklich consumirt wurde, übrigens nach der beschriebenen Weise verfahren, demnach alle 18 Stunden $12 \times 8 = 96$ Centner Erzmehle verquickt werden können. Da aber die Öfen nicht eine so grofse Menge gerösteter Mehle in gleichem Zeitraume erzeugen, so werden gewöhnlich nur 7 Fässer gefüllt.

i) Das Durchseihen des Amalgams und dessen Auspressen.

Der Zweck dieser Operation ist die Scheidung des Amalgams vom Quecksilber; sie findet in Spitzbeuteln von Zwillich Statt, welche auf hölzernen Tenakeln über gufseisernen Kesseln befestigt sind. Man nimmt die Beutel doppelt, giefst das amalgamhältige Quecksilber hinein, und läfst es allmählich durchlaufen; ist diefs geschehen, so wird das zurückgebliebene Amalgam mittelst der Hände ausgepreſst, und in Kugeln geformt.

Das Pressen mit den Händen ist aber schädlich, denn die Wirkungen des Quecksilbers sind nicht zwei-

felhaft; es sollte daher in einer Presse geschehen, welche übrigens von Holz, und der Weinpresse gleich seyn könnte. Die Bildung der Amalgamkugeln ist überflüssig, da es gleichgültig ist, welche Gestalt das ausgeglühte Silber hat.

k) Das Ausglühen des Amalgams.

Dieses findet in dem von Hofrath *Born* angegebenen Glühapparate Statt, welchen man in dessen Werke über die Amalgamation abgebildet findet.

Drei solche Apparate stehen neben einander, und fassen bis 700 Pfunde des Amalgams, welches auf die Schüsseln desselben aufgestellt wird.

Die eisernen Cylinder sind hier von Gufseisen, und werden mittelst einer Winde aufgesetzt und abgehoben; sie werden mit einer trockenen Mauer von Backsteinen umgeben, in welcher die nöthigen Luftzüge gelassen sind, und mit Kohle verschüttet.

700 Pfund Amalgam geben gewöhnlich 100 Pfund oder 200 Mark rohes Silber.

Die Schichtung des Amalgams, die Zusammenstellung des Apparates und der Mauer, das Ausglühen und Auskühlen nimmt 24 Stunden in Anspruch.

Der Kohlenverbrauch beträgt dabei 6 bis 7 Mafs, oder 48 bis 54 Kubikfufs. Diese Arbeiten werden von den Probestampfern mit Beihülfe der Anquicker und Anquickjungen verrichtet. Das Werk hat zwei Probestampfer, der eine erhält wöchentlich 3 fl., der andere 2 fl. 30 kr. C. M.

l) Das Einschmelzen des Glühsilbers.

Das erzeugte Glühsilber wird alle Monat eingeschmolzen und in Zaine gegossen, welche an das k. k. Münzamt nach Wien versendet werden.

Diese Schmelzung geschieht in grofsen Passauer Tiegeln, das geschmolzene Silber wird mittelst eiserner Löffel in Zaine gegossen, von jedem Gufs etwas auf die Seite gebracht, um einen Probezain zu bilden, welcher durch Abtreiben mittelst Zusatz von Blei auf Silber geprüft wird.

Das Rohsilber enthält gewöhnlich per Mark 8 Loth, seltener 7 Loth 2 Quintchen Silber, das andere ist Kupfer. Der Goldgehalt beträgt in der Mark Silber nur $^1/_4$ Denär, und wird von dem k. Münzamte nicht vergütet.

m) Das Weifssieden des geschmolzenen Silbers.

Da das erzeugte Amalgamirsilber die Hälfte Kupfer enthält, so oxydirt sich dieses an der Oberfläche, und gibt den Zainen eine unansehnliche rothe Farbe, welche man denselben durch das Weifssieden zu benehmen sucht.

Man glüht zu diesem Zwecke die Zaine eine Zeit lang, um das Kupfer auf der Oberfläche in Kupferoxyd umzuwandeln, und kocht sie dann mit einer Auflösung von Weinstein und Natrium-Chlorid.

Auf 500 Mark feines Silber nimmt man hiezu 12 Pf. Weinstein und 4 Pf. Salz.

Soll der Zweck dieses Prozesses erreicht werden, so darf das Glühen der Zaine nicht wegbleiben, weil dadurch Kupferoxyd gebildet ist, und nur dieses, nicht aber das metallische Kupfer im sauren weinsteinsauren Kali löslich ist. Das Natrium-Chlorid kann füglich weggelassen werden, da es die Auflösung des Kupferoxydes nicht befördert, übrigens könnte man denselben Zweck mittelst verdünnter Schwefelsäure wohlfeiler erreichen. Da aber das k. Münzamt die erhaltenen Zaine ohnehin wieder umschmilzt, so dürfte es noch zweckmäfsiger

seyn, diese Arbeit ganz zu unterlassen. Der Silberabgang für sämmtliche Manipulation betrug im Jahre 1830 $4^3/_4$ pCt. Da der Gehalt des Silbers in den Rückständen allein 5 pCt. beträgt, so scheint dieser geringere Abgang eine Folge der Ausgleichung der Hütte und der Nichtbeachtung der Denäre; überdiefs darf man nicht übersehen, dafs jede Probe im Kleinen schon einen Abgang einschliefst.

Der Eisenabgang für jeden Centner Erzmehl beträgt 4 Loth, der Quecksilberabgang für jeden Centner Erzmehl $^7/_8$ Loth; der Verbrauch an Salz 10 pCt., der Verbrauch an Pfannenstein 3 pCt.; der Verbrauch des Holzes zum Wasserwärmen für 100 Centner $^1/_3$ Klafter, der Verbrauch der Rösthölzer für 100 Centner Erz $8^3/_4$ Kl.; die eigentlichen Amalgamirkosten per Centner 1 fl. C. M.

Betrachtet man die Reinheit dieser Operation, die vollständige Aufarbeitung der Erze ohne Darstellung silberhältiger Producte, deren Bildung der Eintränkprozefs nicht beseitigen kann, die geringen Amalgamirkosten per 1 fl. 10 kr., oder eigentlich per 1 fl. ohne Unterschied des Silbergehaltes der Erze, die kurze Dauer des Prozesses, den geringen Quecksilberabgang und Brennmaterialsaufwand, die Vortheile, welche aus der erleichterten Übersicht, aus der Möglichkeit einer momentanen Inventur, aus der Entfernung aller Nachtheile, welche Bosheit oder Nachlässigkeit des Arbeiters herbeiführen können, fliefsen, so mufs man selbst bei der Betrachtung, dafs diese Operation bei jeden 1000 Centnern Erzmehle 1 Mark Gold verliert, sich doch für dieselbe erklären, um so mehr, als in dem Falle, dafs das Gold zugleich mit dem Silber gewonnen werden könnte, dem Werke nicht der ganze Werth des Goldes, sondern 312 fl. 30 kr. C. M. für jede Mark desselben weniger zu

Gute käme, da dieser Betrag als Scheidekosten in Abzug gebracht werden müfste.

Da aber auch der Goldabgang zu Folge der neuern Erfahrung wahrscheinlich entfernt wird, so steht demnach der Amalgamation die gröfste Vervollkommnung bevor. Es dürfte nicht überflüssig seyn, hier noch jene Gründe näher zu beleuchten, welche gegen die allgemeine Einführung der Amalgamation aufgestellt werden. Diese sind:

a) Die Amalgamirrückstände sind einquintelich, die Rohschlacken des Schmelzprozesses aber nur eindenärig, die Amalgamation mufs daher gröfsere Silberabgänge haben.

b) Die Amalgamation kann das Gold nicht gewinnen, und veranlafst daher gröfsere Goldabgänge.

c) Der Durchschnittsgehalt der Erze gestattet keine vortheilhafte Beschickung für die Amalgamation.

a) Die Amalgamationsrückstände enthalten allerdings 3 Denär bis 1 Quintchen an Silber, aber 100 Centner Erzmehle geben nur 95 Ct. Rückstände, und der Silbergehalt der Rückstände beträgt höchstens 5 pCt. Die Roharbeit liefert von 100 Centnern Erz und Schlichen 212 bis 230 Centner Rohschlacken, deren Silbergehalt eindenärig ist, und, wie oben gezeigt wurde, 11.5 pCt. der Silbermenge der Vormafs beträgt; obwohl daher die Rückstände reicher sind, so ist bei der geringen Menge derselben der Silberabgang doch nicht gröfser, sondern geringer.

b) *Die Amalgamation kann das Gold nicht gewinnen.*

Es ist schon oben nachgewiesen worden, dafs wenn die Amalgamation wirklich das Gold in Verbindung mit dem Silber gewinnen würde, sie doch nur einen geringen Nutzen davon erhielte, da für jede Mark des gewonnenen Goldes 312 fl. 30 kr. an Scheidekosten bezahlt wer-

den müfsten; aber es wurde auch angeführt, dafs die Gewinnung des Goldes aus den Pochgängen schon mit grofsem Vortheil mittelst Amalgamation bereits eingeleitet sey. Da nun kein Grund vorhanden ist, anzunehmen, dafs das Gold der Erze, welches in denselben eben so wie in den Pochgängen gediegen enthalten ist, sich anders verhalten werde, so ist nicht zu zweifeln, dafs auch dieses wird gewonnen werden. Da man aber in diesem Falle das Gold mit einer sehr geringen Silbermenge erhalten wird, so wird man im letztern Falle zwar per Mark à 2 fl. 24 kr. Scheid- und Gaardationskosten bezahlen, da man aber das Gold in höchstens 3 Mark vereinigt, so werden diese nur 7 fl. 12 kr. C. M. per Mark des Goldes betragen, dagegen dieselben 312 fl. 10 kr. betragen würden, wenn man das Gold gleich mit dem Silber gewinnen würde. Der Umstand demnach, dafs das Gold nicht mit dem Silber zugleich amalgamirbar ist, erscheint als wesentlicher Vortheil der Amalgamation, welchen man bis jetzt ganz übersehen hat; und da das Gold wirklich in den Salzburger Goldmühlen amalgamirbar ist, so wird man die göldigen Erze im gepochten Zustande durch diese früher entgolden-, dann erst verrösten, und in den *Born*'schen Fässern zu entsilbern haben, oder man wird die entsilberten und göldigen Amalgamirrückstände durch die Quickmühlen leiten, je nachdem durch Versuche das erstere oder das letztere vortheilhafter sich erweisen wird.

c) *Der geringe Durchschnittsgehalt der Erze gestatte nicht ihre Amalgamation.*

Dieser Einwurf wäre allerdings der wichtigste, und er ist auch bei dem bestehenden Einlösungs-Systeme begründet, wenn man die Kiesschliche, deren Zutheilung die Schmelz-Manipulationsweise gebietet, in den Durchschnittsgehalt aufnimmt; da aber die Amalgamation kei-

nen Grund hat, die Menge des Schwefels der Beschickung zu vermehren, dessen Entfernung eigentlich die Röstmanipulation bezweckt, so ist auch deren Einlösung für die Amalgamation überflüssig, und durch ihre Beseitigung wird der Durchschnittsgehalt der Erze alsogleich erhöht.

Berücksichtiget man ferner, dafs das Einlösungssystem der Silberhütten jede Concentration der Erze verhindert, wie oben nachgewiesen wurde, so ist nicht zu zweifeln, dafs bei Gleichstellung der Amalgamirkosten für Erze jedes Gehaltes auch der Berg die Concentration derselben nicht unterlassen werde, indem der geringe Abgang der Cencentration durch die grofse Ersparung der Schmelzkosten hinreichend gedeckt wird.

Es ist defshalb nicht nöthig, die Kiesschliche ganz aus der Einlösung zu verbannen, indem man sich derselben immer noch vortheilhaft zur Aufarbeitung hältiger Schlacken bedienen könnte; da aber die Gewinnung ihres Silbergehaltes nur mit gröfsern Abgängen möglich ist, so sollen auch bei ihrer Einlösung gröfsere Abgänge berechnet, die silberfreien oder silberarmen Kiesschliche aber gar nicht eingelöst werden.

II.

Notiz über das Vorkommen des rhomboëdrischen Wismuthglanzes (Tetradymits, nach *Haidinger*) und des prismatischen Wismuthglanzes zu Retzbanyen;

von

Dr. *Wehrle*, k. k. Bergrath und Prof. in Schemnitz.

Zu Folge der Auffindung des Tellurs in einer Varietät des Wismuthglanzes zu Retzbanyen mufste es wünschenswerth erscheinen, auszumitteln, ob dieses Mineral daselbst an einem oder an mehreren Örtern vorkomme, und im letztern Falle, ob alle Varietäten desselben, welche zu Retzbanyen bis jetzt beobachtet wurden, Tellur enthalten.

Ich wendete mich defshalb an Herrn Markscheider von *Szaibely* in Retzbanyen, welchem ich das untersuchte Exemplar verdanke, und erhielt von demselben folgende Auskünfte, welche ich hier nachträglich mittheile.

Jener Wismuthglanz, in welchem ich Tellur fand, kam auf der Grube Markus im Blidarer Gebirge vor, welche im tiefern Niveau der Grube Barbara fast im Thalbette angeschlagen war, ein zertrümmertes, äufserst absätziges Erzlager abbaute, und nun als unbauwürdig aufgelassen ist.

Überdiefs fand schon vor 30 Jahren der k. Waldschaffer und Gewerke, *Martin Straub*, an der westlichen Seite desselben Gebirges, an der Scheidung zwischen Urkalk und Thonschiefer, ein Tagausbeifsen eines stehenden Erzstockes, welcher nebst Wismuth auch Silber, Gold und Kupfer enthielt, unter dem Namen Chri-

stina gemuthet, bis auf eine senkrechte Tiefe von 48 Klafter abgebaut, dann aber aufgelassen wurde, weil er sich in diesem Horizonte verengte, und der Bau sich nicht mehr lohnte. Die Menge des Wismuthes, welchen dieser Erzstock lieferte, war bedeutend, denn es wurde sogar aus den Erzen ausgeschmolzen, und in ziemlich grofsen Mengen in den Handel gebracht. Die Grube selbst ist nun verfallen, und von den Mineralien, welche in derselben vorkamen, nichts mehr vorhanden, so dafs sich nun nicht mehr bestimmen läfst, ob auf derselben nebst octaëdrischem Wismuthe auch noch der Tetradymit oder der prismatische Wismuthglanz vorkam.

In neuerer Zeit wurde auf der nämlichen Christina-Scheidung im abfallenden Gebirgs-Niveau, 120 Klafter von Christina, die St. Barbara-Grube angeschlagen, welche noch bis jetzt bebaut wird; auf dieser kommt im dodecaëdrischen Granat, prismatischen Augitspathe und rhomboëdrischen Kalkhaloide, begleitet vom octaëdrischen und pyramidalen Kupferkies und eisenhältigen Wismuthocker, Wismuthglanz theils in derben Massen, theils eingesprengt, vor.

Man fand dieses Mineral ferner in dem Koschurer Gebirge, welches durch das Retzbanyer Hauptthal von dem Blidarer Gebirge getrennt ist, auf der Grube Segen-Gottes und Gabe-Gottes, letztere jetzt Paraskiva genannt, das Wismuthglanz unter denselben Verhältnissen, wie auf Barbara; endlich fand man dasselbe auf der Grube Kaiser-Raichenstein im Valye-Sakaer-Gebirge, und unterscheidet nach der Verschiedenheit der Textur blätterigen, strahligen, krummschaligen und dichten Wismuthglanz.

Die Untersuchung dieser Varietäten von Wismuthglanz, welche man bis jetzt zu Retzbanyen vorgefunden hat, werde ich mit Nächsten vornehmen können,

da Herr v. *Szaibely* mir gütigst die Zusendung derselben anzeigte.

Durch die Gefälligkeit des Berg-Practikanten, Herrn v. *Somogy*, welcher erst vor einigen Monaten Retzbanyen bereiste, und auf der Grube Barbara etwas von dem Wismuthglanze sammelte, erhielt ich die dichte Varietät, eingewachsen im dodekaëdrischen Granat.

An dem vorliegenden Exemplar ist keine Krystallisation, und nur an einzelnen Stellen Theilbarkeit und stängliche Zusammensetzungsstücke bemerkbar, der Bruch ist uneben, der Glanz metallisch. Die Farbe dunkel bleigrau, ins Stahlgraue sich neigend, der Strich eben so, aber dunkler; es ist etwas milde, die Härte = 2.5, das spec. Gewicht = 6.562.

Vor dem Löthrohre saigern sich metallisch glänzende Tropfen aus demselben, es verbreitet einen Schwefelgeruch, und beschlägt die Kohle gelb, welcher Beschlag aber durch Abkühlung weifs wird. Die Flamme wird nicht gefärbt. Mit Soda behandelt, gibt es ein glänzendes Metallkorn, welches, für sich behandelt, die Kohle gelb beschlägt.

In Salpetersäure löst es sich vollkommen auf, und hinterläfst blofs etwas Schwefel- und Granatmasse. Die Auflösung, mit Essigsäure versetzt, gibt mit schwefeligsaurem Ammoniak keinen Niederschlag, es enthält somit kein Tellur.

Mit Chlorwasserstoffsäure versetzt, bildet es einen weifsen Niederschlag, welcher am Sonnenlichte schwarz wird; mit kohlensaurem Ammoniak entstand eine gelblich weifse Fällung, und die Flüssigkeit färbte sich blau.

Die chemische Untersuchung lieferte in 100 Theilen desselben

64.25 Wismuth,
21.65 Schwefel,

6.62 Kupfer,
2.71 Silber,
2.15 Eisenoxyd,
1.48 Granatsubstanz.

Da das der Untersuchung unterzogene Exemplar unter der Loupe deutlich eingesprengte Theilchen des Kupferkieses zu erkennen gab, so wird es wahrscheinlich, dafs der dichte Wismuthglanz ein inniges Gemenge von $82.6\,B_2S^2$ mit Kupferkies sey, welches die Untersuchung der reinern Exemplare, wenn solche anlangen, nachweisen wird, und dafs zu Retzbanyen aufser dem Tetradymit auch ein dem schwedischen ähnlicher Wismuthglanz vorkomme.

III.

Bemerkungen zum practischen Gebrauche der Wahrscheinlichkeitsrechnung;

von

J. J. Littrow.

Die Wahrscheinlichkeitsrechnung, oder eigentlich die Theorie der kleinsten Quadrate, hat bei der gegenwärtigen Vervollkommnung der Naturwissenschaften, die unmittelbar auf Beobachtungen und Experimenten beruhen, eine so wichtige Rolle übernommen, dafs man beinahe in allen den Fällen, wo die äufserste Genauigkeit in den Resultaten gesucht wird, ihrer nicht mehr entbehren kann. Die Vorschriften aber, welche für diese Theorie von den beiden bekannten Begründern derselben entwickelt worden sind, scheinen nicht Jedem zugänglich zu seyn, wie man aus den noch immer selte-

nen, und vielleicht noch mehr aus den oft unrichtigen Anwendungen derselben schliefsen darf, die bereits an manchen Orten von ihnen gemacht worden sind. Es wird daher nicht unnütz seyn, wenigstens die vorzüglichsten dieser Vorschriften für die einzelnen, am meisten vorkommenden Fälle, und zwar so zusammen zu stellen, wie sie sich *zu dem practischen Gebrauche* am besten eignen, etwa so, wie man es mit den bekannten Formeln der Trigonometrie schon längst, und gewifs nicht ohne Nutzen, gethan hat, da sie die Anwendung derselben so sehr erleichtern, und nicht nur dem mit der Theorie Unbekannten ihren Gebrauch möglich machen, sondern selbst den Kenner derselben der unangenehmen und zeitraubenden Nothwendigkeit überheben, immer wieder auf die ersten Gründe derselben zurück zu gehen. Die Beweise der verschiedenen hier aufgestellten Ausdrücke wird Jeder, dem es darum zu thun ist, in den bekannten Werken nachsehen, daher sie hier, wo es sich blofs um die practische Brauchbarkeit derselben handelt, übergangen werden können.

I.

Der Kürze und der leichteren Übersicht wegen wollen wir hier zuerst einige Bezeichnungen einführen, die wir in der Folge immer in derselben Bedeutung gebrauchen werden.

Der wahrscheinlichste Werth einer aus mehreren Beobachtungen zu bestimmenden Gröfse x, y, z . . . soll durch X, Y, Z . . . ausgedrückt werden.

Dieses Resultat X, oder Y, oder Z . . . wird desto genauer seyn, je gröfser die Anzahl der einzelnen Beobachtungen ist, die man der Untersuchung zu Grunde gelegt hat, je genauer diese Beobachtungen selbst sind, oder je besser sie unter einander harmoniren, und je

vortheilhafter überhaupt die Bestimmung dieses Resultates ist. Diese Umstände bestimmen das *Gewicht* des Resultates, welches wir durch P bezeichnen wollen.

Das gefundene Resultat X, oder Y, oder Z . . . wird, wenn es gleich das wahrscheinlichste von allen ist, doch noch nicht das *wahre* selbst seyn: es wird also selbst noch einen Fehler haben. Es wird nicht wahrscheinlich seyn, dafs dieser Fehler noch sehr grofs, und z. B. gleich 1 sey: je kleiner aber dieser Fehler angenommen wird, desto gröfser wird auch die Wahrscheinlichkeit seyn, dafs er in der That begangen worden ist, und desto kleiner daher die Wahrscheinlichkeit, dafs er nicht begangen worden ist. Derjenige Fehler aber, dessen Wahrscheinlichkeit der Wahrscheinlichkeit des Gegentheils gleich ist, d. h. derjenige Fehler, für den es eben so wahrscheinlich ist, dafs man ihn begangen, und dafs man ihn nicht begangen hat, soll der *wahrscheinlichste Fehler* dieses Resultates heifsen, und durch F bezeichnet werden.

Von ihm unterscheidet sich der *wahrscheinliche Fehler jeder einzelnen Beobachtung*, der f heifsen soll, und der offenbar gegen den wahrscheinlichen Fehler F des Resultates aus allen Beobachtungen desto gröfser seyn wird, je gröfser die Anzahl der Beobachtungen ist, welche Anzahl wir immer durch N bezeichnen wollen.

Noch hat man, was eigentlich überflüssig ist, das Wort *Präcision* oder *Genauigkeit* in diese Rechnungen eingeführt. Nennt man nämlich G die Genauigkeit des Resultats X, Y, Z . . . aus allen Beobachtungen, und g die Genauigkeit einer jeden einzelnen Beobachtung, so hat man

$$\frac{F}{f} = \frac{g}{G};$$

also auch, wenn die Genauigkeit g der einzelnen Beob-

achtungen gleich der Einheit angenommen wird, die Genauigkeit des Resultats

$$G = \frac{f}{F}.$$

Dieſs setzt voraus, daſs alle einzelne Beobachtungen gleich gut angenommen werden, oder daſs sie alle denselben *Werth* haben. Sollten sie von ungleicher Güte seyn, so wollen wir ihre Werthe durch die Gröſsen c, c_1, c_2 . . . ausdrücken.

Immer wird übrigens vorausgesetzt, daſs die Anzahl N der einzelnen Beobachtungen beträchtlich seyn muſs, wenn der Werth X, Y, Z . . . der Resultate verläſslich seyn soll, wie dieses schon aus der Natur der Wahrscheinlichkeitsrechnung hervorgeht, und wie auch die Werthe des Gewichts P und der Genauigkeit G der Resultate zeigen werden, die immer desto gröſser sind, je gröſser N ist. Endlich muſs noch bemerkt werden, daſs man durch die Wahrscheinlichkeitsrechnung in den Resultaten X, Y, Z . . . nur die *zufälligen* Fehler so viel möglich zu entfernen sucht, also z. B. Fehler der unmittelbaren Beobachtung, des Sehens, des Hörens, der Eintheilungen der Instrumente u. dgl., welche Fehler alle in ihrer absoluten Gröſse sowohl, als auch in ihren Zeichen veränderlich, und bald positiv, bald negativ seyn können; nicht aber auch *constante* Fehler, die immer auf *dieselbe* Weise anf die Beobachtungen einwirken, z. B. den sogenannten Collimationsfehler der Instrumente, einen unrichtigen Gefrierpunct des Thermometers u. dgl., welche letzte Gattung von Fehlern daher auf das Sorgfältigste vermieden werden muſs, wenn man in der That auf Annäherung zur Wahrheit Anspruch machen will.

Bekanntlich ist, wenn die Wahrschcinlichkeit eines Ereignisses z. B. gleich $\frac{1}{4}$ ist, die Wahrscheinlichkeit

des Gegentheils oder die Wahrscheinlichkeit, dafs dieses Ereignifs nicht eintreffen werde, gleich $1 - \frac{1}{4}$ oder gleich $\frac{3}{4}$, was man auch so ausdrücken kann: Es ist 1 gen 4 zu wetten, dafs jenes Ereignifs eintreffen, und 3 gen 4, dafs es nicht eintreffen wird. Für den oben erwähnten wahrscheinlichsten Fehler F des Resultats wurde gesagt, dafs seine Wahrscheinlichkeit gleich der Wahrscheinlichkeit des Gegentheils ist. Da also hier für diesen Fehler F beide Wahrscheinlichkeiten gleich sind, und da die Summe beider immer gleich der Einheit ist, so ist die Wahrscheinlichkeit dieses Fehlers gleich $\frac{1}{2}$, oder man kann 1 gen 1 wetten, dafs der Fehler des Resultates nicht gröfser sey, als diejenige Zahl, welche wir durch F bezeichnen. Um aber auch noch die Wahrscheinlichkeit für andere, noch kleinere Fehler als F, bequem finden zu können, so kann man nach der Ordnung 10 gen 1, 100 gen 1, 1000 gen 1, und 10000 gen 1 wetten, dafs der Fehler des Resultates nicht gröfser sey, als

$$\frac{1.16309}{\sqrt{P}}, \quad \frac{1.82130}{\sqrt{P}}, \quad \frac{2\,32767}{\sqrt{P}} \text{ und } \frac{2.75106}{\sqrt{P}},$$

wo wieder P das Gewicht des Resultates bezeichnet.

Das Vorhergehende wird hinreichen, den Gebrauch des Folgenden verständlich zu machen.

II.

Der einfachste und am meisten vorkommende der hieher gehörenden Fälle ist derjenige, wo man eine gewisse Gröfse unmittelbar aus Beobachtungen abzuleiten sucht, wo man z. B. für die gesuchte Ausdehnung eines Metalles, für die Polhöhe eines Ortes, für die auf dieselbe Epoche reducirte Schiefe der Ecliptik u. s. w. mehrere einzelne Beobachtungen hat, die unter einander mehr oder weniger verschieden sind, und von welchen man nun den wahrscheinlichsten Werth sucht.

Nimmt man zuerst an, dafs alle diese Beobachtungen von gleichem Werthe sind, und dafs man für die gesuchte Gröfse in der

ersten Beobachtung den Werth x,
zweiten » » » x_1,
dritten » » » x_2 u. f.

erhalten habe, so ist der wahrscheinlichste Werth dieser Gröfse

$$X = \frac{x + x_1 + x_2 + \cdots}{N} \quad \text{oder} \quad X = \frac{1}{N} \int x,$$

wo N die Anzahl der Beobachtungen bezeichnet. Sucht man dann die Werthe $\varepsilon = X - x$, $\varepsilon_1 = X - x_1$, $\varepsilon_2 = X - x_2$ u. s. w., und nennt man die Summe ihrer Quadrate $\varepsilon^2 + \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \ldots = \int \varepsilon^2$, so ist das Gewicht dieser Bestimmung des Resultates X gleich

$$P = \frac{N^2}{2 \int \varepsilon^2},$$

und der wahrscheinliche Fehler dieses Resultates

$$F = \frac{0.47694}{\sqrt{P}},$$

der wahrscheinliche Fehler jeder einzelnen Beobachtung aber

$$f = 0.47694 \sqrt{\frac{N}{P}},$$

und endlich die Genauigkeit (Präcision) dieser Bestimmung des Resultates, wenn man die Genauigkeit der einzelnen Beobachtung als Einheit voraussetzt,

$$G = \sqrt{N}.$$

Um auf diese Ausdrücke ein Beispiel anzuwenden, seyen die beobachteten Polhöhen Wiens gegeben:

$48^\circ\ 12'\ 33'' = x,$
$48^\circ\ 12'\ 34'' = x_1,$
$48^\circ\ 12'\ 35'' = x_2.$

Es ist bereits erinnert worden, dafs man allen diesen Untersuchungen immer eine beträchtlich grofse Zahl von Beobachtungen zu Grunde legen müsse, während wir uns hier der Kürze wegen nur mit kleineren Zahlen von N begnügen. Die angeführten Beobachtungen geben für den wahrscheinlichsten Werth dieser Polhöhe

$$X = \frac{1}{N}\int x = \frac{1}{3} \cdot 102'' = 34''.00.$$

Ferner ist

$$\varepsilon = X - x = 1, \quad \varepsilon_1 = X - x_1 = 0, \quad \varepsilon_2 = X - x_2 = -1,$$

also $\Sigma\varepsilon^2 = 2$, und daher das Gewicht dieser Bestimmung des Resultates von X oder

$$P = 2.25$$

der wahrscheinliche Fehler des Resultats

$$F = 0''.318,$$

die Präcision dieser Bestimmung, die der einzelnen Beobachtung gleich 1 gesetzt,

$$G = 1.732,$$

und endlich der wahrscheinliche Fehler jeder einzelnen Beobachtung

$$f = 0''.551.$$

Setzt man dann

$$r = 1.8214 \ldots 2.3277 \ldots 2.7511,$$

so ist $\frac{r}{\sqrt{P}} = 1.214 \ldots . 1.552 \ldots . 1.834,$

oder man kann 100 oder 1000 oder 10000 gen eins wetten, dafs der in der vorhergehenden Bestimmung von X begangene Fehler kleiner ist als

$$1''.214 \ldots 1''.552 \ldots 1''.834.$$

* * *

Bisher wurde angenommen, dafs alle Beobachtungen unter sich gleiche Werthe haben. Es gebe nun

die erste Beobachtung die Gröfse x mit dem Werthe c,

» zweite » » » x_1 » » » c_1,

» dritte » » » x_2 » » » c_2 u. f.,

so hat man für die Gröfsen X, P, F . . ., wenn man sie hier und immer in der oben angegebenen Bedeutung nimmt, folgende Ausdrücke:

$$X = \frac{c^2 x + c_1^2 x + c_2^2 x + c_3^2 x + \cdots}{c^2 + c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 + \cdots} = \frac{\int c^2 x}{\int c^2}.$$

Ist dann $\varepsilon = X - x$, $\varepsilon_1 = X - x_1$ u. f., so hat man

$$P = \frac{N}{2} \cdot \frac{\int c^2}{\int c^2 \varepsilon^2}, \quad F = \frac{0.47694}{\sqrt{P}}, \quad G = \sqrt{\int c^2} \text{ und}$$

$$f = 0.47694 \sqrt{\frac{\int c^2}{P}}.$$

Überdiefs ist der wahrscheinlichste Fehler der ersten Beobachtung gleich $\frac{f}{c}$, der zweiten gleich $\frac{f}{c_1}$, der dritten gleich $\frac{f}{c_2}$, u. s. w.

Setzt man in diesen Ausdrücken $c = c_1 = c_2 \ldots = 1$, so ist $\int c^2 \varepsilon^2 = \int \varepsilon^2$ und $\int c^2 = N$, und man erhält die Ausdrücke der vorhergehenden Aufgabe.

Es wird meistens schwer seyn, diese Werthe c, c_1, c_2 . . . der einzelnen Beobachtungen mit einiger Genauigkeit anzugeben. Ist z. B. die erste Beobachtung x das Resultat oder das arithmetische Mittel von n Beobachtungen, und eben so x_1, x_2 . . . das Mittel von n_1, n_2 . . . Beobachtungen, so wird man in den vorhergehenden Ausdrücken

$$c = \sqrt{n}, \quad c_1 = \sqrt{n_1}, \quad c_2 = \sqrt{n_2} \text{ u. f. setzen.}$$

Ex. Seyen die vorigen Polhöhen gegeben, aber

die erste . $x = 48^\circ\, 12' 33''$ das Resultat aus einer einzigen Beobachtung,

die zweite $x_1 = 48^\circ\, 12' 34''$ das Resultat aus vier Beobachtungen,

die dritte $x_2 = 48^\circ\,12'\,35''$ das Resultat aus neun Beobachtungen,

so ist $c = 1$, $c = \sqrt{4} = 2$, $c_2 = \sqrt{9} = 3$, und daher $c^2 x = 33$, $c_1^2 x = 136$, $c_2^2 x = 315$, $\int c^2 x = 484$, $\int c^2 = 14$ und

$$X = \frac{\int c^2 x}{\int c^2} = 34''.571.$$

Weiter ist

$$\varepsilon = X - x = 1.571, \quad \varepsilon_1 = 0.571, \quad \varepsilon_2 = -0.429,$$

also $\int c^2 \varepsilon^2 = 5.428$, also auch

$$P = 3.959, \quad F = 0.240, \quad G = 3.742, \quad f = 0.415,$$

und der wahrscheinliche Fehler

der ersten Beobachtung $\frac{f}{c} = 0.415$,

» zweiten » $\frac{f}{c'} = 0.207$,

» dritten » $\frac{f}{c_2} = 0.138$.

Setzt man endlich

$$r = 1.8214 \ldots 2.3277 \ldots 2.7511,$$

so ist $\frac{r}{\sqrt{P}} = 0.91 \ldots 1.17 \ldots 1.38$,

und man kann 100, 1000, 10000 gen 1 wetten, dafs der Fehler dieser Bestimmung von X nicht gröfser ist als

$$0''.91 \ldots 1''.17 \ldots 1''.38.$$

III.

Bisher war die Gröfse x unmittelbar durch die Beobachtung gegeben. Nimmt man nun an, dafs der schon beinahe bekannte Werth einer Gröfse durch irgend einen analytischen Ausdruck, durch eine sogenannte Formel gegeben ist, und dafs man die Verbesserung x dieser Formel suche, so kommt man auf die sogenannten Bedingungsgleichungen, welche bekanntlich alle, wenn

nur eine einzige Gröfse x gesucht wird, auf die einfache linearische Form

$$0 = ax - \delta$$

gebracht werden können, in welcher a der durch jene Formel zu bestimmende, von einer Beobachtung zur andern sich ändernde Coefficient von x, und in welcher δ die Differenz der Resultate der Beobachtung und der Berechnung durch die erwähnte Formel bezeichnet. Da aber diese Beobachtung selbst nicht als ganz fehlerfrei angenommen werden kann, so wollen wir ihren, obschon noch unbekannten, Fehler durch ε bezeichnen, wodurch daher die Bedingungsgleichung die Form erhält

$$\varepsilon = ax - \delta.$$

Für eine zweite, dritte Beobachtung... erhält man eben so

$$\varepsilon_1 = a_1 x - \delta_1,$$
$$\varepsilon_2 = a_2 x - \delta_2, \text{ u. s. w.}$$

Um nun aus allen diesen N Gleichungen den wahrscheinlichsten Werth X der gesuchten Gröfse x, das Gewicht P dieser Bestimmung u. s. w. zu finden, hat man, wenn

$$\int a^2 = a^2 + a_1^2 + a_2^2 + \ldots, \quad \int a\delta = a\delta + a_1\delta_1 + a_2\delta_2 + \ldots$$

ist,

$$X = \frac{\int a\delta}{\int a^2}, \quad \int \varepsilon^2 = \int \delta^2 - \frac{(\int a\delta)^2}{\int a^2}, \quad P = \frac{N}{2} \cdot \frac{\int a^2}{\int \varepsilon^2},$$

$$F = \frac{0.47694}{\sqrt{P}}, \quad G = \sqrt{\int a^2} \text{ und } f = 0.47694 \sqrt{\frac{\int a^2}{P}}.$$

Setzt man in diesen Ausdrücken $a = a_1 = a_2 \ldots = 1$ und $\delta = x$, $\delta_1 = x_1$, $\delta_2 = x_2$, so erhält man, da $\int a^2 = N$ wird, die Ausdrücke von Nro. II. wieder.

Ex. Sind die Bedingungsgleichungen gegeben:

$$\varepsilon = 2.1\,x - 2.5,$$
$$\varepsilon_1 = 3.2\,x - 5.0,$$

$$\varepsilon_2 = 2.4x - 4.5,$$
$$\varepsilon_3 = 3.0x - 5.0,$$
$$\varepsilon_4 = 3.5x - 4.1,$$

so hat man $\int a^2 = 48.66$, $\int \delta^2 = 93.31$, $\int a\delta = 66.40$ und $N = 5$, also $\int \varepsilon^2 = 2.7025$ und

$$X = 1.3646, \quad P = 45.014, \quad F = 0.071,$$
$$G = 6.976, \quad f = 0.496,$$

und man kann 100 gen 1 oder 1000 gen 1 wetten, dafs der Fehler von X nicht gröfser als 0.27 oder als 0.35 ist.

Das Vorhergehende setzt voraus, dafs die Werthe aller einzelnen Beobachtungen gleich grofs sind. Hat aber die 1ste Bedingungsgleichung $\varepsilon = ax - \delta$ den Werth c,

» 2te » $\varepsilon_1 = a_1x - \delta_1$ » » c_1,

» 3te » $\varepsilon_2 = a_2x - \delta_2$ » » c_2 u. f.

$$\text{so ist} \quad X = \frac{\int c^2 a\delta}{\int c^2 a^2},$$

und wenn $\varepsilon = aX - \delta$, $\varepsilon_1 = a_1X - \delta_1 \ldots$ gesetzt wird,

$$P = \frac{N}{2} \cdot \frac{\int c^2 a}{\int c^2 \varepsilon^2}, \quad F = \frac{0.47694}{\sqrt{P}}, \quad G = \sqrt{\int c^2 a^2},$$

$$f = 0.47694 \sqrt{\frac{\int c^2 a^2}{P}}.$$

Ex. Ist die Gleichung

$$\varepsilon = 2x - 2.5 \text{ aus einer},$$
$$\varepsilon_1 = 3x - 5.0 \text{ aus vier},$$
$$\varepsilon_2 = 4x - 6.0 \text{ aus neun Beobachtungen}$$

genommen worden, so ist $c = 1$, $c_1 = 2$, $c_2 = 3$, und daher

$$\int c^2 a^2 = 184, \quad \int c^2 a\delta = 281, \quad X = 1.52717,$$
$$\varepsilon = aX - \delta = 0.5543, \quad \varepsilon_1 = -0.4184, \quad \varepsilon_2 = 0.1088,$$

also auch

$$\int c^2 \varepsilon^2 = 1.1141 \quad \text{und} \quad F = 247.726, \quad F = 0.0303,$$
$$G = 13.565, \quad f = 0.4110.$$

Man kann aber auch bequemer diesen Fall auf den

vorigen, wo alle Werthe c, c_1, c_2 . . . gleich sind, zurückführen, wenn man die gegebenen Bedingungsgleichungen, aufser den ε, ε_1, ε_2 . . ., durch diese Werthe c, c_1, c_2 . . . multiplicirt, und dann die Werthe von X, P, F... nach den ersten Ausdrücken der Nro. III. sucht. So hat man in dem letzten Beispiele

$$\begin{aligned} \varepsilon &= 2x - 2.5, \\ \varepsilon_1 &= 6x - 10.0, \\ \varepsilon_2 &= 12x - 18.0, \end{aligned}$$

und da jetzt die Werthe aller Bedingungsgleichungen dieselben sind, so ist

$$\int a^2 = 184, \quad \int \delta^2 = 430.25, \quad \int a\delta = 281,$$

und daher

$$X = \frac{\int a\delta}{\int a^2} = 1.52717, \quad \int \varepsilon^2 = 1.1142, \quad P = 247.7,$$

$$F = 0.03030, \quad G = 13.565, \quad f = 0.4110$$

wie zuvor.

IV.

Will man aber zwei Gröfsen x und y zugleich durch eine Anzahl von Beobachtungen bestimmen, so haben die Bedingungsgleichungen die Form

$$\begin{aligned} \varepsilon &= ax + by - \delta, \\ \varepsilon_1 &= a_1x + b_1y - \delta_1, \\ \varepsilon_2 &= a_2x + b_2y - \delta_2, \text{ u. f.} \end{aligned}$$

Nennt man dann $K = \int a^2 \int b^2 - (\int ab)^2$, so sind die wahrscheinlichsten Werthe von x und y, die wir durch X und Y bezeichnen,

$$X = \frac{\int b^2 \int a\delta - \int ab \int b\delta}{K} \text{ und } Y = \frac{\int a^2 \int b\delta - \int ab \int a\delta}{K}.$$

Sey nun

$$\begin{aligned} \varepsilon &= aX + bY - \delta, \\ \varepsilon_1 &= a_1X + b_1Y - \delta_1, \\ \varepsilon_2 &= a_2X + b_2Y - \delta_2, \text{ u. s. w.,} \end{aligned}$$

so ist das Gewicht der vorhergehenden Bestimmung des wahrscheinlichsten Werthes von X und Y

$$P_x = \frac{N}{2} \cdot \frac{K}{\int b^2 \int \varepsilon^2} \quad \text{und} \quad P_y = \frac{N}{2} \cdot \frac{K}{\int a^2 \int \varepsilon^2}.$$

Die wahrscheinlichsten Fehler dieser beiden Resultate aber sind

$$\text{für } X \ldots F_x = \frac{0.47694}{\sqrt{P_x}},$$

$$\text{und für } Y \ldots F_y = \frac{0.47694}{\sqrt{P_y}}.$$

Die Genauigkeit dieser beiden Bestimmungen aber ist

$$\text{für } X \ldots G_x = \sqrt{\frac{K}{\int b^2}},$$

$$\text{und für } Y \ldots G_y = \sqrt{\frac{K}{\int a^2}}.$$

Endlich ist der Fehler jeder einzelnen Beobachtung

$$f = 0.47694 \sqrt{\frac{2 \int \varepsilon^2}{N}}.$$

Ex. Sind die Bedingungsgleichungen gegeben:

$$\varepsilon = x + y - 3,$$
$$\varepsilon_1 = x - 2y + 4,$$
$$\varepsilon_2 = 3x = y - 2,$$

so hat man

$$\int a^2 = 11, \quad \int b^2 = 6, \quad \int ab = -4, \quad \int b\delta = 9, \quad \int a\delta = 5$$
$$\text{und} \quad K = 50,$$

also sind die wahrscheinlichsten Werthe

$$\text{von } x \ldots X = 1.32000,$$
$$\text{und von } y \ldots Y = 2.38000.$$

Damit findet man $\varepsilon = 0.70$, $\varepsilon_1 = 0.56$, $\varepsilon_2 = -0.42$ und $\int \varepsilon^2 = 0.9800$, also auch

$$P_x = 12.755, \qquad P_y = 6.957,$$
$$F_x = 0.133, \qquad F_y = 0.181,$$
$$G_x = 2.887, \qquad G_y = 2.132,$$
$$f = F_x G_x = F_y G_y = 0.385.$$

Man sieht, dafs in diesem Beispiele die Gröfse X beträchtlich genauer bestimmt ist als Y, und zwar in dem Verhältnisse von 1.354 zu 1. Auch kann man, nach dem Vorhergehenden, 1000 gen 1 wetten, dafs der Fehler von X nicht gröfser als 0.67, und dafs der Fehler von Y nicht gröfser als 0.88 ist.

Hätten endlich die aufgestellten Bedingungsgleichungen z. B. die Werthe $c = 2$, $c_1 = 3$ und $c_2 = 4$, so hätte man

$$\begin{aligned} \varepsilon &= 2x + 2y - 6, \\ \varepsilon_1 &= 3x - 6y + 12, \\ \varepsilon_2 &= 12x - 4y - 8, \end{aligned}$$

und man würde mit diesen so veränderten Gleichungen ganz wie zuvor verfahren, um die Gröfsen X, Y, P_x, P_y u. s. w. zu bestimmen.

V.

Sind endlich drei Gröfsen x, y, z zugleich durch eine Reihe von Beobachtungen zu bestimmen, so haben die Bedingungsgleichungen die Form:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= ax + by + cz - \delta, \\ \varepsilon_1 &= a_1 x + b_1 y + c_1 z - \delta_1, \\ \varepsilon_2 &= a_2 x + b_2 y + c_2 z - \delta_2, \text{ u. f.} \end{aligned}$$

Dieſs vorausgesetzt, findet man die wahrscheinlichsten Werthe X, Y, Z dieser drei Gröfsen durch die Elimination aus den drei Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} 0 &= X\int a^2 + Y\int ab + Z\int ac - \int a\delta, \\ 0 &= X\int ab + Y\int b^2 + Z\int bc - \int b\delta, \\ 0 &= X\int ac + Y\int bc + Z\int c^2 - \int c\delta. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Kennt man so die Werthe von X, Y und Z, so sucht man die Gröfsen ε, ε_1, ε_2 . . . aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} \varepsilon &= aX + bY + cZ - \delta, \\ \varepsilon_1 &= a_1 X + b_1 Y + c_1 Z - \delta_1, \text{ u. f.,} \end{aligned}$$

und man hat für die Gewichte dieser drei Bestimmungen

$$P_x = \frac{N}{2\int\varepsilon^2} \cdot \frac{K}{\int b^2 \int c^2 - (\int bc)^2},$$

$$P_y = \frac{N}{2\int\varepsilon^2} \cdot \frac{K}{\int a^2 \int c^2 - (\int ac)^2},$$

$$P_z = \frac{N}{2\int\varepsilon^2} \cdot \frac{K}{\int a^2 \int b^2 - (\int ab)^2},$$

wo der Kürze wegen gesetzt wurde

$$K = \int a^2 . \int b^2 . \int c^2 - \int a^2 . (\int bc)^2 - \int b^2 . (\int ac)^2 - \int c^2 . (\int ab)^2 + 2 \int ab . \int ac . \int bc.$$

Die wahrscheinlichsten Fehler dieser drei Resultate X, Y, Z sind

$$F_x = \frac{0.47694}{\sqrt{P_x}}, \quad F_y = \frac{0.47694}{\sqrt{P_y}}, \quad F_z = \frac{0.47694}{\sqrt{P_z}},$$

und die Präcision dieser drei Bestimmungen ist

$$G_x = \sqrt{\frac{2P_x . \int\varepsilon^2}{N}}, \quad G_y = \sqrt{\frac{2P_y . \int\varepsilon^2}{N}}, \quad G_z = \sqrt{\frac{2P_z . \int\varepsilon^2}{N}}$$

Endlich ist der wahrscheinliche Fehler jeder einzelnen Beobachtung

$$f = 0.47694 \sqrt{\frac{2\int\varepsilon^2}{N}}.$$

Ex. Seyen die Bedingungsgleichungen gegeben

$$\begin{aligned} \varepsilon &= x + y - 2z - 1, \\ \varepsilon_1 &= x - 3y + z - 3, \\ \varepsilon_2 &= 2x + y - 3z - 2, \\ \varepsilon_3 &= x - 4y + z - 3, \end{aligned}$$

so hat man

$$\begin{aligned} \int a^2 &= 7, & \int ab &= -4, & \int bc &= -12, \\ \int b^2 &= 27, & \int ac &= -6, & \int b\delta &= -18, \\ \int c^2 &= 15, & \int a\delta &= +11, & \int c\delta &= -2, \end{aligned}$$

und daher die Gleichungen (1)

$$\begin{aligned} 0 &= 7X - 4Y - 6Z - 11, \\ 0 &= 4X - 27Y + 12Z - 18, \\ 0 &= 6X + 12Y - 15Z - 2, \end{aligned}$$

woraus sofort die gesuchten wahrscheinlichsten Werthe folgen:

$$X = 1.9231, \quad Y = -0.1538, \quad Z = 0.5128.$$

Mit diesen Werthen aber erhält man

$$\varepsilon = -0.2563,$$
$$\varepsilon_1 = -0.1027,$$
$$\varepsilon_2 = +0.1540,$$
$$\varepsilon_3 = +0.0511,$$

also $f\varepsilon^2 = 0.1025$ und $K = 39$.

Man hat daher für die Gewichte dieser drei Bestimmungen:

$$P_x = 2.914, \quad P_y = 11.021, \quad P_z = 4.396.$$

Für die wahrscheinlichsten Fehler dieser drei Resultate erhält man

$$F_x = 0.279, \quad F_y = 0.144, \quad F_z = 0.227,$$

und für die Präcision dieser Bestimmungen

$$G_x = 0.386, \quad G_y = 0.752, \quad G_z = 0.475.$$

Endlich ist der wahrscheinlichste Fehler jeder einzelnen Beobachtung

$$f = 0.108.$$

Die Verläfslichkeit dieser drei Bestimmungen ist der Art, dafs man 1000 gen 1 wetten kann, dafs der Fehler

von X kleiner als 1.36,
» Y » » 0.70,
» Z » » 1.11

ist, so dafs also die Gröfse Y unter allen am besten, und beinahe doppelt so sicher als X bestimmt ist.

Wären die gegebenen Bedingungsgleichungen von verschiedenem Werthe, und z. B. der Werth der ersten doppelt so grofs als der aller übrigen, so würde man statt der ersten die Gleichung

$$\varepsilon = 2x + 2y - 4z - 2$$

setzen, und die übrigen ungeändert lassen, und endlich diese Gleichungen nach dem so eben gezeigten Verfahren behandeln.

Es wird nicht nothwendig seyn, diese Ausdrücke auf mehr als drei Gröſsen fortzuführen, da die bisher angegebenen Fälle bei weitem am häufigsten vorkommen. Die Gründe der hier aufgestellten Ausdrücke wird man übrigens leicht aus den schönen Abhandlungen ableiten können, welche Hr. Dr. *Hauber* über diesen Gegenstand in diesen Blättern mitgetheilt hat.

IV.

Über die perspectivischen Projectionen der Erd- und Himmelskarten;

von

J. J. Littrow.

Diese Projectionen geben bekannlich die Abbildung der Oberfläche einer Kugel auf einer Ebene, wie diese Oberfläche einem Auge erscheinen würde, welches die Kugel aus irgend einem gegebenen Puncte betrachtet. Gewöhnlich steht die Projectionsebene auf demjenigen Durchmesser der Kugel senkrecht, welche den Mittelpunct derselben mit dem Auge des Beobachters verbindet; eine Voraussetzung, die wir auch hier annehmen wollen.

Man kennt bisher nur drei dieser Projectionsarten. In der *orthographischen* Projection steht das Auge in einer unendlichen Entfernung von der Kugel, und die Projectionsebene berührt die Kugel auf ihrer vorderen oder hinteren Seite. In der *stereographischen* Projection

ist das Auge in der Oberfläche der Kugel, und die Projectionsebene geht durch den Mittelpunct derselben. In der *centralen* Projection endlich ist das Auge im Mittelpuncte der Kugel, und die Projectionsebene berührt dieselbe.

Alle Schriften, welche diesen Gegenstand behandeln, haben, so viel mir bekannt, nur diese drei Gattungen von perspectivischen Projectionen und überdiefs jede derselben abgesondert betrachtet, als ob sie nichts unter sich gemein hätten. Es ist aber leicht, nicht nur diese drei, sondern überhaupt alle möglichen perspectivischen Projectionen unter einen gemeinschaftlichen Gesichtspunct zu bringen, und dadurch von dem hieher gehörenden Probleme eine allgemeine Auflösung zu geben.

Sey C (Fig. 30) der Mittelpunct der abzubildenden Kugel, z. B. der Erde, und P der eine Pol des Äquators derselben. Den Halbmesser dieser Kugel wollen wir für die Einheit annehmen. Auf dem verlängerten Durchmesser EZ der Kugel nehme man $CA=a$ und $CB=b$, wo a der Ort des Auges und B der Ort ist, wo die Projectionsebene Bnm, die auf ACB senkrecht steht, diese Linie ACB schneidet.

Sey M irgend ein Punct der Oberfläche der Kugel, dessen Projection m man sucht. Der Punct M sey durch seine Äquatorshöhe $PM=90-\varphi$ und durch seine geographische Länge $ZPM=\lambda$ gegeben, wo PZ irgend ein Meridian der Erde ist, den man hier als den ersten betrachtet, oder von dem man die geographischen Längen zu zählen anfängt. Die Entfernung des Punctes Z der Kugel, der von dem Auge A am meisten absteht, von dem Pole P sey durch den Bogen $PZ=\alpha$ gegeben, und überdiefs sey $ZM=\theta$ und $PZM=\psi$.

Dieses vorausgesetzt, schneide die Ebene, durch

$ACZP$ verlängert, die Projectionsebene in der Linie Bn, welche Linie wir für die Axe der x annehmen wollen. Eben so schneide die Ebene $ACZM$ die Projectionsebene in der Linie Bm, wo m, wie bereits erinnert, die Projection von M ist. Man ziehe in der Projectionsebene die Linie mn senkrecht auf Bn, und setze $Bn = x$ und $nm = y$.

Nach diesen Vorbereitungen reducirt sich daher unser Problem darauf, die Gröfsen x und y oder die Coordinaten der Projection des Punctes M durch die geographische Länge λ und Breite φ dieses Punctes und durch die gegebenen Gröfsen des Problems auszudrücken.

Zu diesem Zwecke suche man zuerst die Linie Bm. In dem Dreiecke DCM hat man $D + M = ACD + MCZ$, oder da $D = M$ und $MCZ = \theta$ ist, $D = \frac{1}{2}(\theta + ACD)$. Da aber AZ und AM zwei Secanten der Kugel sind, so ist der Winkel

$$A = \tfrac{1}{2}(\text{Bog. } ZM - \text{Bog. } DE) = \tfrac{1}{2}(\theta - ACD),$$

woraus folgt

$$D = \theta - A \quad \text{und} \quad ADC = 180 - D = 180 - (\theta - A).$$

Weiter hat man in dem Dreiecke ACD

$$\sin. ADC = a \sin. A \quad \text{oder} \quad \sin.(\theta - A) = a \sin. A,$$

oder endlich

$$\text{tang. } A = \frac{\sin. \theta}{a + \cos. \theta},$$

und daher die gesuchte Linie

$$Bm = BA \,.\, \text{tang. } A = \frac{(a+b) \sin. \theta}{a + \cos. \theta}.$$

Ist so die Gröfse von Bm bekannt, so hat man, da ihre Lage durch den Winkel $mBn = 180 - \psi$ gegeben ist,

$$x = -Bm \cos. \psi \quad \text{und} \quad y = Bm \sin. \psi,$$

oder wenn man substituirt,

$$x = -\frac{(a+b)\sin.\theta\cos.\psi}{a+\cos.\theta} \quad \text{und} \quad y = \frac{(a+b)\sin.\theta\sin.\psi}{a+\cos.\theta}.$$

Auf diese Weise sind die gesuchten Coordinaten x und y der Projection von M durch die Gröfsen θ und ψ ausgedrückt. Zu unserem Zwecke sollen sie aber durch die gegebenen Gröfsen λ und φ ausgedrückt werden. Um diese Transformation zu erhalten, hat man in dem sphärischen Dreiecke PZM

$$\begin{aligned}\cos.\theta &= \cos.\alpha\sin.\varphi + \sin.\alpha\cos.\varphi\cos.\lambda,\\ \sin.\theta\cos.\psi &= \sin.\alpha\sin.\varphi - \cos.\alpha\cos.\varphi\cos.\lambda,\\ \sin.\theta\sin.\psi &= \cos.\varphi\sin.\lambda.\end{aligned}$$

Substituirt man diese Ausdrücke in den vorhergehenden Werthen von x und y, so erhält man

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{(a+b)(\cos.\alpha\cos.\varphi\cos.\lambda - \sin.\alpha\sin.\varphi)}{a+\sin.\alpha\cos.\varphi\cos.\lambda+\cos.\alpha\sin.\varphi}\\ y &= \frac{(a+b)\cos.\varphi\sin.\lambda}{a+\sin.\alpha\cos.\varphi\cos.\lambda+\cos.\alpha\sin.\varphi},\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (1)$$

und dieſs sind die *allgemeinen* Ausdrücke für jede perspectivische Projection.

Für die orthographische Projection hat man, da nach der oben gegebenen Erklärung derselben das Auge in einer unendlichen Entfernung von der Kugel steht, und die Tafel durch den Punct Z geht, $a=\infty$ und $b=\pm 1$, also auch aus den Gleichungen (1)

$$\begin{aligned}x &= \pm(\cos.\alpha\cos.\varphi\cos.\lambda - \sin.\alpha\sin.\varphi),\\ y &= \pm\cos.\varphi\sin.\lambda,\end{aligned}$$

das obere oder untere Zeichen, wenn die Projectionstafel die Kugel auf der von dem Auge abgewendeten oder auf der dem Auge zugekehrten Seite berührt.

Für die stereographische Projection ist das Auge in E und die Tafel in C, also $a=1$ und $b=0$, und daher

$$x = \frac{\cos.\alpha \cos.\varphi \cos.\lambda - \sin.\alpha \sin.\varphi}{1 + \sin.\alpha \cos.\varphi \cos.\lambda + \cos.\alpha \sin.\varphi},$$

$$y = \frac{\cos.\varphi \sin.\lambda}{1 + \sin.\alpha \cos.\varphi \cos.\lambda + \cos.\alpha \sin.\varphi}.$$

Für die Centralprojection endlich ist das Auge in C und die Tafel in Z, also $a = 0$ und $b = 1$, und daher

$$x = \frac{\cos.\alpha \cos.\varphi \cos.\lambda - \sin.\alpha \sin.\varphi}{\sin.\alpha \cos.\varphi \cos.\lambda + \cos.\alpha \sin.\varphi},$$

$$y = \frac{\cos.\varphi \sin.\lambda}{\sin.\alpha \cos.\varphi \cos.\lambda + \cos.\alpha \sin.\varphi},$$

welche Ausdrücke mit den für diese drei Projectionen bisher gegebenen übereinstimmen. Es ist aber für sich klar, dafs die allgemeinen Gleichungen (1) noch mehrere, und überhaupt alle möglichen perspectivischen Projectionsarten enthalten, die man durch die verschiedenen Werthe erhalten wird, welche man den Gröfsen a und b geben kann.

Setzt man dann in den so erhaltenen Ausdrücken die Gröfse $\alpha = 0$, so geben jene Gleichungen die sogenannte Polarprojection, wo Z der Pol des Äquators ist. Setzt man aber $\alpha = 90^0$, so erhält man die Äquatorialprojection, für welche das Auge in der Ebene des Äquators steht. Eliminirt man aus den Gleichungen (1) die Gröfse λ, so erhält man die Gleichung für die Projectionen der Parallelkreise zwischen den Coordinaten x und y, und eliminirt man aus ihnen die Gröfse φ, so erhält man die Gleichungen der Projectionen der Meridiane; Eliminationen, die man leicht ausführen kann, die ich aber hier, als nicht zu meinem Zweck gehörend, übergehe.

V.

Analytische Optik;

von

L. Schleiermacher,

Grofsherzogl. Hessisch. Oberfinanzrath in Darmstadt.

(Fortsetzung.)

Glieder der dritten Ordnung, welche sich auf die Abweichung wegen der Gestalt beziehen.

10) Die Glieder der zweiten Ordnung reichen gewöhnlich hin, um die Abweichung wegen der Gestalt auf eine sehr genäherte Weise zu berechnen, so dafs man sich erlauben kann, die Glieder aller folgenden Ordnungen zu vernachlässigen.

Indessen erfordert die Theorie der achromatischen Objective, wie ich bereits oben gesagt habe, dafs man die Entwickelung bis zu den Gliedern der dritten Ordnung fortsetzt. Da aber hierdurch sehr weitläuftige Rechnungen herbeigeführt werden, so kann man sich begnügen, nur diejenigen Glieder der dritten Ordnung zu berechnen, welche merkliche Werthe erhalten. Zu diesem Ende bemerke ich zuerst, dafs diejenigen von dem Objective herrührenden Glieder, welche $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}$ enthalten, mit der Vergröfserung multiplicirt sind und hierdurch viel gröfser werden, als diejenigen, welche mit $\mathfrak{b}$ oder $\mathfrak{f}$ multiplicirt sind. Man kann daher diese letztern in den Gröfsen der dritten Ordnung vernachlässigen. Um jedoch den Einfluſs, welchen eine Veränderung in der Entfernung des durch das Instrument betrachteten Gegenstandes auf die Abweichungen äufsert, mit gröfserer Genauigkeit berechnen zu können, werde

ich alle Glieder der dritten Ordnung beibehalten, welche mit $\Delta\frac{1}{c_1}$ multiplicirt sind, und selbst diejenigen hinzufügen, welche das Quadrat dieser Gröfse enthalten, ohne zugleich von $\mathfrak{b}$ oder $\mathfrak{f}$ abzuhängen. Da ferner die achromatischen Objective aus Linsen bestehen, deren Dicke und Entfernung von einander sehr gering ist, so kann man in Bezug auf das Objectiv bei den Gliedern der dritten. Ordnung die Entfernung der auf einander folgenden brechenden Flächen vernachlässigen, welche in dem Vorhergehenden mit dem Buchstaben d bezeichnet worden sind. Endlich vernachlässige ich alle Glieder der dritten Ordnung, welche von den Ocularen, d. h. von allen auf das Objectiv folgenden brechenden Flächen herrühren, indem diese Glieder als zur vierten Ordnung gehörig betrachtet werden können.

Untersucht man daher nur die Lage der Strahlen in der Nähe des letzten Bildes, in welchem Falle die Gleichungen (d) von Nro. 5 ihre Anwendung finden, so folgt aus dem eben Gesagten, dafs es hinreicht, die Gröfsen $\Delta^2\frac{1}{g_i}$ und $\left(Y\Delta^2\frac{1}{g} - \Delta^2\frac{f}{g}\right)_i$ zu berechnen, indem man alle Glieder vernachlässigt, welche sich eines Theils auf das Objectiv beziehen und mit $\mathfrak{b}$ oder $\mathfrak{f}$ multiplicirt, von $\Delta\frac{1}{c_1}$ aber unabhängig sind, andern Theils von den folgenden brechenden Flächen herrühren.

11) Die Berechnung von $\Delta^2\frac{1}{g_i}$ fange ich damit an, dafs ich die Gröfse $\mathfrak{G}$, welche durch den Ausdruck (d) von Nro. 2 gegeben ist, in eine Reihe entwickle, die nach steigenden Potenzen von $\mathfrak{Z}$ und den zu derselben Ordnung gehörigen Gröfsen geordnet ist. Da $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{w}$ von der ersten Dimension in Bezug auf diese Gröfsen

sind, so hat man, wenn man nur das Quadrat derselben beibehält,

$$\mathfrak{G} = (\mathfrak{k}+\mathfrak{h})(t-\mathfrak{w}) - \frac{\mathfrak{k}}{n}\left(\frac{\mathfrak{u}}{2}-\mathfrak{w}\right) - \frac{\mathfrak{Z}}{\mathfrak{g}^2}$$
$$+ \frac{\mathfrak{k}\mathfrak{u}^2}{8n} - \mathfrak{w}\left[(\mathfrak{k}+\mathfrak{h})(t-\mathfrak{w}) - \frac{\mathfrak{k}}{n}\left(\frac{\mathfrak{u}}{2}-\mathfrak{w}\right)\right] - \frac{\mathfrak{Z}^2}{\mathfrak{g}^3}.$$

Eine erste Näherung gibt aber mit Vernachlässigung des Quadrats der zur Ordnung von $\mathfrak{Z}$ gehörigen Gröfsen:

$$\frac{1}{\mathfrak{g}} = \mathfrak{k}+\mathfrak{h} - \frac{\mathfrak{k}}{n} + \mathfrak{G}$$
$$= \mathfrak{k}+\mathfrak{h} - \frac{\mathfrak{k}}{n} + (\mathfrak{k}+\mathfrak{h})(t-\mathfrak{w}) - \frac{\mathfrak{k}}{n}\left(\frac{\mathfrak{u}}{2}-\mathfrak{w}\right) - \frac{\mathfrak{Z}}{\mathfrak{g}^2},$$

folglich

$$\frac{\mathfrak{Z}}{\mathfrak{g}^2} = \mathfrak{Z}\left(\mathfrak{k}+\mathfrak{h}-\frac{\mathfrak{k}}{n}\right)^2$$
$$+ \frac{2\mathfrak{Z}}{\mathfrak{g}}\left[(\mathfrak{k}+\mathfrak{h})(t-\mathfrak{w}) - \frac{\mathfrak{k}}{n}\left(\frac{\mathfrak{u}}{2}-\mathfrak{w}\right) - \frac{\mathfrak{Z}}{\mathfrak{g}^2}\right].$$

Substituirt man diesen Werth in dem vorhergehenden Ausdrucke von $\mathfrak{G}$, und verwechselt t, $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{w}$ mit $(t+t')$, $(\mathfrak{u}+u')$ und $(\mathfrak{w}+w')$, so dafs künftig unter t, $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{w}$ die Gröfsen von der Ordnung $\mathfrak{Z}$, unter t', u' und w' dagegen die von der Ordnung $\mathfrak{Z}^2$ verstanden werden, so erhält man:

$$\mathfrak{G} = (\mathfrak{k}+\mathfrak{h})(t-\mathfrak{w}) - \frac{\mathfrak{k}}{n}\left(\frac{\mathfrak{u}}{2}-\mathfrak{w}\right) - \mathfrak{Z}\left(\mathfrak{k}+\mathfrak{h}-\frac{\mathfrak{k}}{n}\right)^2$$
$$+ (\mathfrak{k}+\mathfrak{h})(t'-w') - \frac{\mathfrak{k}}{n}\left(\frac{u'}{2}-w'\right) + \frac{\mathfrak{k}\mathfrak{u}^2}{8n}$$
$$- \left(\mathfrak{w}+\frac{2\mathfrak{Z}}{\mathfrak{g}}\right)\left[(\mathfrak{k}+\mathfrak{h})(t-\mathfrak{w}) - \frac{\mathfrak{k}}{n}\left(\frac{\mathfrak{u}}{2}-\mathfrak{w}\right)\right] + \frac{\mathfrak{Z}^2}{\mathfrak{g}^3}$$

Die erste Zeile ist der Werth von G unter der Bedingung, dafs darin alle lateinischen Buchstaben mit den correspondirenden deutschen verwechselt, d. h. dafs allen durch die erste Näherung erhaltenen Gröfsen ihre mit der Charakteristik Δ bezeichneten Correctionen zugesetzt werden. Nach der angenommenen Bezeichnung

ist daher jene erste Zeile $= G + \Delta G$. Ferner kann man in den Gliedern von der Ordnung 3^2 die deutschen Buchstaben mit lateinischen verwechseln. Setzt man daher zur Abkürzung

$$G' = (k+h)(t'-w') - \frac{k}{n}\left(\frac{u'}{2} - w'\right) + \frac{k u^2}{8n}$$
$$-\left(w + \frac{2Z}{g}\right)\left[(k+h)(t-w) - \frac{k}{n}\left(\frac{u}{2} - w\right)\right] + \frac{Z^2}{g^3} \quad \text{(a)}$$

so wird

$$\mathfrak{G} = G + \Delta G + G' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(b)}$$

Der Werth von G ist durch die Formel (b) von Nro. 7 gegeben, nämlich

$$G = -\left[A \cdot 2aZ + BY\frac{hb}{n} + C\left(\frac{hb}{n}\right)^2\right].$$

Hieraus erhält man, wenn man alle Gröfsen um ihre mit der Charakteristik Δ bezeichneten Correctionen variiren läfst:

$$\Delta G = -\left\{\begin{array}{l} 2aZ\Delta A + Y\frac{hb}{n}\Delta B + \left(\frac{hb}{n}\right)^2 \Delta C \\ + A \cdot 2a\Delta Z + B\frac{hb}{n}\Delta Y \\ + \left(\frac{BY}{n} + \frac{2Chb}{n^2}\right)\Delta hb. \end{array}\right\} \quad . \quad \text{(c)}$$

Die Formeln (a) von Nro. 7 zeigen, dafs A, B und C Functionen von h und k sind, und da die letztere Gröfse selbst eine Function von h ist, so kann man, wenn man sie als eine solche behandelt, A, B und C als Functionen von h allein betrachten. Nach der in Nro. 10 gemachten Bemerkung sollen aber den Gliedern der dritten Ordnung noch diejenigen zugesetzt werden, welche das Quadrat von $\Delta\frac{1}{c_1}$ enthalten, und von b unabhängig sind, man mufs daher die Entwickelung von ΔA bis zu demjenigen Gliede fortsetzen, welches mit

Δh^2 multiplicirt ist, und woraus jene Glieder entspringen. Diefs vorausgesetzt, entwickle ich ΔA, ΔB und ΔC durch die *Taylor*'sche Reihe, und setze zur Abkürzung

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{dA}{dh}\right) &= \frac{(A)}{n},\\ \left(\frac{d\,dA}{2\,dh^2}\right) &= \frac{(A')}{n^2},\\ \left(\frac{dB}{dh}\right) &= \frac{(B)}{n},\\ \left(\frac{dC}{dh}\right) &= \frac{(C)}{n},\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (d)$$

diefs gibt

$$\Delta A = \frac{(A)}{n}\Delta h + \frac{(A')}{n^2}\Delta h^2,$$

$$\Delta B = \frac{(B)}{n}\Delta h,$$

$$\Delta C = \frac{(C)}{n}\Delta h.$$

Aus den Formeln (a) von Nro. 7 erhält man

$$(A) = n\left(\frac{dA}{dh}\right) =$$

$$= -\left(\frac{n-1}{2n^2}\right)\left[2k(k-nh)\left(\frac{dk}{dh}\right)+k^2\left(\left(\frac{dk}{dh}\right)-n\right)\right],$$

und da

$$k = \frac{1}{a} - \frac{1}{c} = \frac{1}{a} - h,$$

folglich

$$\left(\frac{dk}{dh}\right) = -1$$

ist, so wird der vorhergehende Ausdruck von (A)

$$(A) = \left(\frac{n-1}{2n^2}\right)k\left[(n+3)k - 2nh\right] = -\frac{Dk}{n}$$

$$= \left(\frac{n-1}{2n^2}\right)\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{c}\right)\left(\frac{n+3}{a} - \frac{3(n+1)}{c}\right). \quad (e)$$

Auf dieselbe Art findet man

$$\left.\begin{aligned}
(A') &= n^2\left(\frac{d\,d\,A}{2\,d\,h^2}\right) = \left(\frac{n-1}{2\,n}\right)\left[-(2n+3)k+nh\right] \\
&= \left(\frac{n-1}{2\,n}\right)\left[-\frac{(2n+3)}{a}+\frac{3\,(n+1)}{c}\right], \\
(B) &= n\left(\frac{d\,B}{d\,h}\right) = \left(\frac{n-1}{n}\right)\left[(n+2)\,k-nh\right] \\
&= \left(\frac{n-1}{n}\right)\left[\frac{n+2}{a}-\frac{2\,(n+1)}{c}\right], \\
(C) &= n\left(\frac{d\,C}{d\,h}\right) = \frac{n^2-1}{2}.
\end{aligned}\right\} \quad (f)$$

Durch die Annahme von $d=0$ geben die Formeln von Nro. 4:

$$\begin{aligned}
c_i &= g_{i-1}, \\
V_i &= 1, \\
K_i &= K_1, \\
\frac{h_i b_i}{n_i} &= \frac{b_i}{n_i c_i} = \frac{f_i}{g_i} = \frac{\varphi_i}{\nu_i}, \\
X_i &= X_1, \\
Y_i &= Y_1 + K_1\varphi_1, \\
Z_i &= \frac{X_1^2 + (Y_1 + K_1\varphi_1)^2}{2\,a_i},
\end{aligned}$$

und da in den Gröfsen der dritten Ordnung alle Glieder vernachlässigt werden, welche mit d multiplicirt sind, eben so wie diejenigen, welche von b oder f, nicht aber zugleich von $\Delta\frac{1}{c_1}$ abhängen, so erhält man aus (b), (f) und (g) von Nro. 7, wenn man die vorhergehenden Werthe substituirt:

$$\begin{aligned}
\Delta h_i &= \Delta\frac{1}{c_i} = \Delta\frac{1}{g_{i-1}} \\
&= \frac{1}{\nu_{i-1}}\left[\Delta\frac{1}{c_1} + \Sigma_1^{(i-1)}(G\varphi)_m\right] \\
&= \frac{1}{\nu_{i-1}}\left[\Delta\frac{1}{c_1} - (X_1^2 + (Y_1 + K_1\varphi_1)^2)\,\Sigma_1^{(i-1)}(A\varphi)_m\right] \\
&= \frac{n_i}{\nu_i}\left[\Delta\frac{1}{c_1} - L_{i-1}(X_1^2 + (Y_1 + K_1\varphi_1)^2)\right].
\end{aligned}$$

Durch die Substitution der vorhergehenden Werthe verwandeln sich die drei ersten Glieder von ΔG in folgende:

$$\left.\begin{aligned}
-(2aZ\Delta A)_i &= -[X_i^2+(\acute{Y}_1+K_1\varphi_1)^2]\times \\
&\quad\times\left[\frac{(A)i}{\nu_i}\Delta\frac{1}{c_1}+\frac{(A')i}{\nu_i^2}\left(\Delta\frac{1}{c_1}\right)^2\right] \\
&\quad+[X_i^2+(\acute{Y}_1+K_1\varphi_1)^2]^2\frac{(A)i\,L_{i-1}}{\nu_i}, \\
-\left(Y\frac{hb}{n}\Delta B\right)_i &= -(\acute{Y}_1+K_1\varphi_1)\frac{\varphi_1(B)i}{\nu_i^2}\Delta\frac{1}{c_1}, \\
-\left(\frac{h^2b^2}{n^2}\Delta C\right)_i &= -\frac{\varphi_1^2(C)i}{\nu_i^3}\Delta\frac{1}{c_1}.
\end{aligned}\right\}\ (g)$$

Die Werthe von ΔY und ΔZ sind durch die Formeln (b), (c) und (d) von Nro. 9 gegeben, worin alle Glieder vernachlässigt werden müssen, welche φ_1 ohne K_m enthalten, weil diese Glieder von $\frac{f}{g}$ herrühren, wovon ΔY ursprünglich eine Function ist, f aber in allen von $\Delta\frac{1}{c_1}$ unabhängigen Gliedern der dritten Ordnung vernachlässigt wird. Substituirt man ferner statt V_i und K_i die vorher gegebenen Werthe, so nehmen die allegirten Formeln die Gestalt an:

$$\Delta Y_i = \Delta(\acute{Y}_1+K_1\varphi_1)$$
$$+(\acute{Y}_1+K_1\varphi_1)\left[\frac{Z_1}{c_1}-\frac{Z_i}{c_i}+\Sigma^{(i-1)}\left(\left(\frac{n-1}{n}\right)kZ\right)_m\right],$$
$$\Delta X_i=\Delta X_1+X_1\left[\frac{Z_1}{c_1}-\frac{Z_i}{c_i}+\Sigma^{(i-1)}\left(\left(\frac{n-1}{n}\right)kZ\right)_m\right],$$
$$2a_i\Delta Z_i=\left[\left(\frac{X^2+Y^2}{2a}\right)^2+2X\Delta X+2Y\Delta Y\right]_i.$$

Diese Ausdrücke geben, wenn man statt Z seinen Werth substituirt, und zur Abkürzung

$$\left.\begin{aligned} J_i &= (k+h)_1 h_1 - (k+h)_i h_i \\ &\quad + \Sigma_1^{(i-1)}\left[\left(\frac{n-1}{n}\right)(k+h)\,k\right]_m \\ &= \frac{1}{a_1 c_1} - \frac{1}{a_i c_i} + \Sigma_1^{(i-1)}\left[\frac{(n-1)}{n\,a}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{c}\right)\right]_m \end{aligned}\right\} \text{(h)}$$

setzt:

$$\left.\begin{aligned} \Delta Y_i &= \Delta(\acute{Y}_1 + K_1\varphi_1) \\ &\quad + \frac{J_i}{2}(\acute{Y}_1 + K_1\varphi_1)\,[X_1^2 + (\acute{Y}_1 + K_1\varphi_1)^2], \\ \Delta X_i &= \Delta X_1 + \frac{J_i}{2} X_1 [X_1^2 + (\acute{Y}_1 + K_1\varphi_1)^2], \\ -A_i 2 a_i \Delta Z_i &= -A_i \Delta [X_1^2 + (\acute{Y}_1 + K_1\varphi_1)^2] \\ &\quad - A_i [X_1^2 + (\acute{Y}_1 + K_1\varphi_1)^2]^2 \left[J_i + \frac{(k+h)_i^2}{4}\right]. \end{aligned}\right\} \text{(i)}$$

Der vorhergehende Werth von ΔY_i zeigt, dafs das Glied $-B\frac{hb}{n}\Delta Y$, welches in ΔG vorkommt, von $\Delta\frac{1}{c_1}$ unabhängig ist, und da es b als Factor enthält, so kann es nach den angenommenen Grundsätzen vernachlässigt werden.

Die Formeln (g) von Nro. 2 geben

$$\begin{aligned} \Delta h_i b_i &= \Delta\frac{b_i}{c_i} = \Delta\frac{f_{i-1}}{g_{i-1}} \\ &= Y_{i-1}\,\Delta\frac{1}{g_{i-1}} - \left(Y\Delta\frac{1}{g} - \Delta\frac{f}{g}\right)_{i-1}. \end{aligned}$$

Durch die Voraussetzung von $d=0$ erhält man aber aus den Formeln (f) von Nro. 7, und (e) von Nro. 8:

$$\begin{aligned} Y_{i-1}\,\Delta\frac{1}{g_{i-1}} &= \frac{(\acute{Y}_1 + K_1\varphi_1)}{\nu_{i-1}}\left[\Delta\frac{1}{c_1} + \Sigma_1^{(i-1)}(G\varphi)_m\right], \\ &\quad + \left(Y\Delta\frac{1}{g} - \Delta\frac{f}{g}\right)_{i-1} = \\ &= \frac{-(\acute{Y}_1 + K_1\varphi_1)}{\nu_{i-1}}\left[\Delta\frac{1}{c_1} + \Sigma_1^{(i-1)}(G\varphi)_m\right] \\ &\quad + \frac{1}{\nu_{i-1}}\left[\Delta\varphi_1 - \Sigma_m^{(i-1)}\left(\frac{nG}{k}\right)_m \varphi_1\right], \end{aligned}$$

und folglich

$$\Delta h_i b_i = \Delta \frac{f_{i-1}}{g_{i-1}} = \frac{1}{\nu_{i-1}} \left[\Delta \varphi_1 - \sum_m^{(i-1)} \left(\frac{nG}{k}\right)_m \varphi_1 \right].$$

Das mit $\Delta h b$ multiplicirte Glied von ΔG kann daher ebenfalls vernachlässigt werden.

Ich gehe nun zur Entwickelung von G', welches durch den Ausdruck (a) gegeben ist. Da $b = 0$ angenommen wird, so erhält man aus Nro. 2:

$$\frac{1}{g} = (k+h) - \frac{k}{n},$$

$$Z = (k+h)\, aZ,$$

$$\mathfrak{l} = \left(\frac{k}{n}\right)^2 2aZ - \frac{(k+h)^2 k^2 a^2 Z^2}{n^2},$$

$$\mathfrak{m} = -kh \,.\, 2aZ,$$

$$t = -2aZ \left[\frac{(k+h)^2}{2} + kh\right],$$

$$u = -2aZ \left[kh + \left(\frac{k}{n}\right)^2\right],$$

$$w = -2aZ \left[(k+h)^2 + kh + \left(\frac{k}{n}\right)^2\right],$$

$$t' = 2a^2 Z^2 (k+h)^2 kh,$$

$$u' = a^2 Z^2 (k+h)^2 \left(\frac{k}{n}\right)^2,$$

$$w' = a^2 Z^2 (k+h)^2 \left[(k+h)^2 + 4kh + \left(\frac{k}{n}\right)^2\right],$$

$$(k+h)(t-w) = aZ(k+h)\left[(k+h)^2 + 2\left(\frac{k}{n}\right)^2\right],$$

$$-\frac{k}{n}\left(\frac{u}{2} - w\right) = -aZ\left(\frac{k}{n}\right)\left[2(k+h)^2 + kh + \left(\frac{k}{n}\right)^2\right],$$

$$-\left(w + \frac{2Z}{g}\right) = 2aZ\left[kh + (k+h)\left(\frac{k}{n}\right) + \left(\frac{k}{n}\right)^2\right].$$

Hieraus folgen die Werthe der verschiedenen Glieder, welche in dem allegirten Ausdrucke von G' vorkommen, nämlich

$$(k+h)(t' - w') =$$

$$= -a^2 Z^2 (k+h)^3 \left[(k+h)^2 + 2kh + \left(\frac{k}{n}\right)^2\right],$$

$$-\frac{k}{n}\left(\frac{u'}{2}-w'\right)=$$

$$=a^2Z^2(k+h)^2\left(\frac{k}{n}\right)\left[(k+h)^2+4kh+\tfrac{1}{2}\left(\frac{k}{n}\right)^2\right],$$

$$\frac{ku^2}{8n}=a^2Z^2\left(\frac{k}{n}\right)\left[\frac{k^2h^2}{2}+kh\left(\frac{k}{n}\right)^2+\tfrac{1}{2}\left(\frac{k}{n}\right)^4\right],$$

$$-\left(w+\frac{2Z}{g}\right)(k+h)(t-w)=$$

$$=a^2Z^2(k+h)\begin{cases}2kh(k+h)^2+2(k+h)^3\left(\frac{k}{n}\right)\\+\left[2(k+h)^2+4kh\right]\left(\frac{k}{n}\right)^2\\+4(k+h)\left(\frac{k}{n}\right)^3+4\left(\frac{k}{n}\right)^4,\end{cases}$$

$$\left(w+\frac{2Z}{g}\right)\frac{k}{n}\left(\frac{u}{2}-w\right)=$$

$$=-a^2Z^2\left(\frac{k}{n}\right)\begin{cases}4kh(k+h)^2+2k^2h^2\\+\left[4(k+h)^3+2kh(k+h)\right]\left(\frac{k}{n}\right)\\+\left[4(k+h)^2+4kh\right]\left(\frac{k}{n}\right)^2\\+2(k+h)\left(\frac{k}{n}\right)^3+2\left(\frac{k}{n}\right)^4,\end{cases}$$

$$\frac{Z^2}{g^2}=a^2Z^2(k+h)^2\left[(k+h)^3-3(k+h)^2\left(\frac{k}{n}\right)\right.$$
$$\left.+3(k+h)\left(\frac{k}{n}\right)^2-\left(\frac{k}{n}\right)^3\right].$$

Durch die Vereinigung dieser Glieder erhält man den folgenden Werth von G'

$$G'=a^2Z^2\begin{cases}-\frac{3}{2}k^2h^2\left(\frac{k}{n}\right)+2kh(k+h)\left(\frac{k}{n}\right)^2\\-\frac{1}{2}\left[(k+h)^2+6kh\right]\left(\frac{k}{n}\right)^3\\+2(k+h)\left(\frac{k}{n}\right)^4-\frac{3}{2}\left(\frac{k}{n}\right)^5.\end{cases}$$

Setzt man zur Abkürzung

$$F = \frac{k^2}{8n^2}\left\{\begin{array}{l} -(k+h)^2\,[k-(n-1)\,h] \\ +\frac{k}{n^3}(k+n^2h)^2 + \frac{2(n-1)^2}{n^3}k(k-nh)^2 \end{array}\right\}$$

$$= \frac{1}{8n^2}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{c}\right)^2\left\{\begin{array}{l} -\frac{1}{a^2}\left(\frac{1}{a}-\frac{n}{c}\right) \\ +\frac{1}{n^3}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{c}\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{n^2-1}{c}\right)^2 \\ +\frac{2(n-1)^2}{n^3}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{c}\right)\times \\ \qquad\times\left(\frac{1}{a}-\frac{(n+1)}{c}\right)^2, \end{array}\right\} \quad \text{(k)}$$

und bemerkt, dafs

$$\left(\frac{n-1}{2n^3}\right)k^2(k-nh) = A,$$

$$a_i^2 Z_i^2 = \frac{[X_i^2+(Y_1'+K_1\varphi_1)^2]^2}{4}$$

ist, so kann der vorhergehende Ausdruck von G', auf die i^{te} Fläche bezogen, unter die Gestalt gebracht werden:

$$G_i' = [X_i^2+(Y_1'+K_1\varphi_1)^2]^2\left[-F+\frac{A(k+h)^2}{4}\right]_i.$$

Vereinigt man daher diesen Werth mit den in (g) und (i) gefundenen Gliedern von ΔG, setzt

$$\left.\begin{array}{l} (L)^{(i)} = (A)_i, \\ (M)^{(i)} = 2(A)_i K_1 + \frac{(B)_i}{\nu_i}, \\ (N)^{(i)} = (A)_i K_1^2 + \frac{(B)_i K_1}{\nu_i} + \frac{(C)_i}{\nu_i^2}, \\ (L')^{(i)} = \frac{(A')_i}{\nu_i}, \\ (M')^{(i)} = \frac{2(A')_i K_1}{\nu_i}, \\ (N')^{(i)} = \frac{(A')_i K_1^2}{\nu_i}, \\ Q^{(i)} = F_i\nu_i + A_i\nu_i J_i - (A)_i L_{i-1}, \end{array}\right\} \quad \text{(l)}$$

und multiplicirt alle Glieder durch V_i^2, welches durch die Voraussetzung von $d = 0$ der Einheit gleich wird, so erhält man

$$\Delta G_i + G_i' =$$

$$= -\frac{V_i^2}{\nu_i} \left\{ \begin{array}{l} A_i \nu_i \Delta [X_i^2 + (\acute{Y}_1 + K_1 \varphi_1)^2] \\ + \left[(L)^{(i)} \Delta \frac{1}{c_1} \right. \\ \qquad \left. + (L')^{(i)} \left(\Delta \frac{1}{c_1} \right)^2 \right] (X_i^2 + \acute{Y}_i^2) \\ + \left[(M)^{(i)} \Delta \frac{1}{c_1} + (M')^{(i)} \left(\Delta \frac{1}{c_1} \right)^2 \right] \acute{Y}_1 \varphi_1 \\ + \left[(N)^{(i)} \Delta \frac{1}{c_1} + (N')^{(i)} \left(\Delta \frac{1}{c_1} \right)^2 \right] \varphi_i^2 \\ + Q^{(i)} [X_i^2 + (\acute{Y}_1 + K_1 \varphi_1)^2]^2 . \end{array} \right\} \text{(m)}$$

Da auf diese Art der Werth von $\mathfrak{G}$ vermittelst der Ausdrücke (b) und (m) gefunden ist, so kann man zur Entwickelung der Gleichung (c) von Nro. 2, nämlich

$$\frac{1}{\mathfrak{g}} = \mathfrak{k} + \mathfrak{h} - \frac{\mathfrak{k}}{n} + \mathfrak{G}$$

übergehen. Substituirt man hierin statt $\frac{1}{\mathfrak{g}}$, $(\mathfrak{k} + \mathfrak{h})$; und $\mathfrak{G}$ ihre Werthe

$$\frac{1}{\mathfrak{g}} = \frac{1}{g} + \Delta \frac{1}{g} + \Delta^2 \frac{1}{g},$$

$$\mathfrak{k} + \mathfrak{h} = \frac{1}{a} = k + h,$$

$$\mathfrak{k} = \frac{1}{a} - \frac{1}{c} = \frac{1}{a} - \frac{1}{c} - \Delta \frac{1}{c} - \Delta^2 \frac{1}{c},$$

$$\mathfrak{G} = G + \Delta G + G',$$

so gibt die Vergleichung der zur dritten Ordnung gehörigen Glieder

$$\Delta^2 \frac{1}{g} = \frac{1}{n} \Delta^2 \frac{1}{c} + \Delta G + G' \quad . \quad . \quad . \quad \text{(n)}$$

Man hat eben so

$$\Delta^2 \frac{1}{g_,} = \frac{1}{n_,} \Delta^2 \frac{1}{c_,} + \Delta G_, + G_, \quad . \quad . \quad \text{(o)}$$

Die zweite Gleichung (g) von Nro. 2 kann unter die Gestalt gebracht werden:

$$\frac{1}{c_,} = \frac{1}{g}\left(1 + \frac{d}{g}\right)^{-1}$$

oder

$$\frac{1}{c_,} + \Delta\frac{1}{c_,} + \Delta^2\frac{1}{c_,} =$$

$$= \left(\frac{1}{g} + \Delta\frac{1}{g} + \Delta^2\frac{1}{g}\right)\left(1 + \frac{d}{g} + d\,\Delta\frac{1}{g} + d\,\Delta^2\frac{1}{g}\right)^{-1}.$$

Entwickelt man den zweiten Theil dieser Gleichung, bemerkt, dafs

$$c_, = g + d$$

ist, und vergleicht die Gröfsen der zweiten und dritten Ordnung abgesondert, so erhält man

$$\left.\begin{aligned} \Delta\frac{1}{c_,} &= \frac{g^2}{c_,^2}\,\Delta\frac{1}{g}, \\ \Delta^2\frac{1}{c_,} &= \frac{g^2}{c_,^2}\,\Delta^2\frac{1}{g} - \frac{g^3}{c_,^3}\,d\left(\Delta\frac{1}{g}\right)^2. \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (p)$$

Hierdurch verwandelt sich die Gleichung (o) in folgende:

$$\Delta^2\frac{1}{g,} = \frac{g^2}{n,\,c_,^2}\,\Delta^2\frac{1}{g} + \Delta G, + G_, - \frac{g^3\,d}{n,\,c_,^3}\left(\Delta\frac{1}{g}\right)^2.$$

Sie hat dieselbe Form wie die Gleichung (e) von Nro. 7, die daselbst gebrauchte Analyse gibt daher gleichfalls das Integral derselben, welches wird:

$$\Delta^2\frac{1}{g_i} = \frac{V_i^2}{\nu_i}\left\{\begin{aligned} &\Delta^2\frac{1}{c_1} + \Sigma_1^i\frac{\nu_m}{V_m^2}\,(\Delta G + G')_m \\ &- \Sigma_1^i\frac{\nu_m\,g_{m-1}^3\,d_{m-1}}{V_m^2\,n_m\,c_m^3}\left(\Delta\frac{1}{g}\right)^2_{m-1}. \end{aligned}\right\} \quad (q)$$

Die zweite in diesem Ausdrucke enthaltene Summe besteht aus verschiedenen Gliedern, von welchen einige dem Objective, andere den folgenden Flächen angehören. Nach den angenommenen Grundsätzen werden aber die Glieder der dritten Ordnung vernachlässigt,

welche von dem Objective herrühren und mit d multiplicirt sind, in Bezug auf die folgenden Flächen dagegen ist $\Delta\frac{1}{g}$ auf eine Gröfse der dritten Ordnung reducirt, wovon das Quadrat vernachlässigt wird, man kann daher die ganze Summe weglassen. Hierdurch wird das vorhergehende Integral

$$\Delta^2\frac{1}{g_i} = \frac{V_i^2}{\nu_i}\left[\Delta^2\frac{1}{c_1} + \Sigma_1^i \frac{\nu_m}{V_m^2}(\Delta G + G')_m\right],$$

und es bleibt nur noch übrig, statt $(\Delta G + G')_m$ seinen Werth (m) zu substituiren.

Bemerkt man, dafs in Bezug auf das Objectiv

$$V_i = 1,$$

mithin

$$\Sigma_1^i A_m V_m = L_i$$

ist, so erhält man durch die in Nro. 7 eingeführte Bezeichnung:

$$\Delta^2\frac{1}{g_i} = \frac{V_i^2}{\nu_i}\left\{\begin{array}{l} \Delta^2\frac{1}{c_1} - L_i\Delta[X_1^2 + (\acute{Y}_1 + K_1\varphi_1)^2] \\ -\left[(L)_i\Delta\frac{1}{c_1} + (L')_i\left(\Delta\frac{1}{c_1}\right)^2\right](X_1^2 + \acute{Y}_1^2) \\ -\left[(M)_i\Delta\frac{1}{c_1} + (M')_i\left(\Delta\frac{1}{c_1}\right)^2\right]\acute{Y}_1\varphi_1 \\ -\left[(N)_i\Delta\frac{1}{c_1} + (N')_i\left(\Delta\frac{1}{c_1}\right)^2\right]\varphi_1^2 \\ -Q^{(i)}[X_1^2 + (\acute{Y}_1 + K_1\varphi_1)^2]^2. \end{array}\right\} \quad (r)$$

Da alle Glieder der dritten Ordnung vernachlässigt werden, welche von den auf das Objectiv folgenden Flächen herrühren, so mufs man die Gröfsen $(L)^{(m)}$ u. s. w., welche sich auf die letztern Flächen beziehen, $= 0$ setzen; oder mit andern Worten: die in den Coefficienten enthaltenen und durch das Zeichen Σ angedeuteten Summen nur auf die Flächen des Objectivs ausdehnen.

12) Um den Werth von $\left(Y\Delta^2\frac{1}{g} - \Delta^2\frac{f}{g}\right)$ zu finden, entwickle ich, wie in Nro. 8, zuerst die Gleichung (h) von Nro. 2, nämlich

$$\frac{f_,}{g_,} = \frac{g}{n,c,}\frac{f}{g} - \frac{g}{n,c,}\frac{f}{g}\frac{n,\mathfrak{G},}{\mathfrak{k},}.$$

Da die Entwickelung bis zu den Gliedern der dritten Ordnung fortgesetzt werden soll, so ist

$$\frac{f_,}{g_,} = \frac{f,}{g,} + \Delta\frac{f,}{g,} + \Delta^2\frac{f,}{g,},$$

$$\frac{f}{g} = \frac{f}{g} + \Delta\frac{f}{g} + \Delta^2\frac{f}{g},$$

$$\frac{g}{c,} = 1 - \frac{d}{c,} = \frac{g}{c,} - d\Delta\frac{1}{c,} - d\Delta^2\frac{1}{c,},$$

$$\mathfrak{G}, = G, + \Delta G, + G',$$

$$\frac{g}{n,c,}\frac{f}{g}\frac{n,\mathfrak{G},}{\mathfrak{k},} = \frac{g}{n,c,}\frac{f}{g}\frac{n,G,}{k,}$$
$$+ \frac{g}{n,c,}\frac{f}{g}\Delta\left(\frac{n,G,}{k,}\right) + \frac{G,}{k,}\Delta\left(\frac{g}{c,}\frac{f}{g}\right) + \frac{g}{c,}\frac{f}{g}\frac{G',}{k,}.$$

Substituirt man diese Werthe in der vorhergehenden Gleichung, so erhält man durch die Vergleichung der zur dritten Ordnung gehörigen Gröfsen:

$$-\Delta^2\frac{f_,}{g_,} = -\frac{g}{n,c,}\Delta^2\frac{f}{g} + \frac{d}{n,}\Delta\frac{1}{c,}\Delta\frac{f}{g}$$
$$+ \frac{d}{n,}\frac{f}{g}\Delta^2\frac{1}{c,} + \frac{g}{n,c,}\frac{f}{g}\Delta\left(\frac{n,G,}{k,}\right)$$
$$+ \frac{G,}{k,}\Delta\left(\frac{g}{c,}\frac{f}{g}\right) + \frac{g}{c,}\frac{f}{g}\frac{G',}{k,} \quad \ldots\ldots \text{(a)}$$

Die Gleichung (o) von Nro. 11, multiplicirt mit $Y_,$, gibt

$$Y,\Delta^2\frac{1}{g,} = \frac{Y,}{n,}\Delta^2\frac{1}{c,} + Y,(\Delta G, + G');$$

folglich, wenn man in dem von $\Delta^2\frac{1}{c,}$ abhängigen Gliede statt $Y_,$ seinen Werth aus (a) von Nro. 4, nämlich

$$Y_{,} = \frac{c_{,}}{g} Y - \frac{f d}{g}$$

substituirt:

$$Y_{,} \Delta^2 \frac{1}{g_{,}} = \frac{c_{,}}{n, g} Y \Delta^2 \frac{1}{c_{,}} - \frac{d}{n,} \frac{f}{g} \Delta^2 \frac{1}{c_{,}} + Y_{,} (\Delta G_{,} + G'_{,}).$$

Diese Gleichung, zu der vorhergehenden (a) addirt, gibt

$$\left(Y_{,} \Delta^2 \frac{1}{g_{,}} - \Delta^2 \frac{f_{,}}{g_{,}}\right) = \frac{c_{,}}{n, g} Y \Delta^2 \frac{1}{c_{,}} - \frac{g}{n, c_{,}} \Delta^2 \frac{f}{g}$$
$$+ Y_{,} (\Delta G_{,} + G'_{,}) + \frac{g}{n, c_{,}} \frac{f}{g} \Delta \left(\frac{n, g_{,}}{k_{,}}\right)$$
$$+ \frac{G_{,}}{k_{,}} \Delta \left(\frac{g}{c_{,}} \frac{f}{g}\right) + \frac{g}{c_{,}} \frac{f}{g} \frac{G'_{,}}{k_{,}} + \frac{d}{n,} \Delta \frac{1}{c_{,}} \Delta \frac{f}{g}.$$

Durch Substitution der in (p) von Nro. 11 gefundenen Werthe von $\Delta \frac{1}{c_{,}}$ und $\Delta^2 \frac{1}{c_{,}}$ erhält man hieraus die endliche Differenzengleichung

$$\left(Y_{,} \Delta^2 \frac{1}{g_{.}} - \Delta^2 \frac{f_{,}}{g_{,}}\right) = \frac{g}{n, c_{,}} \left(Y \Delta^2 \frac{1}{g} - \Delta \frac{f}{g}\right)$$
$$+ Y_{,} (\Delta G_{,} + G'_{,}) + \frac{g}{n, c_{,}} \frac{f}{g} \Delta \left(\frac{n, G_{,}}{k_{,}}\right)$$
$$+ \frac{G_{,}}{k_{,}} \Delta \left(\frac{g}{c_{,}} \frac{f}{g}\right) + \frac{g}{e,} \frac{f}{g} \frac{G'_{,}}{k_{,}}$$
$$- \frac{d g^2}{n, c_{,}^2} \Delta \frac{1}{g} \left(Y \Delta \frac{1}{g} - \Delta \frac{f}{g}\right).$$

Sie hat dieselbe Form wie die Gleichung (c) von Nro. 8, die daselbst gebrauchte Analyse gibt daher ihr Integral

$$\left(Y\Delta^2\frac{1}{g}-\Delta^2\frac{f}{g}\right)_i=$$

$$=\frac{V_i}{\nu_i}\left\{\begin{array}{l}(\dot{Y}_1+K_1\varphi_1)\,\Delta^2\frac{1}{c_1}-\Delta^2\varphi_1\\ +\sum_m^i\frac{\nu_m}{V_m}\left\{\begin{array}{l}Y_m(\Delta G+G')_m\\ +\frac{g_{m-1}}{n_m c_m}\left(\frac{f}{g}\right)_{m-1}\Delta\left(\frac{nG}{k}\right)_m\\ +\frac{G_m}{k_m}\Delta\left(\frac{g_{m-1}}{c_m}\frac{f_{m-1}}{g_{m-1}}\right)\\ +\frac{g_{m-1}}{c_m}\left(\frac{f}{g}\right)_{m-1}\frac{G'_m}{k_m}\\ -\frac{d_{m-1}}{n_m}\frac{g^2_{m-1}}{c^2_m}\Delta\frac{1}{g_{m-1}}\times\\ \quad\times\left(Y\Delta\frac{1}{g}-\Delta\frac{f}{g}\right)_{m-1}\end{array}\right.\end{array}\right\}\quad(b)$$

Eben so wie in Nro. 11 kann man das letzte Glied dieses Integrals weglassen, weil in Bezug auf das Objectiv alle mit d multiplicirten Glieder vernachlässigt werden, in Bezug auf die folgenden Flächen dagegen $\Delta\frac{1}{g}$ und $\left(Y\Delta\frac{1}{g}-\Delta\frac{f}{g}\right)$ auf Gröfsen der dritten Ordnung reducirt sind. Ferner werden in den Gröfsen dieser Ordnung alle mit f multiplicirten, von $\Delta\frac{1}{c_1}$ aber unabhängigen Glieder vernachlässigt, wornach auch die beiden vorletzten Glieder wegfallen. Hierdurch reducirt sich das vorhergehende Integral auf

$$\left(Y\Delta^2\frac{1}{g}-\Delta^2\frac{f}{g}\right)_i=$$

$$=\frac{V_i}{\nu_i}\left\{\begin{array}{l}(\dot{Y}_1+K_1\varphi_1)\,\Delta^2\frac{1}{c_1}-\Delta^2\varphi_1\\ +\sum_m^i\frac{\nu_m}{V_m}\left\{\begin{array}{l}Y_m(\Delta G+G')_m\\ +\frac{g_{m-1}}{n_m c_m}\left(\frac{f}{g}\right)_{m-1}\Delta\left(\frac{nG}{k}\right)_m\end{array}\right.\end{array}\right.$$

Die Formeln von Nro. 4 geben aber

$$Y_m = \frac{1}{V_m}(\acute{Y}_1 + K_m \varphi_1),$$

$$\frac{g_{m-1}}{n_m c_m}\left(\frac{f}{g}\right)_{m-1} = \frac{V_m \varphi_1}{\nu_m},$$

und in der ersten dieser Formeln kann man K_m mit K_1 verwechseln, weil sich $(\Delta G + G')$ blofs auf das Objectiv bezieht, man hat folglich

$$\left.\begin{aligned} &\left(Y\Delta^2\frac{1}{g} - \Delta^2\frac{f}{g}\right)_i = \\ &= \frac{V_i}{\nu_i}\left\{\begin{aligned} &(\acute{Y}_1 + K_1\varphi_1)\,\Delta^2\frac{1}{c_1} - \Delta^2\varphi_1 \\ &+ \Sigma_1^i\left\{\begin{aligned} &(\acute{Y}_1 + K_1\varphi_1)\,\frac{\nu_m}{V_m^2}(\Delta G + G')_m \\ &+ \varphi_1\,\Delta\left(\frac{nG}{k}\right)_m. \end{aligned}\right. \end{aligned}\right. \end{aligned}\right\} \quad (c)$$

Der Ausdruck (m) von Nro. 11 gibt aber

$$\left.\begin{aligned} &(\acute{Y}_1 + K_1\varphi_1)\,\frac{\nu_m}{V_m^2}(\Delta G + G')_m = \\ &= -\left\{\begin{aligned} &A_m\nu_m(\acute{Y}_1 + K_1\varphi_1)\,\Delta\left[X_1^2 + (\acute{Y}_1 + K_1\varphi_1)^2\right] \\ &+ \left[(L)^{(m)}\,\Delta\frac{1}{c_1} \right. \\ &\qquad \left. + (L')^{(m)}\left(\Delta\frac{1}{c_1}\right)^2\right](X_1^2 + \acute{Y}_1^2)\,\acute{Y}_1 \\ &+ \left[(L)^{(m)}\,\Delta\frac{1}{c_1} \right. \\ &\qquad \left. + (L')^{(m)}\left(\Delta\frac{1}{c_1}\right)^2\right]K_1(X_1^2 + \acute{Y}_1^2)\,\varphi_1 \\ &+ \left[(M)^{(m)}\,\Delta\frac{1}{c_1} + (M')^{(m)}\left(\Delta\frac{1}{c_1}\right)^2\right]\acute{Y}_1^2\,\varphi_1 \\ &+ \left[\left((M)^{(m)}K_1 + (N)^{(m)}\right)\Delta\frac{1}{c_1} \right. \\ &\qquad \left. + \left((M')^{(m)}K_1 + (N')^{(m)}\right)\left(\Delta\frac{1}{c_1}\right)^2\right]\acute{Y}_1\,\varphi_1 \\ &+ \left[(N)^{(m)}\,\Delta\frac{1}{c_1} + (N')^{(m)}\left(\Delta\frac{1}{c_1}\right)^2\right]K_1\varphi_1^2 \\ &+ Q^{(m)}(\acute{Y}_1 + K_1\varphi_1)\left[X_1^2 + (\acute{Y}_1 + K_1\varphi_1)^2\right]^2 \end{aligned}\right. \end{aligned}\right\} \quad (d)$$

Gebraucht man ferner die Bezeichnungen (f) von Nro. 8, so erhält man aus (b) von Nro. 7:

$$\frac{nG}{k} = -\left[BaZ + (D-C)\,Y\frac{hb}{n} + E\left(\frac{hb}{n}\right)^2\right].$$

Da $\Delta\left(\frac{nG}{k}\right)$ mit φ_1 multiplicirt ist, so gibt die vorhergehende Formel nach den in Nro. 11 entwickelten Grundsätzen:

$$\Delta\left(\frac{nG}{k}\right) = -\left\{\begin{matrix} aZ\Delta B + Y\frac{hb}{n}\Delta(D-C) \\ +\left(\frac{hb}{n}\right)^2\Delta E + Ba\Delta Z. \end{matrix}\right.$$

Man hat nach derselben Nummer, wenn man bemerkt, dafs die von $\Delta\frac{1}{c_1}$ unabhängigen Glieder vernachlässigt werden:

$$\Delta B_m = \frac{(B)_m}{\nu_m}\Delta\frac{1}{c_1},$$

$$\Delta C_m = \frac{(C)_m}{\nu_m}\Delta\frac{1}{c_1},$$

$$\Delta Z_m = 0,$$

$$\left(\frac{hb}{n}\right)_m = \frac{\varphi_1}{\nu_m},$$

$$Y_m = Y_1 + K_1\varphi_1,$$

$$a_m Z_m = \frac{X_1^2 + (Y_1 + K_1\varphi_1)^2}{2},$$

Aufserdem geben die Formeln von Nro. 8

$$\left.\begin{matrix} \Delta D_m = \left(\frac{dD}{dh}\right)_m \Delta h_m = \frac{3}{2}\left(\frac{n^2-1}{n}\right)_m \Delta h_m \\ = \frac{3(C)_m}{n_m}\Delta h_m = 3\Delta C_m, \\ \Delta E_m = \left(\frac{dE}{dh}\right)_m \Delta h_m = 0. \end{matrix}\right\} \quad \text{(e)}$$

Hierdurch wird

$$\varphi_1 \Delta \left(\frac{nG}{k}\right)_m = -\Delta \frac{1}{c_1} \left\{ \begin{array}{l} \frac{(B)_m}{2\nu_m}(X_1^2 + \acute{Y}_1^2)\varphi_1 \\ + \left[\frac{(B)_m K_1}{\nu_m} + \frac{2(C)_m}{\nu_m^2}\right] \acute{Y}_1 \varphi_1^2 \\ + \left[\frac{(B)_m K_1^2}{2\nu_m} + \frac{2(C)_m K_1}{\nu_m^2}\right] \varphi_1^3 . \end{array} \right\} \quad \text{(f)}$$

Addirt man daher die beiden Ausdrücke (d) und (f), bemerkt, dafs nach den Formeln (l) von Nro. 11

$$\frac{(B)_m}{2\nu_m} + (L)^{(m)} K_1 = \frac{(M)^{(m)}}{2},$$

$$\frac{(B)_m K_1^2}{\nu_m} + \frac{2(C)_m}{\nu_m^2} + (M)^{(m)} K_1 + (N)^{(m)} = 3(N)^{(m)},$$

$$(L')^{(m)} K_1 = \frac{(M')^{(m)}}{2},$$

$$(M')^{(m)} K_1 + (N')^{(m)} = 3(N')^{(m)}$$

ist, und setzt

$$\left. \begin{array}{l} (P)^{(m)} = (A)_m K_1^3 + \frac{3(B)_m K_1^2}{2\nu_m} + \frac{3(C)_m K_1}{\nu_m^2}, \\ (P')^{(m)} = (N')^{(m)} K_1 = \frac{(A')_m K_1^3}{\nu_m}, \end{array} \right\} \quad \text{(g)}$$

so erhält man

$$(\acute{Y}_1 + K_1\varphi_1)\frac{\nu_m}{V_m^2}(\Delta G + G')_m + \varphi_1 \Delta \left(\frac{nG}{k}\right)_m =$$

$$= -\left\{ \begin{array}{l} A_m \nu_m (\acute{Y}_1 + K_1\varphi_1) \Delta [X_1^2 + (\acute{Y}_1 + K_1\varphi_1)^2] \\ + \left[(L)^{(m)} \Delta \frac{1}{c_1} + (L')^{(m)} \left(\Delta \frac{1}{c_1}\right)^2\right] (X_1^2 + \acute{Y}_1^2)\acute{Y}_1 \\ + \left[(M)^{(m)} \Delta \frac{1}{c_1} + (M')^{(m)} \left(\Delta \frac{1}{c_1}\right)^2\right] \left(\frac{X_1^2 + 3\acute{Y}_1^2}{2}\right) \varphi_1 \\ + 3\left[(N)^{(m)} \Delta \frac{1}{c_1} + (N')^{(m)} \left(\Delta \frac{1}{c_1}\right)^2\right] \acute{Y}_1 \varphi_1^2 \\ + \left[(P)^{(m)} \Delta \frac{1}{c_1} + (P')^{(m)} \left(\Delta \frac{1}{c_1}\right)^2\right] \varphi_1^3 \\ + Q^{(m)} (\acute{Y}_1 + K_1\varphi_1)[X_1^2 + (\acute{Y}_1 + K_1\varphi_1)^2]^2 . \end{array} \right.$$

Durch Substitution dieses Werthes wird das Integral (c) nach der in Nro. 7 eingeführten Bezeichnung

$$\left(Y\Delta^2\frac{1}{g}-\Delta^2\frac{f}{g}\right)_i=$$

$$=\frac{V_i}{v_i}\left\{\begin{array}{l}(\acute{Y}_1+K_1\varphi_1)\,\Delta^2\frac{1}{c_1}-\Delta^2\varphi_1\\ -L_i\,(\acute{Y}_1+K_1\varphi_1)\,\Delta\,[X_i^2+(\acute{Y}_1+K_1\varphi_1)^2]\\ -\left[(L)_i\,\Delta\frac{1}{c_1}+(L')_i\left(\Delta\frac{1}{c_1}\right)^2\right](X_i^2+\acute{Y}_i^2)\,\acute{Y}_1\\ -\left[(M)_i\,\Delta\frac{1}{c_1}+(M')_i\left(\Delta\frac{1}{c_1}\right)^2\right]\left(\frac{X_i^2+3\acute{Y}_i^2}{2}\right)\varphi_1\\ -3\left[(N)_i\,\Delta\frac{1}{c_1}+(N')_i\left(\Delta\frac{1}{c_1}\right)^2\right]\acute{Y}_1\varphi_i^2\\ -\left[(P)_i\,\Delta\frac{1}{c_1}+(P')_i\left(\Delta\frac{1}{c_1}\right)^2\right]\varphi_i^3\\ -Q_i\,(\acute{Y}_1+K_1\varphi_1)\,[X_i^2+(\acute{Y}_1+K_1\varphi_1)^2]^2,\end{array}\right\}\quad(h)$$

worin die in den Coefficienten enthaltenen und durch das Zeichen Σ angedeuteten Summen, so wie es bereits am Ende von Nro. 11 bemerkt worden ist, nur auf die Flächen des Objectivs ausgedehnt werden dürfen. Die Ausdrücke (r) von Nro. 11 und (h) der gegenwärtigen Nummer enthalten die Werthe von allen Gröfsen der dritten Ordnung, welche sich auf die Abweichung wegen der Gestalt beziehen und in den Gleichungen (d) von Nro. 5 vorkommen, und da die Gröfsen der ersten und zweiten Ordnung in dem Vorhergehenden vollständig entwickelt worden sind, so ist nunmehr Alles gegeben, was zur Berechnung der Lage der gebrochenen Strahlen erforderlich ist. Hierbei ist jedoch keine Rücksicht auf die Farbenzerstreuung genommen worden, es bleibt daher noch übrig, die Abweichungen zu entwickeln, welche durch letztere hervorgebracht werden.

(Die Fortsetzung folgt.)

VI.

Über das beim Anlegen Artesischer Brunnen in und um Wien übliche Verfahren;

von

C a m i l l a.

Die Gegend um Wien ist so reich an Artesischen Brunnen, dafs in dieser Beziehung wenige andere einen Vergleich mit ihr aushalten, auch existiren viele derselben schon über ein Jahrhundert, und sind von da aus erst den Franzosen bekannt geworden, denen Einige, verführt durch den französischen Namen dieser Brunnen, sogar das Verdienst ihrer Erfindung zuschreiben. Ich besitze in meinem Hause und Garten zu Allmannsdorf nächst Wien fünf solche Brunnen von ausgezeichneter Ergiebigkeit (siehe den lehrreichen Aufsatz über Artesische Brunnen vom Freiherrn von *Jacquin*, Bd. VIII., S. 273 dieser Zeitschrift), deren ich mehrere selbst anlegen liefs, und habe demnach hinreichende Erfahrung gemacht über den Werth des Verfahrens, das man in unserer Gegend anzuwenden pflegt. Es ist dieses Verfahren viel einfacher als das in Frankreich und England übliche, und führt mit weniger Unkosten zum Ziele; daher es auch wohl der Mühe lohnt, es hier im Kurzen aus einander zu setzen.

Wenn man über die Stelle einig geworden ist, wo der Artesische Brunnen angelegt werden soll, so gräbt man daselbst eine Grube von 5 Wiener Fufs im Durchmesser 2 bis 3 Klafter tief, nur wenn man auf Sand oder Schotter kommt, mufs man tiefer graben. Man geht in der Regel so tief, bis man auf fetten Thon kommt. Die so erhaltene Grube heifst die *Brunngrube*. Hat man diese

fertig, so errichtet man über sie ein pyramidenförmiges *Gerüste* (Fig. 31) aus drei Balken, deren jeder 6 W. Klafter lang ist, indem man dieselben oben mittelst eiserner Klammern mit einander verbindet. An der obersten Stelle dieses Gerüstes wird eine Kette mit Klammern angebracht und an diese die Rolle gehängt, die zum Aufzug gebraucht wird. Die Spitze dieses Gerüstes darf nicht gerade über der Mitte der Brunngrube stehen, sondern mufs etwas an der Seite sich befinden, damit die Stangen, welche beim Bohren gebraucht werden und häufig länger sind als die Höhe des Gerüstes beträgt, neben der Pyramidenspitze vorbei aus dem Bohrloch gehoben werden können. Ein eiserner am Gerüste befestigter Ring dient diesen Stangen zum Führer, und darf darum nicht fehlen.

Ist dieses Gerüste gehörig aufgestellt, so nimmt man eine *Röhre* von Lerchbaum- oder Föhrenholz mit einer 4 W. Zoll im Durchmesser haltenden Öffnung, spitzt sie an einem Ende pallisadenförmig zu, und versieht sie am anderen mit einem 2 Z. breiten, $^1/_2$ Z. dicken Eisenring. Diese Röhre wird mit dem zugespitzten Ende an die Stelle gebracht, wo das Bohrloch gemacht werden soll, und ihr eine verticale Stellung gegeben. In die Höhlung dieser Röhre kommt nun die sogenannte *Brunnstange* mit dem *Tegelbohrer*, so dafs letzterer auf dem Boden fest aufsitzt. Die Brunnstange *a* (Fig. 32) ist eine eiserne, 3 Klafter lange Stange, die an mehreren Stellen runde Löcher, in der Nähe eines jeden Endes aber ein viereckiges Loch, und nicht weit davon eine Hervorragung, Warze genannt, hat. Die viereckigen Löcher und die Warze dienen dazu, mit einer solchen Stange einerseits den Bohrer, andererseits eine zweite ähnliche Stange verbinden zu können. Die Verbindung geschieht so, dafs man die Warze des Bohrers oder der zweiten

Stange in das Loch der ersten eingreifen läfst, und über beide Stücke einen Ring schiebt, und ihn fest anschlägt.

Der Tegelbohrer hat die Gestalt b, ist 3 1/2 F. lang, und am Stiele wie die Brunnstange mit einem Loche und einer Warze versehen. Ist die Brunnstange sammt dem Tegelbohrer am genannten Platze, so wird der *Schlegel*, in der Brunnsprache der *Fuchs* genannt, an das Seil gehängt, das über die Rolle des Gerüstes geht. Dieser Schlegel besteht aus einem 2 1/2 W. F. langem Stücke einer Brunnröhre, ist mit 4 — 6 eisernen Ringen versehen, und überdiefs nach oben mit einer Vorrichtung zum Einhängen des Zugseiles, das über die Rolle geht; manchmal windet man am unteren Theile desselben auch noch einen Strickreif um, und läfst von demselben vier dünnere Stricke herabgehen, an denen Arbeiter beim Gebrauch des Schlegels ziehen können, damit derselbe nicht blofs durch sein Gewicht, sondern überdiefs noch durch die Zugkraft der Arbeiter wirke.

Ist dieser Schlegel an seinem Platze oberhalb der Röhre so angebracht, dafs auch die Brunnstange durch seine Öffnung geht und ihm gleichsam zum Führer dient, so zieht man ihn auf, läfst ihn anfangs langsam, dann aber immer schneller auf die Brunnröhre herabfallen, unterstützt ihn, wenn es Noth thut, auch noch durch Zug, und fährt so fort, bis die Röhre fest steckt. Findet man, dafs dieses selbst dann noch nicht der Fall ist, wenn die Röhre schon fast ganz in die Erde eingetrieben worden ist, so setzt man auf sie eine zweite Röhre auf, verbindet aber beide mit einander durch eine eiserne Büchse c von 6 Z. Durchmesser und 4 Z. Höhe, um deren Mitte ein runder Eisenstab wie eine Wulst herum läuft, indem man diese Büchse zuerst in die bereits eingeschlagene Röhre bis auf die Wulst hineintreibt, dann die zweite gehörig aufsetzt, damit ihre Bohrungen

zu einander passen, und sie mittelst des Schlegels mit der ersten verbindet.

Nach allen diesen Vorbereitungen schreitet man zum Bohren. Man steckt zu diesem Ende durch ein rundes Loch der aus der Brunnröhre hervorragenden Bohrstange einen 3 F. langen *Eisenstab d*, und dreht mittelst desselben den Bohrer, bis er feststeht, welches dann erfolgt, wenn er voll ist, worauf man ihn herauszieht und ausleert. Sollte eine Hebelstange zum Drehen des Bohrers nicht hinreichen, so wendet man zwei derselben über Kreuz gebundene an, und läfst vier Arbeiter darauf wirken. Bemerkt man beim Gebrauch des Tegelbohrers, dafs derselbe auf einen Stein gekommen ist, so zieht man ihn heraus, und befestiget an seiner Stelle den *Meifsel e* auf dieselbe Weise mit der Brunnstange, wie dieses mit dem Tegelbohrer geschah. Das Herausziehen geschieht mittelst des Zugseiles, durch welches früher der Fuchs gehoben wurde, indem man nach Wegnahme des Schlegels das Seil mittelst eines Hakens in eines der runden Löcher der Brunnstange befestiget, und dann die Arbeiter am andern Ende des über die Rolle gehenden Seiles ziehen läfst. Der Meifsel wird aber nicht wie ein Bohrer gebraucht, sondern man hebt ihn $^1/_2$ F. hoch in die Höhe, läfst ihn dann auf den Stein fallen, hebt ihn wieder, gibt ihm eine kleine Wendung, läfst ihn wieder fallen, und fährt so fort, bis der Stein zersplittert ist. Ist dieses erfolgt, so zieht man den Meifsel heraus, und hängt statt desselben den *Steinbohrer f* ein. Die Kanten desselben reiben beim Drehen den Stein vollends aus, und bringen ihm jene Öffnung bei, welche erforderlich ist. Kommt man nach Durchbrechung des Steines wieder auf Tegel, so versteht es sich von selbst, dafs man neuerdings den Tegelbohrer anzuwenden hat. Kommt man so tief, dafs eine Brunnstange

nicht mehr zulangt, so befestiget man an die erste eine zweite, an diese eine dritte, u. s. w. Je mehr Stangen man bereits braucht, so schwerer hält es, sie zu regieren und heraus zu ziehen. Oft muſs man zum letzteren Zwecke das Seil an die Welle eines Kreuzhaspels befestigen, und durch Drehen des Haspels die Stange aufziehen. Bei diesem Aufziehen leistet das *Aushalteisen g* gute Dienste. Dieses ist, wie die Figur zeigt, gekrümmt, hat eine Länge von 1 ½ F., ist am Stiele flach gefeilt, damit es auf der Röhre fest aufliegen kann, übrigens aber rund. Es wird, wenn man den Bohrer aufzieht, geschwind untergelegt, während man in das Loch der Stange einen Eisenstab vorsteckt. Bricht an einer Brunnstange eine Warze, so trennt sie sich von der anderen oder vom Bohrer, und letzterer bleibt im Bohrloch stecken. Um ihn heraus zu bekommen, wendet man den *Zieher h* an. Dieser ist eine mit Warze und Loch wie ein Bohrer versehene Stange mit einer schraubenförmigen Krümmung wie ein Pfropfzieher. Er wird an die am Zugseil befindliche Brunnstange eingehängt, in das Bohrloch hinab gelassen und dann so lange gedreht, bis die Spitze sich in das Loch des Bohrers oder der stecken gebliebenen Stange einhängt. Sobald dieses geschieht, zieht man den Zieher und mit diesem den Bohrer auf. Es geschieht auch manchmal, dafs eine Stange bricht. Um in einem solchen Falle das im Bohrloch zurückgebliebene Stück heraus zu bekommen, braucht man die *Greifzange i.* Diese läfst sich mit einem Ende gerade so wie ein Bohrer mit einer Brunnstange verbinden, hat aber am anderen Ende zwei aufwärts gekrümmte Haken, mit denen sie das Stangenstück ergreifen und festhalten kann.

Dieses einfache Verfahren ist völlig hinreichend, um in der Gegend von Wien einen Artesischen Brunnen

zu erhalten. Es gibt ohne Zweifel viele Gegenden, wo dasselbe der Fall ist, und für die Bewohner derselben ist diese kurze Beschreibung bestimmt, um sie in den Stand zu setzen, sich mit sehr wenigen Kosten und in kurzer Zeit der ungemein grofsen Wohlthat der Artesischen Brunnen theilhaftig zu machen.

VII.

Fortschritte der Physik in der neuesten Zeit.

A. Meteorologie.

1. Über den Winter von 1829 — 1830. Von *D'Hombres Firmas.*

(Bibl. univ. Janv. 1831, p. 73)

Der Winter von 1829 — 1830 wird lange eine meteorologische Merkwürdigkeit bleiben, und gleichsam den Mafsstab für folgende strenge Winter abgeben müssen; er dürfte wohl auch besonders dazu geeignet seyn, uns über den allgemeinen Gang der Witterung Fingerzeige zu geben. Dazu ist aber eine Vergleichung dieses merkwürdigen Winters mit anderen, das gewöhnliche Mafs nicht stark überschreitenden, nöthig, wie sie der Verfasser dieses Aufsatzes nach den zu Alais angestellten Beobachtungen liefert. Wir heben von diesem Aufsatze besonders folgende Tabelle heraus, welche die merkwürdigen Meteore der Winter in den Jahren 1820 und 1830 mit dem aus 28 Beobachtungsjahren sich ergebenden Mittel enthält:

Beobachtungen.	1819—1820.	1829—1830.	Mittelzahl aus 28 Jahren.
Gröfste Wärme . . .	21°.25 C.	20° C.	22° C.
Gröfste Kälte . . .	— 12°.25	— 10°.75	— 12°.25
Mittlere Wärme . . .	7°	2°	6°.25
Herrschender Wind .	N.	N.	N.
Tage mit heftigem Wind	50	25	40
Tage, wo es reifte . .	38	66	32
Tage, wo es schneite .	4	11	3
Dauer des Schnees . .	16	54	6
Regen bei Tage . . .	16	9	16
Regen des Nachts . .	26	10	18
Regenmenge für den Tag	83‴.6	85‴.5	93‴.4
Regenmenge für d. Nacht	195‴.75	72‴.25	136‴.2
Anzahl schöner Tage .	42	57	52
Trübe od. wolkige Tage	49	34	39

2. Resultate der zu Genf und im Hospiz auf dem grofsen Bernard im Jahre 1830 angestellten meteorologischen Beobachtungen.

(Bibl univ. Janv. 1831, p. 87.)

Die meteorologischen Beobachtungen, welche regelmäfsig zu bestimmten Stunden zu Genf und im Hospiz des grofsen Bernards angestellt werden, sind wegen der geringen horizontalen Entfernung beider Stationen und ihres bedeutenden Höhenunterschiedes (von 6415.38 P.F.) merkwürdig, und werden darum hier aufgenommen. Vorläufig mufs aber bemerkt werden, wie man die jährlichen Mittel aus den einzelnen Tagesbeobachtungen gefunden hat. Dem gewöhnlichen Verfahren gemäfs sucht man das arithmetische Mittel jedes einzelnen Monates, indem man die Summe der mittleren Resultate jedes Tages mit der im betreffenden Monate vorkommenden Tagesanzahl dividirt, und auf ähnliche Weise das jährliche Mittel aus den monatlichen Durchschnitts-

resultaten. Da aber jedes Mittel der Quotient ist, den man erhält, wenn man die Summe der Beobachtungsresultate durch die Anzahl der Beobachtungen theilt, so begeht man nach ersterer Methode einen Fehler, indem nicht jedes Monat dieselbe Tagesanzahl enthält. Sind nämlich s, s', s'' etc. die den einzelnen Tagen entsprechenden Mittel, welche sich aus n, n', n'' etc. Beobachtungen ergeben, endlich die ganze Anzahl aller Beobachtungen $= \nu$; so erhält man auf dem meistens betretenen Wege als Mittelwerth den Ausdruck

$$\frac{\frac{s}{n} + \frac{s'}{n'} + \frac{s''}{n''} + \ldots}{\nu},$$

während das genaue Mittel durch

$$\frac{s + s' + s'' + \ldots}{n + n' + n'' + \ldots}$$

gegeben ist. Ersterer Ausdruck ist dem letzteren nur dann gleich, wenn $n = n' = n''$, d. h. in unserem Falle, wenn jeder Monat gleich viele Tage enthält. Der Fehler, den man gewöhnlich auf diese Weise begeht, ist zwar nicht grofs, aber doch auch nicht so klein, dafs man ihn ganz vernachlässigen könnte, um so mehr, als sich solche Mittel ihrer Natur nach von Jahr zu Jahr nicht stark ändern, und daher mit aller Schärfe berechnet werden müssen. Er betrug für das in Rede stehende Jahr für die Temperatur $^1/_{10}{}^0$ *R.*, für den Barometerstand $^2/_{11}$ L., für den Hygrometerstand $^2/_{10}{}^0$. Die Beobachtungen wurden täglich drei Mal angestellt, und zwar um 9 U. früh, zu Mittag, und um 3 U. Nachmittag; vom Thermometerstand beobachtete man überdiefs noch das Maximum und Minimum. In der folgenden Tabelle sind diese Resultate auf solche Weise angegeben, dafs bei der für den Thermometerstand bestimmten Columne die erste Zahl das Minimum, die zweite das Max., die

dritte den daraus entspringenden Mittelwerth ausdrückt (die übrigen Thermometerbeobachtungen wurden weggelassen), die Columne für den Barometer- und Hygrometerstand gibt in der ersten Zahl das um 9 U. früh, in der zweiten das zu Mittag, und in der dritten das um 3 U. Nachmittag erhaltene Resultat. Hier folgen die Tabellen.

1. Beobachtungsresultate, erhalten zu Genf, 208.77 Toisen über der Meeresfläche, geog. Breite 46° 12′, geog. Länge 3° 49′ (der Zeit nach 15′ 16″) östlich von Paris.

Monat.	Thermometerstand.	Barometerstand.	Hygrometerstand.	Regen u. Schnee. Wassermenge.	Regen u. Schnee. Tagezahl.	Winde, südliche.	Winde, nördliche.
	Grad R.	Z. L. P.	Grad R.				
Jänner	— 7.52	26 10 5.94	94 29				
	2.56	26 10 2.26	85.03	2‴.17	5	48	33
	— 5.04	26 9 15.42	87.65				
Februar	— 4.15	26 10 13 43	88.89				
	2.63	26 10 13.85	80.36	8‴.26	6	30	31
	— 1.76	26 10 9.50	79.78				
März	0.58	27 1 7.39	82.68				
	10.15	27 1 3.58	73.03	11‴.42	7	31	55
	5.36	27 0 13.65	68.52				
April	5.92	26 10 11.17	80.17				
	13.44	26 10 9.47	74.17	42‴.51	14	48	34
	9.68	26 10 6.63	73.97				
Mai	7.02	26 10 5.65	80.74				
	15.60	26 10 4.58	71.61	36‴.21	11	32	49
	11.31	26 9 15.77	65.71				
Juni	8.82	26 10 7.53	76.66				
	17.42	26 10 5.73	70.40	54‴.46	13	45	40
	13.12	26 10 3.33	70.63				
Juli	10.79	26 11 12.45	77.16				
	20.20	26 11 11.84	69.71	26‴.69	14	33	57
	15.49	26 11 7.03	67.19				
August	9 51	26 11 1.74	71.87				
	19.32	26 10 15.42	66.42	31‴.10	8	49	32
	14.41	26 10 9.80	63.39				
Sept.	7 77	26 10 12.17	82.07				
	14.04	26 10 6.67	74.87	67‴.37	16	41	25
	10.91	26 10 3.80	74.90				

Monat.	Thermometerstand.	Barometerstand.	Hygrometerstand.	Regen u. Schnee. Wassermenge.	Regen u. Schnee. Tagezahl.	Winde südliche.	Winde nördliche.
	Grad R.	Z. L. P.	Grad R.				
October	2.95	27 1 9.61	84.10				
	11.31	27 1 9.22	74.73	6‴.80	4	23	56
	7.13	27 1 4.77	71.87				
Nov.	1.19	26 11 12.57	89.90				
	7.70	26 11 10.17	78.53	68‴.27	9	28	38
	4.44	26 11 4.40	79.13				
Dec.	— 1.92	26 7 14.23	88.32				
	2.69	26 7 11.29	80.87	32‴.17	13	47	23
	0.38	26 7 9.36	82.13				
Durchschnitt aus d. Max. und Min.	7.25	26 10 14.68	78.47	32″ 3‴.42	120	455	473

Der höchste Thermometerstand trat mit 26°.2 am 5. August, der niedrigste mit — 17°.4 am 26. December ein. Der Spielraum beträgt demnach 43°.6. Der höchste Barometerstand wurde am 1. Jänner um 9 Uhr mit 27″ 10‴.14,68, der niedrigste am 9. Dec. um 3 Uhr mit 27″ 3‴.14 beobachtet. Der höchste Hygrometerstand trat (mit 100°) im Jänner, November etc., der niedrigste (mit 40°) am 30. März ein. Die jährliche Variation ist daher = 60°.

2. Beobachtungsresultate, erhalten im Hospiz auf dem grofsen Bernard, 1278′ über der Meeresfläche.

Monat.	Thermometerstand.	Barometerstand.	Hygrometerstand.	Regen u. Schnee. Wassermenge.	Regen u. Schnee. Tagezahl.	Winde, südliche.	Winde, nördliche.
	Grad R.	Z. L.	Grad R.				
Jänner	— 11.68	20 7.42	89.22				
	7.46	20 7.31	87.90	17‴	5	45	48
	— 9.57	20 7.20	89.06				
Februar	— 9.09	20 8.61	89.50				
	2.35	20 8.61	85.39	20‴	4	37	46
	— 5.72	20 8.58	85.71				
März	— 6.37	20 11 76	87.68				
	0.99	20 11.83	83.35	28‴	4	23	69
	— 2.69	20 11.40	84.74				

Monat.	Thermometerstand.	Barometerstand.	Hygrometerstand.	Regen u. Schneo. Wassermenge.	Regen u. Schneo. Tagezahl.	Winde, südliche.	Winde, nördliche.
	Grad R.	Z. L.	Grad R.				
April . . .	— 3.60	20 10.73	86.50				
	4.70	20 10.79	82.63	60‴	12	40	50
	0.55	20 10.61	83.13				
Mai	— 2.15	20 10.82	84.32				
	6.05	20 10.91	81.07	27‴	8	57	36
	1.95	20 10.91	80.61				
Juni. . . .	— 1.27	20 10.45	86.27				
	6.68	20 10.49	82.87	23‴.58	8	47	43
	2.70	20 10.50	85.00				
Juli	2 30	21 1.12	84.00				
	9.07	21 1.15	81.90	33‴.58	6	55	38
	5.68	21 1.16	81.94				
August . .	1.27	21 0.27	83.90				
	8.60	21 0.28	82.16	28‴.75	3	44	49
	4.98	21 0.26	81.55				
September	— 1.71	20 10.65	89.53				
	3.46	20 10.67	87.33	129‴.57	12	37	52
	0.87	20 10.62	87.40				
October .	— 2.43	21 0 99	83.71				
	3.21	21 1.09	81.90	5‴.75	3	18	75
	0 39	21 0.92	81.32				
November	— 5.85	20 11.03	86.90				
	1.00	20 10.92	85.10	48‴	8	57	33
	— 3.42	20 10 85	85 50				
December	—10.37	20 6.56	83.68				
	5.36	20 6.44	83.00	131‴	11	51	39
	— 7.86	20 6.42	84.23				
Durchschnitt aus dem Max. und Min. . .	— 0.99	20 10.59	84.96	46″ 0‴.23	84	511	578

Die gröfste Kälte (von — 20.6) fiel auf den 2. Februar, die gröfste Hitze (von 13.4) auf den 16. Juli und 3. August. Die Differenz beider beläuft sich auf 34°.0. Der höchste Barometerstand fand am 22. October um 9 Uhr Vormittags und um 3 Uhr Nachmit-

tags mit 21″ 3‴.9, der kleinste mit 20″ 0‴.5 am 25. Dec. Statt. Das Hygrometer stand am höchsten (auf 100°) am 18. Sept. um 9 Uhr, am niedrigsten (67°) am 14. April Mittags, sein Spielraum beläuft sich auf 33°.

B. Electricität.

1. Über die Contraction der in der electrischen Kette befindlichen Thiere beim Öffnen der Kette. Von *Matteuci*.

(Bibl. univ. Fev. 1831, p. 113.)

Die Zuckungen, welche Thiere im electrischen Kreise beim Schliefsen und Öffnen desselben erleiden, sind in der neuesten Zeit von *Marianini* mit besonderem Fleifse studirt worden. Seine über diesen Gegenstand erschienene wichtige Arbeit enthält der fünfte Band dieser Zeitschrift. Dieser fleifsige und geschickte Physiker beschränkte sich aber nicht blofs auf die Erörterung der Phänomene dieser Zuckungen, sondern er liefs sich auch in eine Untersuchung der Gründe derselben ein. Seiner Ansicht nach condensirt sich die Electricität im Nervensysteme der im electrischen Kreise befindlichen thierischen Organe, und verläfst dasselbe, sobald der electrische Strom keine Contraction mehr bewirkt. Auf diese Ansicht brachten ihn vorzüglich mehrere Versuche. Bei einem derselben sah er einen Frosch in Zuckungen gerathen, als ein besserer der Electricität dargebotener Leiter derselben eine andere Richtung gab, die doch unterblieb, wenn man den Strom durch Ausheben eines der Conductoren der Säule unterbrach; bei einem anderen wurde ein Stofs bemerkt, als man den Strom eintreten liefs, nicht aber als derselbe unterbrochen wurde; endlich erfuhr er, dafs die Stärke der Zuckungen beim Öffnen der Kette in dem Mafse zunimmt,

als dieselben beim Schliefsen derselben schwächer werden. *Matteuci* gibt aber die von *Marianini* hieraus gefolgerte Ansicht nicht zu. Das Eintreten der Zuckungen bei der Anwendung eines besseren Leiters beim ersten Versuche sieht *Matteuci* als nothwendige Folge des Aufhörens des Stromes durch den Frosch an, welches Aufhören nothwendig eintreten mufste, da der Electricität ein besserer Leiter dargeboten wurde; das Resultat des zweiten Versuches spricht seiner Meinung nach nicht für *Marianini's* Ansicht, endlich jenes des letzten Versuches zieht er völlig in Zweifel, da es mit den Erfahrungen *Nobili's* und seinen eigenen nicht in Übereinstimmung zu bringen ist. *Matteuci* versucht nun eine eigene Erklärung des betreffenden Phänomens, und führt Versuche zur Unterstützung derselben an. Wir wollen ihn selbst hören:

Es unterliegt keinem Zweifel, dafs sich die thierischen Fibern bei der Contraction in einem, von ihrem natürlichen ganz verschiedenen Zustande befinden. Die schönen Versuche von *Edwards*, *Home*, *Prevost* und *Dumas* über den Bau der Muskelfaser und der Vertheilung der Nervenfiber in derselben zeigen sattsam, dafs sich dieselben im Augenblicke der Contraction stets an derselben Stelle biegen und einen Winkel bilden, an dessen Spitze die Nervenfasern sich enden. Man braucht nicht, um sich die Überzeugung zu verschaffen von der buchichten Gestalt des contrahirten Muskels, wie *Prevost* und *Dumas* gethan haben, zu einem Mikroskope die Zuflucht zu nehmen, es ist genug, einen durch eine 15 — 20paarige Säule entstandenen Strom durch ein frisches und dünnes Muskelstück, wie z. B. vom *sterno-pubianus*, gehen zu lassen. Da sieht man mit freiem Auge, wie sich die Fibern zurückziehen, und wenn der Strom aufgehört hat, wieder in die alte Lage zurückkeh-

ren. Noch besser läfst sich dieses Phänomen beobachten, wenn man den Muskel auf ein Stück weifses Papier legt, und sowohl auf diesem als auf dem Muskel eine continuirliche gerade schwarze Linie zieht; auch an den Zehen der Thiere kann man diese Beobachtung machen, und sehen, dafs dieselben nach Beendigung der electrischen Strömung wieder in die alte Lage zurückkehren. Warum soll man denn nun die bei Unterbrechung des electrischen Stromes eintretende Contraction nicht von der Bewegung der verschiedenen Theile der Muskel, die ihren alten Platz wieder einnehmen, herleiten? Natürlich tritt die Rückkehr des Muskel- und Nervensystemes in seine alte Lage am kräftigsten in den ersten Momenten nach dem Tode ein, und findet mit derselben Stärke und Schnelligkeit Statt, wie die Verrückung aus der natürlichen Lage. Diese Meinung wird durch eine Thatsache unterstützt, die ich oft bemerkt habe, nämlich, dafs die Stöfse beim Öffnen der Kette bei einem directen Strome (vergleiche Bd. VIII., S. 233) desto heftiger sind, je intensiver der Strom ist, und je kürzere Zeit er angehalten hat, während bei einem indirecten Strome nach *Nobili's* Bemerkung ein entgegengesetztes Verhalten eintritt. Die Fibern nämlich, welche durch zu langes Anhalten des electrischen Stromes ihre natürliche Elasticität verloren haben, nehmen schwer ihre natürliche Lage wieder an. Diesem widerspricht *Marianini's* Bemerkung nicht, dafs selbst dann Zuckungen beim Öffnen der Kette eintreten, wenn deren keine beim Schliefsen derselben Statt gefunden haben. Auch in diesem Falle bringt der Strom seine Wirkung bei seinem Beginnen hervor, und die gewöhnliche Contraction erfolgt nur nach und nach, wenn der Strom langsam eintritt. Ist die Lebenskraft fast erschöpft, so bleiben nach meinen Bemerkungen die Zuckungen unter dem

Einflusse des directen Stromes aus, und die im ersten Augenblicke des Stromes contrahirten Muskelfibern nehmen ihre natürliche Lage selbst während der Dauer des Stromes an, wo dann natürlich die Zuckung beim Öffnen der Kette unterbleiben mufs.

Da nun meiner Erklärung nichts entgegen steht, so will ich auch daraus über die von *Lehot* und *Bellingieri* beobachteten Thatsachen Rechenschaft geben. Zu diesem Ende wollen wir die unter dem Einflusse eines electrischen Stromes an einem Frosche in den verschiedenen Perioden seiner Vitalität Statt findenden Phänomene kurz erwähnen.

So lange der Frosch noch lebhaft ist, treten sowohl beim Schliefsen als beim Öffnen der Kette Zuckungen ein, der Strom mag ein directer oder umgekehrter seyn, und zwar immer mit derselben Stärke. Hierauf werden die Zuckungen bei Unterbrechung des directen Stromes schwächer, natürlich, weil in dem Mafse, als die Fibern ihre Elasticität verlieren, auch das Bestreben, in ihre natürliche Lage zurück zu kehren, geringer wird. Der umgekehrte Strom erzeugt beim Schliefsen der Kette fast keine Zuckung, weil die Oberfläche des Muskels nicht hinreichend feucht ist, und daher der Strom die Muskelfibern nicht mit gehöriger Schnelligkeit durchlaufen, den Nervenfasern nicht begegnen, und daher nicht in den Hauptstamm eindringen kann; ist aber die Kette einige Zeit lang geschlossen, so stellen sich nach und nach beide Zuckungen, die idiopathischen und die sympathischen, ein. Ist die Kette offen, so nehmen die verschiedenen Theile ihre natürliche Lage mit gröfserer Kraft an, als wenn man es mit einem directen Strome zu thun gehabt hat, und zwar, weil die idiopathische Zuckung hinzukommt. Trocknet man den Muskel und Nerv gut ab, so haben, meinen Beobachtungen zu Folge,

die Zuckungen beim Schliefsen und Öffnen der Kette Statt. Daraus erklärt es sich, warum die Contractionen desto kräftiger erfolgen, je länger der Strom angehalten hat.

So wie die Vitalität noch mehr abnimmt, hören die Zuckungen beim Unterbrechen des directen und beim Eintreten des umgekehrten Stromes auf, auch werden sie beim Unterbrechen des letzteren immer schwächer. Nach Verlauf einer gewissen Zeit finden endlich keine Zuckungen mehr Statt, man mag die Kette öffnen oder schliefsen, und der Strom mag was immer für eine Richtung haben.

Aus allen diesem schliefst nun *Matteuci*:

1) Man hat keinen Grund anzunehmen, das musculonervöse System condensire unter dem Einflusse des electrischen Stromes die Electricität, wie dieses *Marianini* zur Erklärung der beim Öffnen der Kette eintretenden Zuckungen annimmt.
2) Diese Zuckungen rühren vielmehr von der Rückkehr der Muskelfasern in ihre natürliche Lage, aus der sie durch den electrischen Strom gebracht worden sind, her.

2. Gesetze der Fortpflanzung der Electricität. Von *Bigeon*.

(Ann. de Chim. et de Phys. Janv. 1831, p. 80.)

Bei unserer völligen Unbekanntschaft mit dem inneren Grunde der electrischen Erscheinungen und dem jedem denkenden Manne eigenen Bestreben, für das Unbekannte einen Faden zu finden, der es an das, wenn auch nicht völlig, doch mehr Bekannte knüpft, kann man wohl keinen Versuch, der eine Relation zwischen den Gesetzen der electrischen Erscheinungen und denen des Lichtes oder der Wärme nachweiset, unbeachtet vor-

übergehen lassen. Aus diesem Grunde müssen hier die von *Bigeon* bekannt gemachten galvanometrischen Versuche, wie er sie nennt, erwähnt werden, weil sie die Ähnlichkeit zwischen den Modificationen der im Fortschreiten begriffenen Electricität und der Wärme näher darstellen, als es frühere Versuche von *La Rive*, *Marianini* etc. thaten.

Bigeon beabsichtigte anfangs blofs einen Gedanken *Ampère's* zu prüfen, und den Einfluſs des Zustandes jenes Theils der Oberfläche der electromotorischen Metalle, der mit dem flüssigen Leiter in Berührung steht, auf die Fortpflanzung der Electricität durch diese Metalle zu untersuchen, aber da er schon einmal im Besitz der Apparate war, so glaubte er gleich weiter gehen, und auch einige schon früher von *Marianini* angestellte Versuche wiederholen zu müssen. Demnach untersuchte er 1) den Einfluſs des Zustandes der Oberfläche, 2) der Neigung der eingetauchten Platten, 3) die Gröfse, 4) die gegenseitige Entfernung derselben.

1) *Zustand der Oberfläche.* Um den vom Zustande der Oberfläche herrührenden Effect kennen zu lernen, wurden fünf Kupferplatten gebraucht. Eine derselben blieb eben, die zweite erhielt drei einander ziemlich nahe Löcher, die stark hervorstehende Ränder hatten, die dritte quadratförmige, durch zwei Systeme paralleler, an der Vorderfläche eingravirter Linien entstandene Zeichnungen, die vierte wurde nach verschiedenen Richtungen ohne besondere Regel mittelst einer Feder geritzt, die letzte endlich hatte die Natur des Rauschgoldes. Da ergaben sich nun mit einer Mischung aus verschiedenen Säuren mittelst eines Torsionsapparates (einer Drehwage) im Mittel aus mehreren Versuchen folgende Resultate:

	Wasser mit $^1/_{80}$ Schwefelsäure.		Wasser mit $^1/_{40}$ Salpeters.
	Faden Nr. 1.	Faden Nr. 2.	Faden Nr. 3.
Ebene Platte . .	565°	45°	315°
Quadrillirte Platte .	650°	46°	335°
Platte mit Löcher .	670°	50°	350°
Rauh gefeilte Platte	600°	45° $^1/_2$	320°
Rauschgold . . .	450°	36°	—

Es scheint sich demnach das electrische Fluidum leichter durch eine gefurchte, unpolirte oder rauhe Fläche fortzupflanzen, als durch eine glatte. Der Unterschied im Fortleitungsvermögen ist zwar nicht sehr grofs, aber doch merklich, und dieser Umstand bietet eine neue Analogie dar zwischen den Phänomenen der Berührungselectricität und jenen der Wärme.

2) *Neigung der eingetauchten Platten gegen einander.* Um den Einfluſs der Neigung ersichtlich zu machen, wurde eine Kupferplatte auf einer Seite mit einem Wachsüberzug versehen, und die Zinkplatte senkrecht auf die Linie gestellt, welche die Mittelpuncte der Platten mit einander verband, hierauf aber die Kupferplatte unter verschiedenen Winkeln gegen diese Linie geneigt. Als leitende Flüssigkeit wurde durchaus gesäuertes Wasser angewendet, wie man es zu *Volta*'schen Säulen zu brauchen pflegt, um die Resultate dieser Versuche auf den Bau solcher Säulen anwenden zu können; weil aber die Wirkung anfangs wohl sehr stark ist, aber deſshalb auch schnell abnimmt, und daher zu jedem einzelnen Versuche wenig Zeit blieb, so muſste jeder derselben hinreichend oft wiederholt werden. Hier folgt eine Reihe von solchen Versuchsresultaten, bei denen die Platten parallel standen, oder um 45° oder um 90° gegen einander geneigt waren:

Neigung.	Torsion.			Mittelwerth.
0°	213°	204°	197°	203°
45°	203°	196°	190°	195°
90°	193°	191°	180°	188°
45°	198°	194°	189°	—
0°	—	—	199°	—

Es nimmt demnach die Wirkung ab, wenn die Neigung wächst, gerade so, wie es beim Licht und der Wärme der Fall ist; doch befolgt diese Abnahme ein anderes Gesetz. Die Wirkung der Hinterfläche ist nicht $= 0$, doch ist sie viel geringer als jene der Vorderfläche; als man nämlich nach und nach der Zinkseite die mit Wachs bedeckte und die nackte Kupferfläche zukehrte, erhielt man im Mittel aus mehreren Versuchen folgende Zahlenwerthe:

Wirkung der Vorderfläche . 169,
» » Hinterfläche . 84,
Totaleffect . . . . . 239.

Diese Versuche wurden mit Platten von 6 L. breite und bei einer Entfernung von 2 L. angestellt. Wurden diese einander sehr nahe gebracht, so erschien die Wirkung der Hinterfläche aufser Verhältnifs kleiner.

3) *Gröfse der eingetauchten Oberfläche.* Es wurden Platten von 12 L. Breite eingesenkt, wie folgt, und man erhielt die ihnen gegenüberstehenden Torsionen als Repräsentanten der Gröfse des electrischen Stromes:

Kupferplatte.	Zinkplatte.	Torsion.
3 L.	3 L.	75°
6 »	3 »	116°
9 »	3 »	146°
12 »	3 »	172°
15 »	3 »	190°

Kupferplatte.	Zinkplatte.	Torsion.
3 L.	6 L.	80°
6 »	6 »	122°
9 »	6 »	155°
12 »	6 »	188°
15 »	6 »	213°
3 »	9 »	83°
6 »	9 »	131°
9 »	9 »	165°
12 »	9 »	193°
15 »	9 »	222°

Man erlangt demnach den gröfsten Effect, wenn von der Kupfer- und Zinkplatte gleich viel eingetaucht ist, was auch leicht einzusehen ist, indem das Maximum des Effectes offenbar dann eintreten mufs, wenn jeder Punct der Zinkfläche möglichst wenig Fluidum ausstrahlt, und in einer kleinen Entfernung die entsprechende Kupferfläche findet, die dasselbe absorbirt.

4) *Entfernung der eingetauchten Leiter.* Jede Kupfer- und Zinkplatte hatte Dimensionen von 14 auf 15 L, und sie waren gegen einander parallel aufgestellt. Aus zwei Versuchsreihen, die mit zwei Torsionsfäden angestellt wurden, ergaben sich folgende Resultate:

Distanz der Platten.	Torsion.	Distanz der Platten.	Torsion.
21 L.	377°	3 L.	493°
12 »	516°	6 »	441°
6 »	629°	9 »	358°
3 »	788°	12 »	313°
½ »	972°	21 »	318°
12 »	958°	21 »	318°
3 »	748°	12 »	390°
6 »	551°	6 »	463°
12 »	462°	3 »	531°
21 »	360°	— »	—

Je gröfser also die Entfernung der Platten von einander ist, desto kleiner fällt die Wirkung aus.

5) *Relative electromotorische Kraft verschiedener Flüssigkeiten:*

Wasser mit $^1/_{80}$ Rth. Schwefelsäure. Mittlere Kraft 106°. Das Zink löste sich schnell auf unter heftiger Gasentwickelung.

Wasser mit $^1/_{40}$ Salzsäure, wie sie im Handel vorkommt. Mittlere Kraft 58°. Wirkung auf das Zink wie bei der Schwefelsäure.

Wasser mit $^1/_{40}$ Salpeter- und $^1/_{80}$ Salzsäure. Mittlere Kraft 59°. Keine Gasentwickelung am Zink.

Wasser mit $^1/_{80}$ Salpeter- und $^1/_{160}$ Schwefelsäure. Mittlere Kraft 96°. Keine Hydrogengasentwickelung am Zink.

Wasser mit $^1/_{80}$ Salpeter- und $^1/_{80}$ Schwefelsäure. Mittlere Kraft 120°. Sehr schwache Hydrogengasentwickelung am Zink.

Merkwürdig ist es, dafs die Salpetersäure die auflösende Wirkung der Schwefelsäure und Salzsäure auf das Zink hemmt; eine Eigenschaft, welche diese Säure in hohem Grade besitzt. Während eine Zinkplatte in Wasser mit $^1/_{80}$ Rth. Schwefelsäure in 8 Stunden ganz aufgelöset war, hatte eine Mischung von Wasser mit $^1/_{80}$ Salpetersäure und $^1/_{80}$ Schwefelsäure in derselben Zeit kaum die halbe Wirkung gethan.

C. Optik.

Elliptische Polarisation des Lichtes.

Von *Brewster.*

Wer sich mit den optischen Wissenschaften beschäftiget, weifs, dafs wir bereits eine zweifache Polarisation des Lichtes kennen, nämlich die geradlinige und die cir-

culäre, von deren erstere selbst wieder von einigen Physikern in die fixe und bewegliche getheilt wird. *Brewster* zeigt nun das Daseyn einer dritten, nämlich der elliptischen, und weiset nach, dafs dieselbe dem Lichte durch Metallflächen ertheilt wird. Sein in vielfacher Beziehung wichtiger Aufsatz ist in dem Londner *Phil. transact.* für 1830, P. II. enthalten, und auch bereits im Auszuge im *Bull. des sc. math. et phys.* aufgenommen. Was hier erscheint, ist aus letzterer Quelle, Nov. 1830, p. 337, entlehnt. *Brewster's* Arbeit zerfällt in drei Theile; der erste handelt von der Wirkung der Metalle auf unpolarisirtes, der zweite von ihrer Wirkung auf polarisirtes Licht. Wir wollen das Wichtigste aus diesen beiden hier anführen, den dritten aber nächstens folgen lassen.

Läfst man einen gewöhnlichen Lichtstrahl unter verschiedenen Winkeln auf eine Metallfläche auffallen, und leitet ihn dann durch einen Doppelspath, so findet man ihn zum Theile in der Reflexionsebene polarisirt. Dasselbe erkennt man noch besser mittelst der polarisirten Farbenringe; diese erscheinen bei einem Einfallswinkel von 74°, vom Einfallsloth an gerechnet, am lebhaftesten, zum Beweise, dafs die Strahlen unter diesem Winkel der vollkommenen Polarisation am nächsten stehen. Versucht man die Einwirkung mehrerer Metalle auf das Licht, so findet man diese nach Mafsgabe ihrer verschiedenen materiellen Beschaffenheit auch verschieden. Sie folgen so auf einander, von demjenigen angefangen, dessen Einwirkung am stärksten ist: Bleiglanz, Blei, Kobaltglanz, Arsenikkobalt, Schwefelkies, Antimon, Stahl, Zink, Spiegelmetall, Platin, Wismuth, Quecksilber, Kupfer, gekörntes Zinn, Messing, gewalztes Zinn, Juwelirgold, feines Gold, gemeines Silber, feines Silber. Erleidet ein Strahl auf Metallplatten derselben Natur mehrere Reflexionen hinter einander, so rückt

er dem vollkommenen Polarisationszustande immer näher. So z. B. erscheint ein Lichtstrahl, den eine Kerzenflamme liefert, deren Entfernung von der reflectirenden Fläche 10 F. beträgt, nach 8 Reflexionen an einer Stahlplatte vollkommen polarisirt, wenn die Incidenzen innerhalb der Winkel von 60° — 80° vor sich gehen. Wenigere solche Reflexionen reichen hin, wenn der reflectirende Körper Bleiglanz oder Blei, mehrere werden erfordert, wenn die vollkommene Polarisation durch polirtes Silber erzielt werden soll; im letzteren Falle nimmt der Strahl auch mehr und mehr eine rothe Farbe an.

Anders ist die Wirkung der Metalle auf schon polarisirtes Licht. Fällt ein polarisirter Strahl auf eine polirte Metallfläche, die sich um den Strahl wie um eine Axe herumdrehen läfst, so erscheint das reflectirte Licht ungeändert, so lange die Reflexionsebene mit der ursprünglichen Polarisationsebene einen Winkel von 0°, 90°, 180°, 270° einschliefst. In jedem anderen Azimuth hingegen tritt der reflectirte Strahl mit neuen Eigenschaften auf, und diese nehmen zu, wenn das Azimuth von 0° — 45°, von 90° — 135°, von 180° — 225°, oder von 270° — 315° wächst, und haben daher ihr Maximum bei dem Azimuthe 45°, 135°, 225° und 315°, nehmen aber wieder ab, wenn man das Azimuth von 45° auf 90°, von 135° auf 180°, von 225° auf 270°, oder von 315° auf 360° wachsen läfst.

Man denke sich nun eine polirte Stahlfläche im Azimuth — 45°, d. h. um 45° links gegen die Polarisationsebene geneigt, wo dem Vorhergehenden gemäfs die Wirkung ihr Maximum erreicht hat, und lasse in diesem Azimuth den Einfallswinkel sich ändern. So lange der Einfallswinkel grofs genug ist, und etwa 98°, 88° oder 87° hat, besteht die Wirkung des Metalls darin, die Po-

larisationsebene von der Rechten zur Linken zu wenden, gerade so, wie dieses ein durchsichtiger polarisirender Körper gethan haben würde. Dasselbe findet auch Statt, wenn der Einfallswinkel innerhalb 0° und 40° liegt. Über diese Grenze hinaus nimmt die Wirkung der reflectirenden Fläche ununterbrochen zu, bis sie bei 75° ihr Maximum erreicht; von 75° bis 87° wird sie aber wieder kleiner. Man kann sich leicht überzeugen, dafs von 75° bis 0° die Polarisationsebene vieler Strahlen von +45° bis 0° sich ändert.

Da wo die physische Wirkung der Stahlfläche ihren gröfsten Werth hat, nämlich bei 75°, besteht der reflectirte Strahl nicht mehr aus polarisirtem Lichte, denn er verschwindet nicht bei einer vollen Umdrehung eines Kalkspathrhomboëders, durch das man ihn leitet; er besteht auch nicht aus natürlichem Lichte, denn wird er von Neuem einer Reflexion unter 75° durch eine zweite Stahlfläche unterworfen, so zeigt er sich aus vollkommen in einer Ebene polarisirtem Lichte bestehend.

Um nun die Natur der Veränderung zu erforschen, die er erlitten hat, fange man ihn nach der Reflexion mit einem Kalkspathrhomboëder auf, so, dafs er längs der Axe durch dasselbe geht; da sieht man das System der farbigen Ringe wie durch eine dünne Krystallplatte geändert. Aus diesem Grunde betrachtete *Brewster* früher die Wirkung metallinischer Flächen wie die der Krystallplättchen, und weil er sich überzeugt hatte, dafs durch mehrere auf einander folgende Reflexionen die Farbenringe immer mehr an Reinheit und Entwickelung gewannen, so nahm er keinen Anstand, diesen Schlufs zu verallgemeinern, worin ihm auch *Biot* beistimmte. Doch irrte er hierin. Um seinen Fehler zu enthüllen, nimmt *Brewster* nun einen Lichtstrahl an, der in einem Azimuth von 45° polarisirt ist, und an parallelen Stahl-

flächen unter dem Einfallswinkel von 75° hinter einander zwei Reflexionen erlitten hat. Sollte die zweite Fläche dieselbe Wirkung hervorbringen, wie ein Krystallplättchen, so müfste sie die an der ersten Platte erzeugten Farben verdoppeln; allein die zweite Fläche polarisirt alles Licht des Strahles in einer Ebene, statt es in zwei unter rechten Winkeln polarisirte Bündel zu theilen. *Biot* glaubte diese Schwierigkeit dadurch zu lösen, dafs er die durch zwei Reflexionen erzeugte Farbe als Weifs der ersten Ordnung betrachtete. Hätte er das Licht nach 4, 6 oder 8 Reflexionen untersucht, so würde er es vollkommen polarisirt gefunden haben; ein Resultat, das sich mit der Annahme, die Ordnung der Farben wachse mit der Anzahl der Reflexionen, nicht vereinbaren läfst, indem es ausgemacht ist, dafs diese Reflexionen die Farben nur um eine Viertelstufe erhöhen können.

Da nun das im Azimuth von 45° polarisirte und unter dem Winkel der vollkommenen Polarisation reflectirte Licht weder den Charakter des natürlichen, noch den des polarisirten, endlich auch nicht den eines solchen an sich hat, das durch dünne Krystallplättchen gegangen ist, so erübriget nur noch, dasselbe mit dem circulär polarisirten zu vergleichen. Nach *Fresnel* erleidet ein polarisirter Lichtstrahl die circuläre Polarisation, wenn er unter dem Azimuth von + 45° zwei totale Reflexionen erlitten hat, erhält aber wieder den Charakter des gewöhnlichen polarisirten Lichtes mit einer Polarisationsrichtung von — 45°, wenn er zwei neuen Reflexionen dieser Art unter was immer für einem Azimuth unterworfen wird. Nach *Brewster* soll ein polarisirter Strahl, der im Azimuth von 45° von einem reinen oder mineralisirten Metalle unter dem vollkommenen Polarisationswinkel eine Reflexion erlitten hat, jenen Polarisationszustand annehmen, der zwischen dem des circu-

Die Ordnung, in welcher diese Körper auf einander folgen, ist gerade die umgekehrte jener, nach welcher dieselben Körper in der Reflexionsebene das Licht polarisiren. Bei den Versuchen war der Strahl ursprünglich in einer Ebene polarisirt, die um $+45^\circ$ gegen die Reflexionsebene geneigt war; nimmt aber das Azimuth ab, so nähert sich die Polarisationsebene des auf seinen ursprünglichen Polarisationszustand zurückgeführten Strahls der Reflexionsebene, und fällt endlich gar mit ihr zusammen, wenn das Azimuth auf 0° herabgesunken ist. Wächst aber das Azimuth, so entfernt sich auch die Polarisationsebene des regenerirten Strahls von der Reflexionsebene, so dafs diese zwei Ebenen einen Winkel von 180° einschliefsen, wenn das Azimuth 90° beträgt.

Heifst x die Neigung der Ebene der ursprünglichen Polarisation gegen die Reflexionsebene, d. i. das Azimuth, φ das Azimuth des auf seinen ursprünglichen Polarisationszustand zurückgeführten Strahls, ist endlich ϑ der Werth von φ für $x = 45^\circ$, so gibt der Ausdruck

$$\text{tang.}\,\varphi = \text{tang.}\,\vartheta\ \text{tang.}\,x$$

die durch Erfahrung mittelst einer reinen Silberplatte gefundene Relation dieser Gröfsen hinreichend genau an. Es ist die ganze Änderung der Polarisationsebene R gleich $x + \varphi$.

Da nun ein polarisirter Strahl durch Reflexion von einer Stahlplatte unter dem Winkel von 75° bei einer Neigung der Reflexionsebene gegen die Polarisationsebene die elliptische Polarisation erlangt, und durch eine neue Reflexion unter demselben Winkel bei einer Neigung der Reflexionsebene gegen die Polarisationsebene von -17° den Zustand des polarisirten Lichtes annimmt; so ist klar, dafs derselbe durch eine dritte Reflexion wieder elliptisch polarisirt wird, durch eine vierte aber bei einem Azimuth, das kleiner als 17° ist, wieder den Cha-

rakter des gewöhnlich polarisirten Lichtes annimmt, u. s. f. Bei der circulären Polarisation ist das Azimuth φ immer $\mp 45^{\circ}$, es mögen so viele Reflexionen auf einander folgen, als man will. Für 50 derselben hat *Brewster* den Versuch angestellt, und sein Resultat dieser Behauptung gemäfs befunden. Nach n auf einander folgenden Regenerationen wird der Werth des Winkels φ durch die Formel

$$\text{tang.}\,\varphi = \text{tang.}^{n}\,x$$

ausgedrückt.

Betrachtet man nun das natürliche Licht als bestehend aus zwei unter einem rechten Winkel polarisirten Hälften, deren Azimuth rechts und links von der Reflexionsebene 45° beträgt, und läfst dieses Licht unter 75° auf eine Stahlplatte fallen; so erhält man nach zwei Reflexionen einen Strahl, der sich aus zwei unter den Azimuthen $+17^{\circ}$ und -17° polarisirten Theilen bestehend ansehen läfst, nach der dritten und vierten Reflexion betragen diese Azimuthe $\pm 5^{\circ}\,22'$, nach der fünften und sechsten $\mp 1^{\circ}\,38'$, nach der siebenten und achten $\pm 0^{\circ}\,30'$. Es wird demnach ein natürlicher Strahl durch acht auf einander folgende Reflexionen auf einer Stahlfläche fast vollkommen polarisirt. Von einer Silberplatte müfste ein Strahl 36 Reflexionen erlitten haben, um ihn dahin zu bringen, dafs die Polarisationsebenen seiner Theile nur um 47′ gegen einander geneigt wären, uud daher kommt es, dafs Silber das Licht nicht zu polarisiren scheint, wiewohl dieses von einer Stahlfläche leicht geschieht. Was nun die durch zwei Reflexionen des natürlichen Lichtes polarisirte Lichtmenge anbelangt, so darf man nur bemerken, dafs z. B. durch Silber das Azimuth von 45° auf 17° gebracht wird, und gerade diese Änderung des Azimuths hätte *eine* Reflexion auf Glas unter dem Einfallswinkel von 45° oder 68° her-

vorgebracht. Man kann demnach die Menge des durch Silber polarisirten Lichtes eben so berechnen, wie die durch Glas unter den genannten Einfallswinkeln, und sich demnach der Formel $Q = 1 - 2 \sin.^2 \varphi$ (siehe S. 499 des VIII. Bandes) bedienen, um diese Lichtmenge zu berechnen. Da $\varphi = 17°$ ist, so wird $Q = 0.829$.

Bis hieher wurde die elliptische Polarisation unter dem Einfallswinkel des Maximums der Polarisation betrachtet. Bei anderen Incidenzen mufs man die Formel

$$\text{tang.}\, \varphi = \frac{\cos.\,(i + i')}{\cos.\,(i - i')}$$

zu Hülfe nehmen, um das Azimuth φ der neuen Polarisationsebene zu bestimmen. Sucht man darnach die Incidenzwinkel, welche dem polarisirten Strahl gegeben werden müssen, damit ihn zwei parallele Stahlplatten durch eine bestimmte Anzahl von Reflexionen auf den ursprünglichen Polarisationszustand zurückführen, so erhält man folgende Resultate:

Einfallswinkel,		Zahl der Reflexionen zur Regeneration des Polarisationszustandes	
beobachtet.	berechnet.	bei der geradlinigen Polarisation.	bei der elliptischen Polarisation.
86° 0′	85° 45′	6, 12, 18 etc.	3, 9, 15 etc.
84° 0′	84° 38′	5, 10, 15 etc.	2½, 7½, 12½ etc.
82° 20′	83° 30′	4, 8, 12 etc.	2, 6, 10 etc.
79° 0′	79° 39′	3, 6, 9 etc.	1½, 4½, 7½ etc.
75° 0′	75° 00′	2, 4, 6 etc.	1, 3, 5 etc.
67° 40′	68° 53′	3, 6, 9 etc.	1½, 4½, 7½ etc.
60° 20′	60° 2′	4, 8, 12 etc.	2, 6, 10 etc.
56° 25′	56° 5′	5, 10, 15 etc.	2½, 7½, 12½ etc.
52° 20′	51° 24′	6, 12, 18 etc.	3, 6, 9 etc.

Es gibt demnach für dieselbe Anzahl der Reflexionen zwei Winkel, unter welchen die völlige Wieder-

herstellung des ursprünglichen Polarisationszustandes eintritt, wo daher auch φ denselben Werth erhält; einer derselben ist kleiner, der andere gröfser als der Winkel des Maximums. Für eine gerade Anzahl Reflexionen, die den ursprünglichen Polarisationszustand wieder herstellen, tritt die elliptische Polarisation mit einer ungeraden Anzahl Reflexionen ein; erlangt aber das Licht seinen ursprünglichen Charakter durch eine ungerade Anzahl Reflexionen, so wird es wieder nach einer ganzen Anzahl Reflexionen, vermehrt um eine halbe Reflexion, elliptisch polarisirt. Hier entsteht und vergeht daher der Zustand der elliptischen Polarisation beim Act der Reflexion selbst, und man kann annehmen, dieser Polarisationszustand sey vollkommen erzeugt, wenn der Lichtstrahl auf die gröfste Tiefe in die reflectirende Fläche eingedrungen ist.

Die Differenz P in der Gröfse der zwei Einfallswinkel, bei welchen die elliptische Polarisation vollkommen eintritt, wird durch die Formel

$$P = 90^0 - 2\varphi$$

ausgedrückt. Für den Stahl hat man überdiefs

$$\frac{\sin. i}{\sin. i'} = 3.732.$$

Man ist daher im Stande, das Azimuth φ der Polarisationsebene gegen die Reflexionsebene zu berechnen.

Unterwirft man einen Lichtstrahl einer Reihe von Reflexionen unter Winkeln, die zwar in Betreff ihres Einflusses auf die elliptische Polarisation einerlei Werth haben, deren aber einer gröfser, der andere kleiner ist als 75°, so heben sich die Wirkungen einander auf, und der Strahl erlangt zuletzt den gewöhnlichen Polarisationszustand.

In allem Vorhergehenden ist vorausgesetzt worden, dafs die zwei Ebenen der successiven Reflexionen mit

einander zusammenfallen. Ändert man aber die Lage der zweiten Reflexionsebene gegen die erste, so wird der Lichtstrahl in den Zustand der elliptischen Polarisation versetzt, und wieder auf den ursprünglichen Polarisationszustand zurückgeführt, aber der Winkel, unter welchem dieses geschieht, ist z. B. bei Stahl nicht wie vorhin 75°, sondern er hat folgenden Werth:

Azimuth der zweiten Reflexionsebene	Winkel der Regeneration.	Complement dieses Winkels, beobachtet.	berechnet.
0° und 180°	75°	15°	14°.9
22.5 » 202.5	77	13	12.7
45 » 225	78	12	12
67.5 » 247.5	$77^3/_4$	$12^1/_4$	12.7
90 » 270	75	15	14.9
112.5 » 292.5	70	20	19
135 » 315	68	22	22
157.5 » 337.5	70	20	19
180 » 360	75	15	14.9

Nimmt man das Complement des Regenerationswinkels als Radius Vector, die Azimuthe aber als Winkel der Polarcoordinaten an, so geben die Beobachtungsresultate dieser Tabelle gemäfs eine Ellipse, deren halbe kleine Axe 12 dem Azimuthe 45°, und deren halbe grofse 22 dem Azimuthe 135° entspricht. Diese Ellipse nähert sich einem Kreise desto mehr, je näher das angewendete Metall dem Anfange der oben angegebenen Körperreihe steht. Heifst nämlich β das Azimuth der Regeneration nach zwei Reflexionen, a die halbe Gröfse, und b die halbe kleine Axe der Ellipse, so hat man die Proportion

$$a : b = \sin. 2\beta : 1;$$

und da für Silber $\beta = 39° 48'$ ist, so wird das Verhältnifs der zwei Axen 1 : 0.9835.

Es ist interessant, die Gestalt und Lage der Ellipse für Winkel zu untersuchen, welche *über* oder *unter* dem des Maximums der Polarisation stehen. Solche Resultate enthält die folgende Tafel für Einfallswinkel von 80° und 68°, das Azimuth der zweiten Reflexionsebene gegen die erste rechts oder links von derselben gerechnet.

Azimuth.	Einfallswinkel von 80°. Complement des Regenerationswinkels zur		Einfallswinkel von 68°. Complement des Regenerationswinkels zur	
	Rechten.	Linken.	Rechten.	Linken.
0°	23°	23°	11°	11°
11¼	25	20	24	10
22½	26	16⅓	24½	9
33¾	24	13	25½	9¾
45	20½	11½	26⅓	11½
56¼	18	10	25⅓	15
67½	15⅓	9½	20	18
78¾	11	9¾	21	20
90	10	10	22	22

Aus allem diesen folgt nun folgende Charakteristik der Ellipse:

Einfallswinkel.	Verhältnifs der Axen.	Charakter der Ellipse.	Azimuth der grofsen Axe.
0°	0 : 90	gerade Linie.	90° u. 270°
68°	9 : 26	Ellipse.	45° » 56° rechts.
75°	12 : 22	detto.	— 45° do.
80°	9½ : 26	detto.	— 22°½ do.
90°	0 : 90	gerade Linie.	— 0°

Die Lage der grofsen Axe wird durch $45 \mp \varphi$ gegeben. Ist der Einfallswinkel für die erste Ebene x, so ist der Radius der Ellipse bei den Azimuthen 90° und 270° stets $90° - x$, und der bei den Ellipsen 0° und

180° das Complement des Einfallswinkels, wo φ mit x einerlei Werth hat, und dadurch ist die Gestalt und Lage der Ellipse vollkommen bestimmt.

Das Vorhergehende setzt voraus, dafs sich die ursprüngliche Polarisationsebene des Strahls um 45° rechts von der ersten Reflexionsebene befindet. *Aendert sich diese Lage*, so erfährt der regenerirte Strahl in den Azimuthen 0°, 90°, 180° und 270° keine Veränderung, bei jedem anderen Azimuth der zweiten Reflexionsebene hingegen werden die Regenerationswinkel kleiner, so lange die Neigung der Polarisationsebene zwischen 45° und 0° wechselt, und gröfser, wenn diese sich zwischen 45° und 90° befindet.

Wendet man zwei reflectirende Körper *von verschiedener Natur* an, wie z. B. Stahl und Silber, so ist für den Fall der Regeneration des Strahls die Neigung der zweiten Reflexionsebene gegen die erste die mittlere arithmetisch proportionirte zwischen den Neigungen, welche jeder Einzelne dieser Körper fordert.

Brewster bemerkt, dafs die durch mehrere Reflexionen in Glas erzeugte circuläre Polarisation stets durch eine oder mehrere Reflexionen an Metallen in eine geradlinige verwandelt werden kann, sobald letztere nur bei kleinern Incidenzen vor sich gehen, als das Maximum der Polarisation beträgt, und die Reflexionsebenen für Glas und Metall einerlei Lage haben. Combinirt man eine Reflexion auf Stahl mit zwei totalen unter 54° ½ in Glas, so ist das Azimuth der Regeneration nahe 30° ½, mithin das arithmetische Mittel zwischen dem Azimuth 45° für Glas und 17° für Stahl.

Aendert man das Azimuth der Metallfläche, auf welche der circulär polarisirte Strahl fällt, so findet man, dafs, falls dasselbe auf 90° gebracht ist, bei einem Einfallswinkel, der gröfser als 80° ist, die circuläre Pola-

risation durch *eine* Reflexion auf Metall ersetzt wird. Geht das Azimuth gegen Null zu, so wird der Einfallswinkel, für welchen diese Compensation eintritt, kleiner, und diese Verminderung geht in eine Function der Incidenz über, bei welcher die totale Reflexion eintritt. Man kann demnach die circuläre Polarisation mittelst Metallen hervorbringen, und dadurch Phänomen ins Daseyn rufen, die sich vielleicht auf anderen Wegen gar nicht erzielen lassen, die aber eine eigene Betrachtung verdienen.

* * *

Dieses ist der wesentliche Inhalt der zwei ersten Abtheilungen dieses wichtigen Aufsatzes des gelehrten Edinburger Physikers. Die dritte Abtheilung soll im nächsten Hefte folgen.

Meteorologische Beobachtungen. Jänner 1831.

Der Beobachtungsort liegt 101.7 W. F. über dem mittlern Spiegel der Donau.

Tag.	Um 8 Uhr früh.			Um 3 Uhr Nachmittag.			Um 10 Uhr Abends.			Witterung.
	Barometer o° R.	Thermometer.	Wind.	Barometer o° R.	Thermometer.	Wind.	Barometer o° R.	Thermometer.	Wind.	
	Paris. Z	Grad R.		Paris. Z.	Grad R.		Paris. Z,	Grad R.		
1	27.350	1.0	S. still.	27.345	2.0	NW schw.	27.473	— 0.5	NW. schw.	Sonne mit Wolken.
2	27.592	2.0	NW. schw.	27.605	3 0	NW. still.	27.649	1.8	W. schwach.	Trüb.
3	27.670	2.0	NW. schw.	27 678	2.0	N. still.	27 715	1.5	S. still.	Sonne mit Wolken.
4	27.698	2.0	S. still.	27.676	3.0	S. still.	27.637	1.8	SSW. still.	Trüb.
5	27.570	2.0	W. still.	27.499	2 0	S. schwach.	27.458	0.5	S. still.	Trüb.
6	27.462	— 1.0	S. still.	27.366	0.0	N. schwach.	27.429	— 1.0	N. schwach.	Trüb und Schnee.
7	27.695	— 1.0	N. schwach.	27.885	— 3.0	N. stark.	27.982	— 4,8	NW. mittelm.	Sonne mit Wolken.
8	28.084	— 5.5	NW. schw.	28.063	— 4.0	NW. schw.	28 064	— 6 2	NW. schw.	Heiter.
9	27.852	— 8.6	W. schwach.	27.508	— 4.0	S. still.	27 458	— 6.0	W. schwach.	Sonne mit Wolken.
10	27.285	— 0.8	W. schwach.	27.330	0 2	W. mittelm.	27.448	— 2.0	W. schwach.	Sonne m. W. u. Schnee.
11	27.567	— 8.0	W. still.	27.530	— 5.0	N. still.	27.538	— 7.5	NNW. still.	Sonne mit Wolken.
12	27.445	— 4.3	W. schwach.	27.426	— 2 8	W. mittelm.	27.465	— 3.0	W. schwach.	Trüb.
13	27.457	— 2.0	WNW. schw.	27.458	— 1.0	WNW. schw.	27 566	— 1.0	W. schwach.	Trüb und Schnee.
14	27.505	— 1.0	W. schwach.	27.500	1.0	WNW. schw.	27.524	— 1.0	WNW. schw.	Sonne mit Wolken.
15	27.663	0.0	W. mittelm.	27.662	0.2	NW. schw.	27.677	— 3.0	NW. schw.	Sonne mit Wolken.
16	27.662	— 7.0	NW. schw.	27.642	— 2.0	SO. schwach.	27.658	— 3.0	OSO. schw.	Sonne mit Wolken.
17	27.643	— 3.3	SO. schwach.	27.601	— 2.8	OSO. mitt.	27.574	— 3 0	SO. schwach.	Trüb.
18	27.554	— 2.8	S. still.	27 522	— 0.4	S. still.	27.532	— 1.0	S. still.	Trüb.
19	27.543	— 1.0	SO. still.	27.523	0.0	N. schwach.	27.545	— 1.0	NNO. schw.	Trüb.
20	27.546	— 2.0	NO. schwach.	27.513	— 2.3	NO. schw.	26.540	— 3.0	NO schwach.	Trüb.
21	27.546	— 5 6	OSO. mitt.	27.442	— 3.0	SSO. schw.	27.413	— 4.5	SSO. stark.	Sonne mit Wolken.
22	27 371	— 4 6	SSO. mitt.	27.306	— 3.0	OSO. stark.	27.290	— 4.0	OSO. schw.	Sonne mit Wolken.
23	27 241	— 4.8	OSO. schw.	27.251	— 2.6	SSO. schw.	27.267	— 5.0	SO. schwach	Sonne mit Wolken.
24	27.224	— 4.0	SO. mittelm.	27.270	— 3.8	SO. mittelm.	27.135	— 4.0	SO. schwach.	Trüb.
25	27.047	— 2.0	S. mittelm.	27.045	— 3.6	WSW. still.	27 211	— 4.0	WSW. schw.	Trüb.
26	27.222	— 2.6	WNW. mitt.	27.320	— 4.5	NW. stark.	27 434	— 6 0	NW. schw.	Strk. Wind, Schneegest.
27	27.499	— 6.0	NW. schw.	27 454	— 2.6	NW. schw.	27.406	— 4.0	NW. schw.	Sonne mit Wolken.
28	27.093	— 7.2	SO. schwach.	26.954	— 1.8	SO. still.	26.942	— 4.5	SO. schwach.	Sonne mit Wolken.
29	27 084	— 5.8	NW. schw.	27.166	— 2.6	WNW. schw.	27.253	— 5.0	WNW. schw.	Sonne mit Wolken.
30	27.278	— 7.0	NW. schw.	27.334	— 5.0	NNW. schw	27.350	— 6.0	NNW. schw.	Sonne mit Wolken.
31	27.449	— 8.8	N. mittelm.	27.461	— 5.8	WNW. mitt.	27.507	— 7.0	NW. schw.	Sonne mit Wolken.
Mittel	27.481	— 3.15		27.462	— 1.69		27.488	— 3.08		

Mittel aus dem täglichen Maximum und Minimum der Temperatur . . = 3.35.

Meteorologische Beobachtungen. Februar 1831.

Der Beobachtungsort liegt 101.7 W. F. über dem mittlern Spiegel der Donau.

Tag.	Um 8 Uhr früh.			Um 3 Uhr Nachmittag.			Um 10 Uhr Abends.			Witterung.
	Barometer o° R.	Thermometer.	Wind.	Barometer o° R.	Thermometer.	Wind.	Barometer o° R.	Thermometer.	Wind.	
	Paris. Z.	Grad R.		Paris. Z.	Grad R.		Paris. Z.	Grad. R.		
1	27 536	—12.0	SSW. still.	27.525	— 7.0	OSO. still.	27.524	—10.3	OSO. still.	Sonne mit Wolken.
2	27.454	—13.0	OSO. schw.	27.377	— 7.0	OSO. mitt.	27.394	— 7.0	S. still.	Sonne mit Wolken.
3	27.536	— 4.0	S. schwach.	27.608	— 1 8	SO. schwach.	27.568	— 2.0	SO. schwach,	Schnee und trüb.
4	27.414	— 1.8	SO. schwach.	27.398	0.0	NW. schw.	27.385	— 0.5	NW. still.	Trüb.
5	27.459	1.0	S. still.	27.304	4.0	SO. schwach.	27.324	2 0	WNW. schw.	Trüb.
6	27.443	3.0	WNW. mitt.	27.485	3.0	W. schwach.	27.602	0.0	W. schwach.	Sonne mit Wolken.
7	27.630	— 1.3	SW. still.	27.571	4.0	S. schwach.	27.642	2.0	SW. schw.	Trüb und Regen.
8	27.819	2.0	SW. still.	27.873	5.0	NNO. still.	27.934	3.0	NNO. still.	Sonne mit Wolken.
9	27.987	2.0	NNO. still.	28.030	4.0	SSW. schw.	28.093	2.0	SW. still.	Trüb.
10	28.065	1.0	SW. still.	28.046	6.0	S. still.	28.030	1.8	SW. still.	Trüb.
11	27.937	0.0	SW. still.	27.817	12.0	WNW. stark.	27.794	8.0	WNW. mitt.	Sonne mit Wolken.
12	27.700	8.0	WNW. mitt.	27.632	12.0	WNW. mitt.	27.672	4 8	WNW. mitt.	Sonne mit Wolken.
13	27.690	3.2	WNW. stark.	27.750	3.0	NW. stark.	27.783	1.0	NW. mittelm.	Trüb.
14	27.798	0.0	NW. schw.	27.840	1.0	NW. mitt.	27.859	0.0	NW. schw.	Trüb.
15	27.910	— 0.8	NW. schw.	27.892	1.8	ONO. still.	27.851	— 1.5	ONO. still.	Sonne mit Wolken.
16	27.828	— 2.8	WNW. still.	27.790	0.0	SSW. still.	27.725	— 1.0	SW. still.	Trüb.
17	27.633	0 0	OSO. schw	27.564	4.0	WNW. schw.	27.490	2.0	WNW. still.	Trüb.
18	27.564	2.8	WNW. schw.	27.549	4.0	WSW. schw.	27.608	2.0	WSW. schw.	Trüb.
19	27.660	1.4	WNW. schw.	27.589	6.0	SO. schwach	27.578	3.0	SO. schwach	Sonne mit Wolken.
20	27.420	0.0	S. still.	27.296	0.4	SSW. schw.	27.268	— 0.5	SW. schwach.	Trüb und Schnee.
21	27.274	0.0	W. schwach.	27.326	0.0	NW. schw.	27.371	— 0 5	NW. schw.	Sonne mit Wolken.
22	27.407	— 1.1	NW. schw.	27.447	— 0.2	NNW. mitt.	27.518	— 1.0	NNW. schw.	Trüb und Schnee.
23	27.550	— 1.0	NNW. schw.	27.606	— 0.5	NW. stark.	27.664	— 1.8	NW. mittelm.	Trüb und Schnee.
24	27.694	— 2.0	WNW. mitt.	27.696	— 0.8	NW. mittelm.	27.663	— 1.5	NW. mittelm.	Sonne mit Wolken.
25	27.607	— 0.8	W. schwach.	27.525	3.0	W. schwach.	27.499	1.8	W. schwach.	Sonne mit Wolken.
26	27.374	2.0	WSW. still.	27.307	6.0	WNW. stark.	27.208	1.6	WSW. schw.	Sonne mit Wolken.
27	27.095	1.5	N. still.	27.213	5.0	W. schwach.	27.164	2.0	NW. schw.	Sonne mitWolk. u. Reg.
28	27.010	4.0	WNW. schw.	27.080	4.0	WNW. mitt.	27.134	3 3	W. mittelm.	Sonne mitWolk. u. Reg.
Mittel	27.589	— 0.49		27.577	2.54		27.583	— 0.46		

Mittel aus dem täglichen Maximum und Minimum der Temperatur . . = 0.02.

Meteorologische Beobachtungen. März 1831.

Der Beobachtungsort liegt 101.7 W. F. über dem mittlern Spiegel der Donau.

Tag.	Um 8 Uhr früh.			Um 3 Uhr Nachmittag.			Um 10 Uhr Abends.			Witterung.
	Barometer o° R.	Thermometer.	Wind.	Barometer o° R.	Thermometer.	Wind.	Barometer o° R.	Thermometer.	Wind.	
	Paris. Z.	Grad R.		Paris. Z.	Grad R.		Paris. Z.	Grad R.		
1	27.253	2.0	W. mittelm.	27.233	5.3	W. stark.	27.308	2.0	W. stark.	Sonne mit Wolken.
2	27.388	0.2	WNW. stark.	27.464	4.0	WNW. mitt.	27.468	2.0	W. schwach.	Sonne mit W. u. Schnee.
3	27.268	3.0	WNW. schw.	27.206	5.8	WNW. mitt.	27.212	4.5	W. Sturm.	Regen.
4	27.303	6.4	W. schwach.	27.362	8.0	WNW. mitt.	27.398	3.0	WNW. mitt.	Sonne m. Wolk. u. Reg.
5	27.508	5.0	WNW. schw.	27.532	7.0	NW. schw.	27.548	2.8	NO still.	Sonne mit Wolken.
6	27.418	3.0	SO. schwach.	27 291	5.8	SW. schwach.	27.293	2.5	SO. schwach.	Trüb und Regen.
7	27.257	3.0	S. schwach.	27.270	8.5	W. schwach.	27.367	5 8	W. schwach.	Trüb und Regen.
8	27.398	7.0	WNW. schw.	27.437	9.0	WNW. schw.	27.474	5.5	W. schwach.	Sonne mit Wolken.
9	27.458	5.0	S. still.	27.428	8.0	N. still.	27.394	5.0	WNW. schw.	Sonne m. Wolk. u. Reg.
10	27.418	5.0	S. still.	27.458	8.0	NNO. schw.	27.522	4.8	WNW. schw.	Sonne mit Wolken.
11	27.583	5.0	W. schwach.	27.601	7.0	WNW. schw.	27.550	3.0	W. schwach.	Sonne mit Wolken.
12	27.552	1.0	WNW. schw.	27.513	5.8	NO. schw.	27.530	3.0	W. schwach.	Sonne mit Wolken.
13	27.513	4.5	W. schwach.	27.474	6.0	WNW. schw.	27.547	4 4	W. schwach.	Sonne m. Wolk. u. Reg.
14	27.518	4.0	WSW. schw.	27.474	11.8	W. schwach.	27.448	6.0	W. schwach.	Sonne mit Wolken.
15	27.463	5.0	W. schwach.	27.472	8.0	WNW. schw.	27.483	4 0	W. mittelm.	Sonne m. Wolk. u. Reg.
16	27.404	6.0	WNW. schw.	27.176	8.0	NW. stark.	27.122	7.0	NW. stark.	Regen.
17	27.298	5.0	NW. mittelm.	27.389	8.0	WNW. stark.	27.373	5.8	WNW. mitt.	Trüb und Regen.
18	27.371	6.0	WNW. mitt	27.378	9.0	NW. stark.	27.430	5 0	WNW. mitt.	Sonne m. Wolk. u. Reg.
19	27.426	4.0	W. mittelm.	27.382	6.0	WNW. mitt.	27.431	3.1	WNW. mitt.	Nebel, Schnee u. Regen.
20	27.486	1.0	W. schwach.	27.522	3.0	NNW. schw.	27.533	1.8	NW. schw.	S. m. W., Schn. u. Reg.
21	27.537	2.0	WNW. schw.	27.533	4.0	NNW. schw.	27.570	1.0	NW. schw.	Sonne mit Wolken.
22	27.583	0.0	WNW. schw.	27.611	1.0	NW. stark.	27.634	— 1.0	NW. mittelm.	S. mit Wolk. u. Schnee.
23	27.566	— 0.5	NW. mittelm.	27.512	— 1.0	N. mittelm.	27.535	— 2.0	N. schwach.	Trüb und Schnee.
24	27.581	— 2.8	NW. still.	27.611	3.0	SO. mittelm.	27.586	1.3	SO. schwach.	Sonne mit Wolken.
25	27.542	1 2	OSO. mitt.	27.539	3.0	S. mittelm.	27.547	1.8	S. mittelm.	Trüb und Schnee.
26	27.567	3.3	S. mittelm.	27.637	6.0	SO. stark.	27.664	2.9	SO. mittelm.	Sonne mit Wolken.
27	27.634	3.0	OSO. schw.	27.622	8.0	OSO. stark.	27.662	3.7	SO. mittelm.	Sonne mit Wolken.
28	27.667	2.8	OSO. schw.	27.633	5.0	SO. schwach.	27.610	2 8	SO. schwach.	Trüb.
29	27.613	3.8	SO. still.	27.609	8.0	SSO. still	27.609	4.8	W. still.	Trüb und Regen.
30	27.643	6.0	W. still.	27.640	9.0	WNW. still.	27.650	5.8	NW. still.	Trüb.
31	27.674	5.0	NNW. schw.	27.660	9.0	NNW. schw.	27.687	5.0	NNW. schw.	Trüb.
Mittel	27.480	3.39		27.473	6.36		27.490	3.45		

Mittel aus dem täglichen Maximum und Minimum der Temperatur . . = 3.99.

Fig. 1.

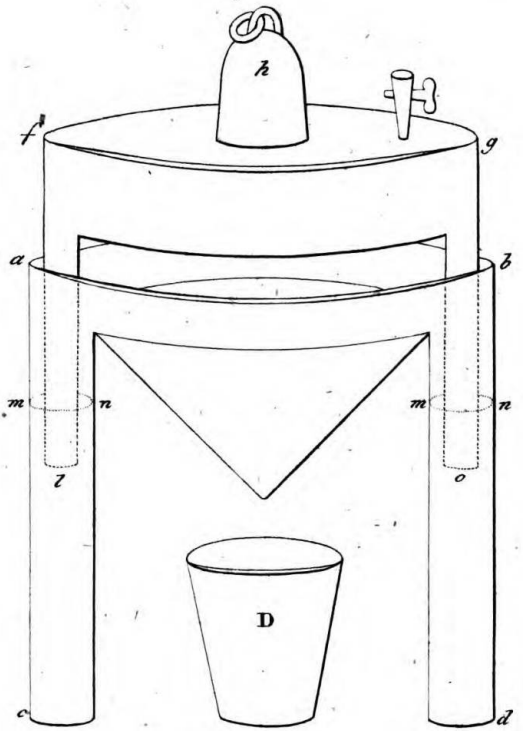
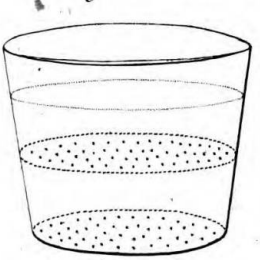


Fig. 2.



Fig

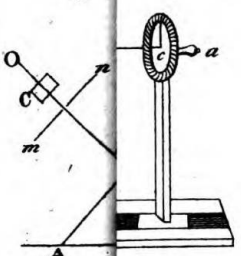
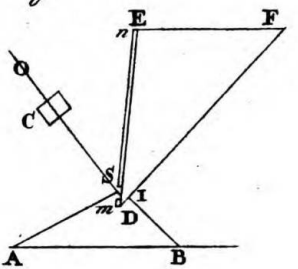


Fig. 16.



Fig

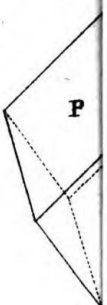
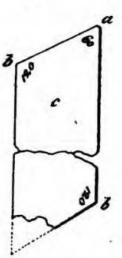


Fig. 8.

Fig. 9.

Fig. 12.



Fig

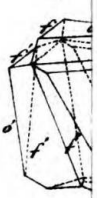
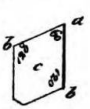
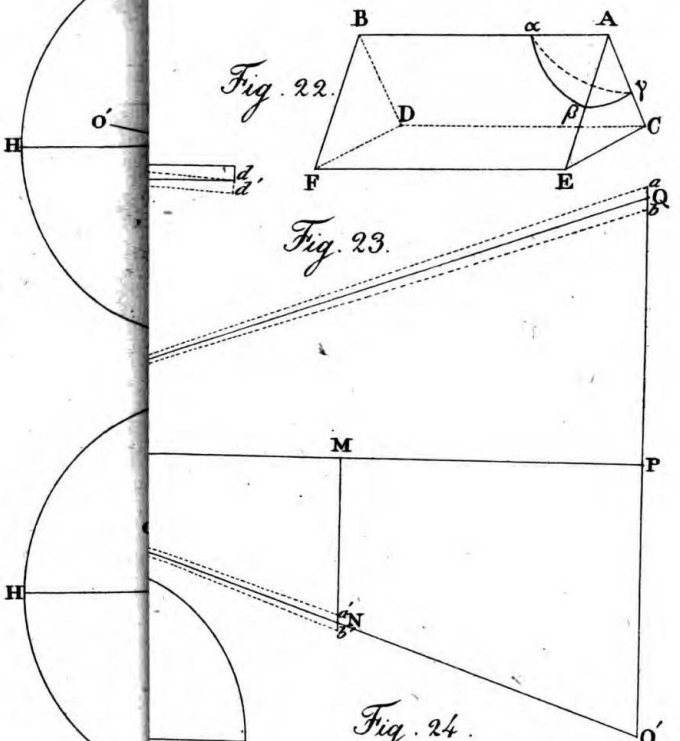


Fig. 13.

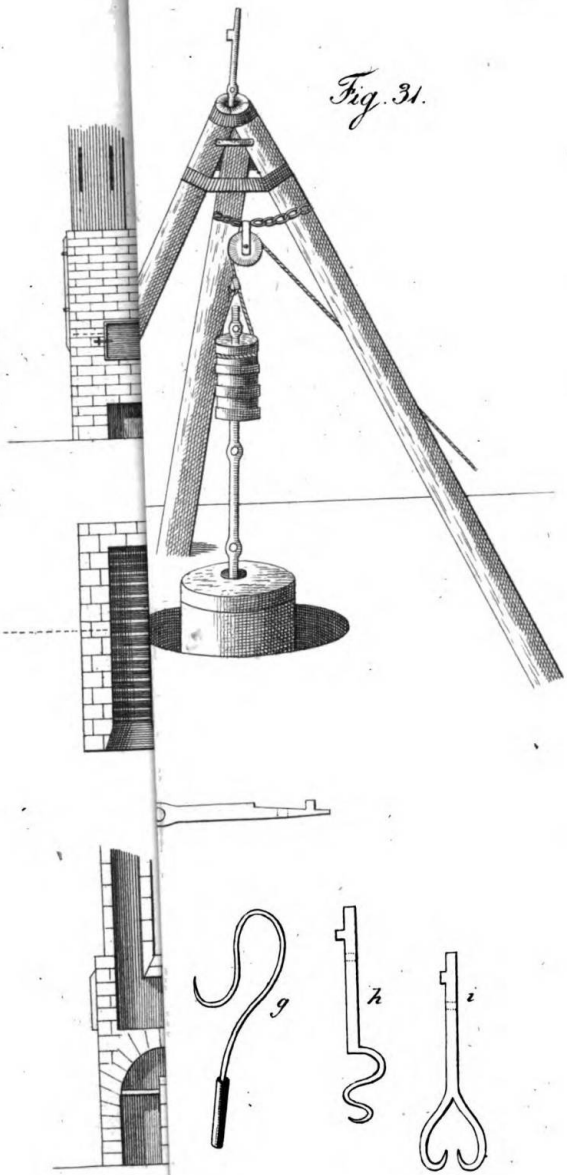


M. B. sc.


B
α
A
γ
D
β
C
F
E
Fig. 22.
O'
H
d
d'
Fig. 23.
a
Q
b
M
P
H
N
Q'
Fig. 24.
Q
B
Q''
D
c
A
C'
C''
Q'
Q
H''
H'
H
D
g
h
b
f
n
s
d
Fig. 26.

M. B. sc.

Fig. 31.



M. Bauer sc.